

衍射层析成像的 Voronoi 图密度补偿算法的研究

方 杰, 刘仁金

(皖西学院机械与电子工程学院, 安徽六安 237012)

摘 要: 网格算法是最常见的衍射层析成像的频域重建算法, 然而这种算法却容易引入误差, 且对采样点的分布形状较敏感, 因此, 本文提出了一种基于 Voronoi 图密度补偿的超声衍射层析成像重建算法. 首先, 用三角剖分快速生成算法生成投影数据的 Voronoi 图, 并对在外凸壳上对应的 Voronoi 图面积是无穷大的点通过拟合、插值处理使之变为有限的补偿面积, 从而得到整个点集的补偿面积. 其次, 提出了基于 Voronoi 图面积密度补偿的衍射层析成像的非均匀傅里叶变换网格重建算法, 重建图像的质量较没有补偿的有很大提高. 最后, 提出了选取 1/4 圆弧的数据集重建方案, 实验结果表明: 在重建质量相当的情况下, 1/4 圆弧的重建时间比 1/2 圆弧少 27.32%.

关键词: 密度补偿; 衍射层析成像; 非均匀傅里叶变换; Voronoi 图

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)07-1268-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.07.004

Study on Image Reconstruction of Diffraction Tomography with Density Compensation Algorithm by Voronoi Diagrams

FANG Jie, LIU Ren-jin

(College of Mechanical and Electronic Engineering, West Anhui University, Liu'an, Anhui 237012, China)

Abstract: A common way for image reconstruction in frequency domain is the gridding algorithm. However, this approach is liable to introduce inaccuracies and is sensitive to the configuration of the sample points. So a new reconstruction method based on Voronoi diagrams is proposed in this paper. Firstly, the projection data of Voronoi diagram is generated quickly based on triangulation algorithm, data points on the convex shell with the infinite area of Voronoi diagram is turned into the finite compensation area by polynomial fitting and interpolation processing, then all the data points obtained the compensation area of Voronoi diagram. Secondly, the reconstruction algorithm of diffraction tomography using NUFFT (non-uniform FFT) and the density compensation by the area of Voronoi diagram is proposed, and the quality of reconstructed image has been greatly improved. Finally, the results of simulation showed that there is 27.32% less reconstructive time of 1/4 arc than the time of 1/2 arc in the case of considerable quality of reconstruction.

Key words: density compensation; diffraction tomography; non-uniform FFT; Voronoi diagrams

1 引言

在衍射层析成像中, 投影数据傅里叶变换得到的数据集所在的空间, 通常称为 k 空间(复平面). 此时, 图像重建变成一个傅里叶逆变换问题. 衍射层析成像投影数据集在 k 空间呈半圆弧状非均匀分布, 需要用核卷积算法将数据插值到笛卡尔网格上, 再用傅里叶逆变换进行重建, 这类算法称之为非均匀傅里叶变换 (NUFFT). 衍射层析成像非笛卡尔分布的半圆弧状数据集的采样密度在 k 空间上的分布是不均匀的, 故这种采样密度不均匀性会造成网格化后取值结果有很大偏差, 严重影响图

像重建质量, 因此, 超声衍射层析成像必须对采样 k 空间上的数据集进行补偿密度, 然后才能用相关的图像重建算法实现重建. 近年来, 国内外学者对利用密度补偿改善核磁图像重建质量做了深入研究, 取得了很好的成果^[1~3]. 鉴于超声衍射层析成像数据集和核磁的 PROPELLER 数据集在 k 平面上都呈非笛卡尔状分布, 本文提出一种基于 Voronoi 图密度补偿的衍射层析成像重建算法, 该算法用 Voronoi 图面积来对不均匀分布的投影数据进行密度补偿, 并用核函数进行卷积插值到笛卡尔网格上, 最后用傅里叶逆变换进行重建, 实验结果表明经过密度补偿后重建图像的质量比补偿前有很大的提高.

2 Voronoi 图简介

Voronoi 图结构的概念是由俄国数学家 M G Voronoi 图于 1908 年提出的,其实质是一种在自然界中宏观和微观实体距离的相互作用的普遍结构,因而具有广泛的应用范围^[4],Delaunay 三角形是将具有共同边界的 Voronoi 图单胞对应的节点连接而构成的,这些多边形是以维诺多边形顶点为外接圆圆心的.维诺多边形和 Delaunay 三角形形成对偶关系,所以生产 Voronoi 图时,先生成 Delaunay 三角网,再对三角网中每一三角形三条边作中垂线,这些中垂线相交就构成了维诺多边形,Voronoi 图就是这些多边形的集合.Voronoi 图生成以后,就实现了按与生成元距离的接近程度对空间等权的瓜分.

3 Delaunay 快速剖分算法

由于 Delaunay 三角剖分具有较高的运算效率、生成网格单元的质量高等优点而得到广泛的应用和研究^[4~7].在众多剖分算法中,Lawson 和 Sloan 等提出的算法因具有编程容易、运算效率高等优点而被广泛采用^[8].

Lawson 算法的基本步骤是:

(1)建立一个大的多边形,包含所有 k 空间上离散数据点,放入三角形链表.

(2)将大的多边形中数据点依次插入(如图 1(a)所示),在 Delaunay 三角网中找出其外接圆包含插入点的所有三角形(如图 1(b)中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 所示),删除 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的公共边 AB (如图 1(c)所示),找出外接圆包含点插入点 P 的三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$,再将点 P 和三角形的顶点 A 、 B 、 C 、 D 点连接起来(如图 1(d)所示),从而完成插入点 P 在 Delaunay 三角形链表中的插入.

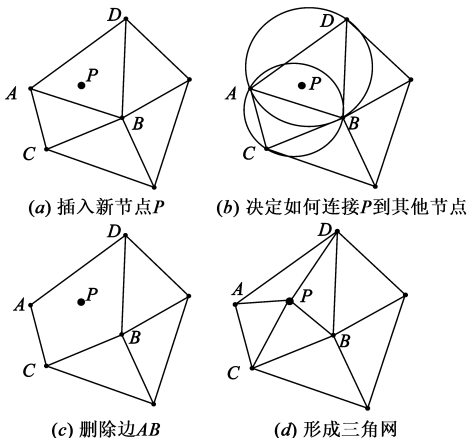


图1 Lawson算法节点插入过程示意图

(3)优化生成的三角网,具体做法如下:选取由两个具有共同边的三角形组成的四边形中任意三个顶点作外接圆,观察第四个顶点是否在三角形的外接圆之内,如果不在圆内,则保留该四边形的对角线(三角形的公共边),反之,则删除该对角线,并添加四边形的另一条对角线,生成两个新的三角形,就完成局部优化过程的处理

(4)循环执行上述第 2 步,直到所有数据点插入完毕.

4 k 空间数据获取

$u_\theta(r)$ 为来自平面不同角度的超声波穿过软组织得到的投影数据,未知函数的二维傅里叶变换分布为在复平面上半径为 k_0 的半圆弧上的值可以用 $u_\theta(r)$ 的傅里叶变换^[9]求得,该算法称为傅里叶衍射投影定理,如式(1).

$$\mathbf{F}\{u_\theta(r)\}(k) = \mathbf{F}\{o(x, y)\}(k_x, k_y) \quad (1)$$

式(1)中:

$$k_x = k \cos\theta - (\sqrt{k_0^2 - k^2} - k_0^2) \sin\theta,$$

$$k_y = k \sin\theta + (\sqrt{k_0^2 - k^2} - k_0^2) \cos\theta,$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \theta = \arctan(k_x/k_y),$$

k_0 为入射声波的波数, $\mathbf{F}\{\cdot\}$ 表示傅里叶变换. $u_\theta(r)$ 中 r 为超声波换能器到接收端距离, θ 为投影方向,上式就是傅里叶衍射投影定理的表达式. $o(x, y)$ 是关于超声波折射系数 $n(x, y)$ 的未知函数,不同组织中超声的传播速度不相同,其折射系数也不同,超声波换能器经过不同角度多次对人体进行照射,接收端的超声波换能器能够接收到精确反应展示软组织内部随折射系数 $n(x, y)$ 变化的投影数据 $o(x, y)$,这些投影数据在 k (复平面)空间上呈圆弧状分布,对这些投影数据重建可以获得非专业人士能够鉴别的组织切片图像.

5 衍射层析成像重建算法

针对复平面上不均匀数据的重建问题, Dutt 和 Rokhlin 于 1993^[10]年提出了 NUFFT, Sarty 等人^[11~13]将 NUFFT 做了改进,采用高斯卷积核函数,称为 GFFT,并成功运用到磁共振成像的重建中,但是 GFFT 对核参数的依赖性比较强.因此,本文采用的是基于最小二乘非均匀快速傅里叶变换 (LS-NUFFT, Least Square NonUniform FFT) 超声衍射层析成像重建算法.这种算法比 GFFT 的重建效率更高^[14].

为了方便计算机实现,将 $u_\theta(r)$ 经过傅里叶变换得到的 M 个数据对应的存放到一个一维数 s_m , 其中 $i = 1: M$. 将 k_x 、 k_y 对应的 M 个复坐标位置记为 k_{xm} 、 k_{ym} , 上式就是傅里叶衍射投影定理的表达式理论上可以用直

接的傅里叶变换精确的重建出图像

$$I(x, y) = \sum_{m=1}^M s_m \exp(i2\pi(xk_{xm} + yk_{ym})) C_m \quad (2)$$

式中 $I(x, y)$ 为重建后图像, C_m 为密度补偿值; 这种算法的复杂度为 $O(MN^2)$, 近似为 $O(N^4)$, 运算量相当大. 选用合适的核函数 ρ_1 和 ρ_2 和标尺函数 $s(x)$ 、 $s(y)$, 直接重建公式可表示为^[9]

$$I(x, y) = \left[s(x)s(y) \right]^{-1} \sum_{k_1=-\mu/2}^{\mu/2-1} \sum_{k_2=-\mu/2}^{\mu/2-1} \tau_{k_1, k_2} \frac{\exp(i2\pi(xk_1 + yk_2))}{\mu} \quad (3)$$

τ_{k_1, k_2} 是式(3)中的 $\sum s_m C_m \sum \rho_1 \rho_2$, 可以用经过密度补偿的 k 空间数据与核矩阵的卷积来替换

$$\tau_{k_1, k_2} = \sum_{[rk_m]_{+j_1} = k_1} \sum_{[rk_m]_{+j_2} = k_2} s_m C_m \quad (4)$$

该方法用于二维的图像重构时, ρ 等价于传统网格化方法的核函数. μ 代表视场的标尺, μ 设置成 2 相当于将图像的视场加倍, $J+1$ 为每个非均匀样点处的参与插值样点数, J 相当于传统网格化插值的“窗宽”.

6 超声衍射层析成像重建中密度补偿步骤

对衍射层析成像的 k 平面上的投影数据, 采用的 Delaunay 三角剖分和 Lawson 算法可以快速的生成数据集的 Voronoi 图. 图 2(a) 是 8 次投影数据在 k 平面上分布, 图 2(b) 是其 Voronoi 图. 图 3(a) 是采用 1/4 圆弧 8 次投影数据在复平面上分布, 图 3(b) 是其 Voronoi 图. 可以看出, 图 2(b) 中生成 Voronoi 图的数量要比图 3(b) 少一半. 所以 Voronoi 图生成的运算量也是图 2(b) 的一半.

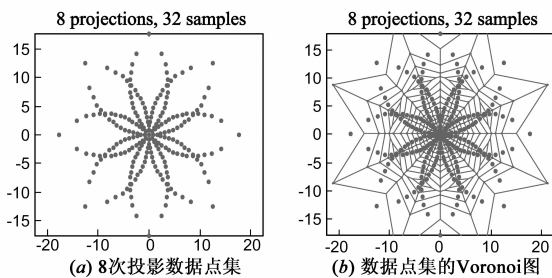


图2 投影数据的1/2圆弧数据点集和其Voronoi图

按上述方法生成的 Voronoi 图, 在边缘处的数据样点不能形成封闭的多边形(如图 2、3 中(b)图所示), 故这些边界点的 Voronoi 图面积无穷大, 无法利用它作密度补偿, 这样会使重建图像的高频部分信息丢失, 所以重建算法需对这些无穷大面积进行处理才能获得所有点集的补偿面积. 基于 Voronoi 图面积密度补偿的衍射层析成像的非均匀傅里叶变换网格重建算法实验步骤如下:

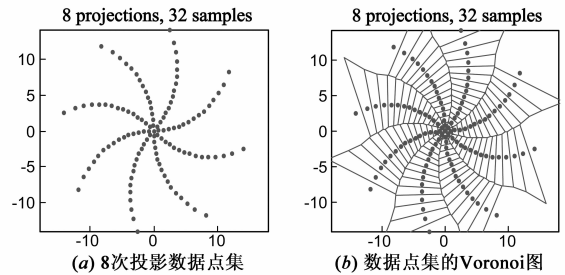


图3 投影数据的1/4圆弧数据点集和其Voronoi图

(1) 生成 Voronoi 图. 用 Delaunay 三角剖分算法建立数据集对应的 Voronoi 图.

(2) 计算 Voronoi 图面积. 对 k 空间上的数据(不在外凸壳上)计算其各点 Voronoi 图的面积.

(3) 计算外凸壳上面 Voronoi 图面积. 首先, 对于投影数据在外凸壳上的点对应的无穷大 Voronoi 图面积用 0 来代替; 然后, 将距离点集中心归一化半径大于 0.6 但不在外凸壳上的数据点 Voronoi 图面积用最小二乘法拟合成一个二阶多项式; 最后, 对补偿面积为 0 数据点以距离点集中心的归一化半径对二阶多项式进行插值, 得到的值作为该点密度补偿的面积.

(4) 网格化. 将使用第(2)、(3)步得到的 Voronoi 图面积来作为数据点的密度补偿函数, 按式(3)将所有数据点重新插值到均匀的网格上.

(5) 重建. 使用傅里叶反变换重建图像.

本文重建算法的运算量主要由以下 2 部分组成: ①二维 IFFT 的运算量为 $O((mN)^2 \log_2(mN))$; ②核卷积插值运算的运算量为 $O(q^2 M)$. 算法总的运算量为 $O((mN)^2 \log_2(mN) + q^2 M)$. m 表示视场的标尺, 如 m 设置成 2, 相当于将图像的视场加倍; q 相当于传统网格化插值的窗宽, 每个非均匀样点处的参与插值的样点数为 $q+1$. M 为重建数据点数, 与重建图像像素数 N^2 相当, 所以采用图 3 投影数据选取策略运算量减少一半.

7 仿真

实验采用 128×128 的 Shepp-Logan 标准测试图, 做 128 次投影, 每次投影做 256 次采样, 根据傅里叶衍射投影定理获得测试图的采样数据^[15], 卷积核的宽度设为 4. 图 4 是没有补偿和两种不同的数据点集经过 Voronoi 图密度补偿后的重建结果.

重建后图像的误差用常用的基于 2-范数的误差 $E_2(p=2)$, 同时为了更能说明问题, 定义了基于 ∞ -范数的误差 $E_\infty(p=\infty)$, 如式(5)所示:

$$E_p = \frac{\|I_r - I\|_p}{\|I\|_p} \quad (5)$$

式中 I 为 Shepp-Logan 标准测试图灰度值, I_r 为重建后

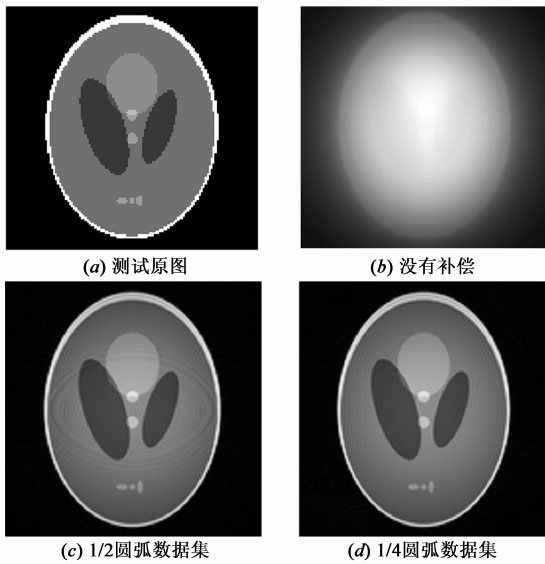


图4 128×128的Shepp-Logan标准测试图和两种数据集没有补偿和经过密度补偿后重建图

图像灰度值。

由图 4(b)所示重建结果可以看出,没有经过补偿的 Shepp-Logan 的体模区域亮度较高,基本没有反映体模内部对比度,很难根据此来判断物体内部折射系数的变化情况.图 4(c)是图 2(a)形式的数据集(1/2 圆弧)经过密度补偿后的重建图,该图的对比度与体模原图(图 4(a))十分接近了,能够很好地反应出物体内部折射系数变化情况.从表 1 可以看出,图 4(c)的 2-范数误差和 ∞ -范数误差要比没有补偿的图 4(b)大的多.为了减少数据集投影数据的数量,图 4(d)是用图 3(a)形式数据集(1/4 圆弧)经密度补偿后的重建图,其 2-范数和 ∞ -范数误差与 1/2 圆弧数据集的误差相当(如表 1),但重建的总时间(投影数据获取和重建时间)少了 27.32%,并且图 4 中(c)图的纹波现象也少了,故选用这种 1/4 圆弧数据集重建效果最佳.

表 1 密度补偿前后的重建的误差与总时间比较

	没有补偿	1/2 圆弧数据集 + 补偿	1/4 圆弧数据集 + 补偿
2-范数误差(E_2)	0.862	0.1850	0.1859
∞ -范数误差(E_∞)	1.130	0.3208	0.3251
总时间/s	32.05	39.922	29.016

8 小结

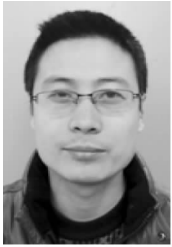
本文提出了一种超声衍射层析成像的 Voronoi 图密度补偿重建算法,利用 Voronoi 图的面积作为补偿的权函数对数据点集进行密度补偿,补偿后能够得到很好的重建效果.在重建效果相当的情形下,选用 1/4 圆弧比 1/2 圆弧的总耗时少 27.32%.

参考文献

- [1] Arfanakis K, Tamhane A A, Pipe J G, et al. k-space under sampling in PROPELLER imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2005, 53(3): 675 - 683.
- [2] 冯衍秋, 陈武凡, 颜刚等. 磁共振成像 PROPELLER 数据网格化中的采样密度补偿新算法[J]. 电子学报, 2007, 35(4): 766 - 768.
Feng yanqiu, Chen wufan, Yan Gang, et al. A new algorithm for sampling density compensation in the gridding of PROPELLER MRI data [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(4): 766 - 768. (in Chinese)
- [3] 周荷琴, 谭裴, 侯成功. 基于 Voronoi 图的磁共振 PROPELLER 数据网格化算法[J]. 中国科学技术大学学报, 2008, 38(7): 783 - 786.
Zhou heqin, Tan pei, Hou Chenggong. A Voronoi diagram-based algorithm for the gridding of PROPELLER MRI data [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(7): 783 - 786. (in Chinese)
- [4] 陶丹, 孙岩, 陈后金. 视频传感器网络中最坏情况覆盖检测与修补算法[J]. 电子学报, 2009, 37(10): 2284 - 2289.
Tao dan, Sun Yan, Chen Houjin. Worst-case coverage detection and repair algorithm for video sensor networks [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(10): 2284 - 2289. (in Chinese)
- [5] 杜群贵, 邓达华. 基于 Delaunay 剖分有限元网格节点和单元一体化生成方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(1): 60 - 65.
Du qungui, Deng dahua. Concurrent generation of nodes and elements for finite element meshes by Delaunay method [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1997, 9(1): 60 - 65. (in Chinese)
- [6] Du Q, Wang D S. Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 195(1/2): 8 - 23.
- [7] 骆冠勇, 曹洪. 一种网格和节点同步生成的二维 Delaunay 网格划分算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(5): 605 - 608, 615.
Luo Guanyong, Cao Hong. An algorithm for constructing 2D Delaunay adaptive mesh with simultaneous generation of nodes and elements [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(5): 605 - 608, 615. (in Chinese)
- [8] Sloan S W. A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane [J]. Advances in Engineering Software, 1987, 9(1): 34 - 55.
- [9] Zhang D W, Tao J X. A novel gridding algorithm using NUFFT with applications to ultrasound diffraction tomography [A]. Proceedings of the 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering [C]. Shanghai, China: IEEE, 2008. 2473 - 2476.

- [10] Dutt A, Rokhlin V. Fast Fourier transforms for nonequispaced data, II [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1995, 2(1): 85 – 100.
- [11] Sarty G E, Bennett R, Cox R W. Direct reconstruction of non-Cartesian k-space data using a nonuniform fast Fourier transform [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2001, 45(5): 908 – 915.
- [12] Fessler J A. On NUFFT-based gridding for non-Cartesian MRI [J]. Journal of Magnetic Resonance, 2007, 188(1): 191 – 195.
- [13] Jung Kuk Kim, J A Fessler, Zhengya Zhang. Forward-projection architecture for fast iterative image reconstruction in X-ray CT [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(10): 5508 – 5518.
- [14] 方杰, 韦穗, 霍修坤. 超声衍射层析成像的高精度核卷积插值重建算法 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(10): 94 – 98.
Fang jie, Wei sui, Huo xiu kun. An accurate reconstruction algorithm in diffraction ultrasound tomography using kernel convolution interpolation [J]. Journal of Xi'an Jiao Tong University, 2009, 43(10): 94 – 98. (in Chinese)
- [15] 方杰, 韦穗, 苏守宝. 基于整体变分降噪算法下的多频率超声衍射层析成像 [J]. 电子学报, 2009, 28(4): 828 – 832.
Fang Jie, Wei Sui, Su Shoubao. The multi-band diffraction ultrasound tomography images based on the total variation denoised algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 28(4): 828 – 832. (in Chinese)

作者简介



方杰 男. 1978年9月出生, 安徽寿县人, 皖西学院机械与电子工程学院副教授、博士, 研究方向: 信息与信号处理、计算机层析成像.

E-mail: 63640193@qq.com



刘仁金 男. 1969年6月生, 安徽六安人, 皖西学院信息工程学院教授、博士、硕士生导师, 研究方向: 数字图像处理.

E-mail: rjliu@wxc.edu.cn