节点约束型最短路径的几何代数算法

冯琳耀[1],袁林旺[1,2],罗 文[1],李润超[1],俞肇元[1]

(1.南京师范大学虚拟地理环境教育部重点实验室,江苏南京 210023;
2.南京师范大学江苏省大规模复杂系统数值模拟重点实验室,江苏南京 210023)

摘 要: 面向网络分析应用中复杂条件约束下的最短路径求解问题,引入几何代数进行网络分析算法构造.建立了基于几何代数的网络模型和双边搜索算法,以寻找经过指定必经节点且弧段最少的最短路径求解为例,进行了算法实现.基于道路网络数据的分析显示,本算法利用外积运算直接判断约束节点,算法具有更好的通用性和较少的路径遍历次数,且在多对多路径求解及多用户并行求解上具有优势.

关键词: 最短路径;节点型约束;几何代数;矩阵外积

中图分类号: P208, TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)05-0846-06

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.05.003

Geometric Algebra-Based Algorithm for Solving Nodes Constrained Shortest Path

FENG Lin-yao[1], YUAN Lin-wang[1,2], LUO Wen[1], LI Run-chao[1], YU Zhao-yuan[1]

(1. *Key Laboratory of VGE, Ministry of Education, Nanjing Normal University, Nanjing, Jiangsu* 210023, *China*;
2. *Jiangsu Provincial Key Laboratory for NSLSCS, Nanjing Normal University, Nanjing, Jiangsu* 210023, *China*)

Abstract: Focusing on the solving of the shortest paths in the conditions of complicated constraints for network analysis and application, geometric algebra is used to develop the network analysis algorithms. We built a network model and bilateral search algorithms based on the multivector representation and multidimensional operators of geometric algebra. Then, we implemented the algorithm by taking the example of finding the shortest paths that pass the specified necessary nodes and the least segments. According to the experiment analysis of the road network data, this algorithm can directly estimate the constrained nodes by applying the outer algorithm and has better versatility and less path traversal times. Moreover, this algorithm has an advantage on many-to-many path solution and multi-user parallel solution.

Key words: shortest path; nodes constraint; geometric algebra; outer product of matrices

1 引言

给定约束的最优路径选择是路径规划的核心.基于传统的 Dijkstra 算法、Floyd 算法及 A* 算法等,发展了一系列面向地理网络或特定路径规划的优化算法[1~3].随着应用领域的不断拓展,网络规模与复杂度不断增大,用户需求也日趋复杂化,现有算法难以应对这一需求,主要表现为:①节点与弧段数大幅增加,导致路径搜索算法复杂度增加较快;②多只考虑距离权重,缺乏节点和弧段的多属性集成;③对节点数目和经过特定节点的约束需求日渐增多.有学者通过多权重约束[4,5]和弧段惩罚因子[6]等方法探索了问题①和②,但在节点权重集成、算法复杂度与一致性等方面仍有待改进.对问题③,利用邻接表进行层次遍历,不仅难以兼顾必经节点,而且难以解决回路问题,导致算法复杂度的大幅增加.且现有研究多考虑带权网络,对不带权网络的研究较少,但当考虑到运输中转,数据路由调度代价时,经过节点最少的不带权路径问题的求解则至关重要.

几何代数可直接支撑高维分析,基于几何代数的网络分析算法具有结构清晰、算法简单等特点[7~9].其优越的几何构造和分析能力可为多维道路网络表达与分析计算提供有效的支撑.其空间自定义,运算的对象无关与维度无关特性使得其在路径结构表达与求解方面具有独特优势,并可用于多约束问题的统一求解[10,11].因此,基于几何代数进行多约束网络分析算法设计可望为上述问题提供可行途径.本文利用几何代数进行节

收稿日期:2013-04-08;修回日期:2013-05-09;责任编辑:蓝红杰
基金项目:国家自然科学基金重点项目(No.41231173);江苏省自然科学基金(No.BK2012454),教育部新世纪人才培养计划(No.NECT-12-0735)

点-弧段统一的几何代数网络表达,利用几何积进行节点间连通性判断和计算.进而以包含指定必经节点的节点数最小的最短路径算法为例,建立了该最短路径问题的数学表达,并进行了算法实现,最后基于江苏道路网络进行实例验证.

2　问题描述与网络表达

2.1　问题描述

对原始网络采用无向图 $G(V,E)$表达,V 表示节点集,E 为节点间的弧段.$|V|$ 和 $|E|$ 表示该网络中节点数和弧段数,(u,v)表示弧段并且$(u,v)\in E$,$p(a,b)$为从节点 a 到节点 b 的一条简单路径.满足节点型约束的最短路径问题可描述如下:给定起始点 x 和终点 y,以及若干个指定点 $t=\{v|v\in\{V-x-y\}\}$,计算一条从 x 到 y 的简单路径,要求满足:(1)$p(x,y)$必定经过指定节点,对于 $\forall i\in t$,则 $i\in p(x,y)$;(2)$p(x,y)$经过的节点数最少;(3)$p(x,y)$不包含回路.

因此,节点型约束路径问题也是 NP 问题,因为算法运行时间受到指定点的影响,如果 $t=0$,则只是求起点到终点经历最少节点路径问题,如果 $t=\{V-x-y\}$,则是求起点到终点的最长路径.

2.2　网络节点 – 弧段的几何代数一体化表达

在几何代数中,将网络的节点和弧段投影至几何代数空间,则节点可以用几何代数正交基向量 $e_i,i=1,\cdots,|V|$ 表示,每个节点表征一个维度.基于 blade 的概念[12],可以利用几何积进行路径弧段构造.任意两向量间的几何积定义为:

$$e_ie_j=e_i\cdot e_j+e_i\wedge e_j \tag{1}$$

其中,$e_i\cdot e_j$ 为两者之间的内积运算,当 $i\neq j$ 时,$e_i\cdot e_j=0$;$e_i\wedge e_j$ 为两者之间的外积运算,当 $i\neq j$ 时,$e_i\wedge e_j=e_ie_j$.起点为 e_i,终点为 e_j 的弧段可表达为 e_ie_j,因为维度为 2,e_ie_j 也被称为 2-balde.基于弧段间的几何积运算可以依次进行路径延拓,从而得到由多个弧段顺序连接的路径,如 $e_ie_{k1}e_{k2}\cdots{}_ne_j$ 表示以 e_i 为起点,e_j 为终点,依次经过 $e_{k1},e_{k2},\cdots,e_{kn}$的路径,该路径的维度为 $n+2$,即经过的节点数为 $n+2$.

据上述定义,图 1 中路径 A-B-D-F 可表达为 $e_1e_2e_4e_6$,通过对弧段与路径的统一表达,二者可以相互转换,例如弧段 $e_1e_5e_4$ 可以由弧段 e_1e_5 和弧段 e_5e_4 的几何积得到,即:$e_1e_5e_4=e_1e_5\cdot e_5e_4+e_1e_5\wedge e_5e_4$.由于任意节点、弧段以及路径均为 blade,且都由节点向量以几何积构造而成,因此可以实现几何代数框架下的节点、弧段与路径的一体化表达与运算.

由于节点间可能存在多条路径,传统算法多是直接根据距离、时间开销等目标函数,进行单目标的静态最优路径求解.但对于多目标、权重动态变化及需要多个最优解(k 则最优路径)的路径求解问题,上述方法存在局限性.为此,引入路径集的概念,通过在几何代数空间中定义与网络拓扑结构相一致,内蕴节点间连通性的几何积运算规则,进行维度投影与子空间构造,实现连接不同子空间的多重向量结构,并定义与之相适应的度量规则,进而在特定的几何代数空间中实现网络分析连通性的判定与运算,从而为多目标、动态最优路径的求解提供支撑.

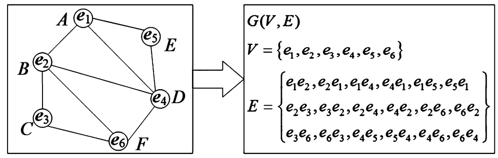


图1　网络的几何代数表达

给定起始节点 e_i 和终点 e_j,则连接二者的路径集 $S(i,j)$可表达为 $S(i,j)=s_1+s_2+\cdots+s_n$,$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 分别为以 e_i,e_j 为起止节点的路径,其中"+"仅用于连接路径,并不直接参与运算.在几何代数空间中可定义与该结构相一致的多重向量结构 $M_{ij}=\sum_{k=1}^{2^n}r^ke_{i,\cdots,j}$,其中 n 为节点个数,表示可能存在最多的不同维度路径的条数为 2^n,r^k 为调节系数,若当前维度下不存在连接 e_i,e_j 的路径时 $r^k=0$.以图 1 为例,连结节点 A、D 维度为 3 的路径集为:$M=e_1e_2e_4+e_1e_5e_4$.

2.3　网络扩展规则定义

当网络节点数给定时,几何代数的基向量,及基于其上的节点、路径的表达即可确定,网络拓扑结构与连通性计算则可通过基向量间及多重向量间的运算规则确定.由于上述规则与网络延拓及算法的运算过程密切相关,可在定义网络拓扑连通性的同时兼顾网络算法的优化目标,从而尽可能地缩小路径集的大小,提高算法效率,并为动态权重与动态目标网络算法的求解提供可能.对给定必经节点集$\{t_i,i=1,\cdots,n\}$(其中 n 为必经节点的个数)定义几何代数空间中网络的运算规则如下:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&p(a,b)\wedge p(b,c)=p(a,c)\\&p(a,b)\wedge p(d,f)=0\end{aligned}\right\}, & \text{连通性扩展规则}\\ p(a,c)=p(a,b)\wedge min_G(p(b,c)), & \text{最小维度扩展规则}\\ p(a,b)\wedge p(b,a)=0, & \text{无回路规则}\\ p(a,b)\wedge t_i=0, & \text{必经节点规则}\end{cases} \tag{2}$$

通过路径连通性扩展规则保证了结果集中路径的连通性.最小维度扩展规则保证每次维度扩展所得的路径必定为所有路径中最小维度,符合历经节点数最少条件.无回路规则和必经节点规则可对路径结果集

中的含回路路径和不经过必经节点的无效路径进行有效筛选与去除.因此,基于此规则设计路径搜索算法,满足节点型约束下的最短路径的求解要求.

3 算法设计与实现

3.1 网络运算规则的几何代数实现

(1)连通性扩展规则 网络连通性是网络拓扑的基础组成部分,也是网络分析的核心结构.基本的网络连通性表达结构主要有邻接矩阵与邻接表两种类型.由于邻接表是基于关系的存储方式,对计算的支撑不足,而邻接矩阵由于只表达节点间的邻接关系在计算效率与灵活性上也存在缺陷[13],此处将邻接矩阵向路径集扩展,构建路径邻接矩阵 $\boldsymbol{M}^n$,其定义为:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^n=\begin{cases}\langle M_{ij}\rangle_n, & i,j\text{ 间 } r \text{ 阶连通}\\ 0. & i,j\text{ 间 } r \text{ 阶不连通}\end{cases} \tag{3}$$

其中 n 指当前矩阵阶数,$\langle\,\rangle_n$ 为取维度算子,表示取出维度为 n 的路径,n 阶连通是指路径通过 n 个节点相连.据上述定义,网络的 2 阶邻接矩阵的几何代数表达如图 2 所示,该表达可以清晰地反映节点间的连通性及连通结构特征.由于路径拓展可看作是外积运算,即矩阵中的元素始终为多重向量,邻接矩阵运算满足结合律,即有:$\boldsymbol{M}^n=\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{M}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{M}$.上述表达定义了内蕴网络连通性的计算结构,使得路径连通性与权重的表达相对独立,从而可以随时根据权值的改变来筛选最优路径,提高了路径存储与运算的灵活性与动态性.

(2)最小维度扩展规则 经过节点最少是本文最优路径的求解目标之一,假设连接节点 i,j,经过 n 个节点的路径集 $\langle M_{ij}\rangle_n$ 为最少节点集,据邻接矩阵运算的结合性,$\langle M_{ij}\rangle_n$ 的解可通过以下方式求得:

$$\boldsymbol{M}^n=\begin{cases}\boldsymbol{M}^{n-m}\wedge\boldsymbol{M}^m\\ \boldsymbol{M}^{n-m-1}\wedge\boldsymbol{M}^m\wedge\boldsymbol{M}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{M}\end{cases} \tag{4}$$

易知通过 $\boldsymbol{M}^n=\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{M}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{M}$ 的求解方式由于粒度最小,其组合方式具有唯一性,能有效求得真实的最少节点的路径集结果.因此,最小维度扩展规则要求在路径扩展中依次外积 1 阶邻接矩阵,最终实现最少节点路径的求解.

(3)无回路规则 回路是一种特殊的路径结构,由于其循环性与往复性,常会将算法引入死循环,或者无法求出最优解[14].如一条路径存在回路,其间必然存在至少一个重复经过的节点,由于外积可用于线性相关的判断,当参与外积运算的两边存在相同元素时其结果为 0,基于外积运算的特性即可有效去除路径中的回路.同时在邻接矩阵中,对角线元素均表示从某一节点出发,并最终回到该节点的路径,跳过此类元素的计算也可避免回路的产生,因此对式(3)的邻接矩阵加以改造,带无回路规则的邻接矩阵的表达为:

$$\hat{M}_{ij}^n=\begin{cases}\langle M_{ij}\rangle_n, & i\neq j\text{ 且 } i,j\text{ 间 } n\text{ 阶连通}\\ 0, & i=j\text{ 或 } i,j\text{ 间 } n\text{ 阶不连通}\end{cases} \tag{5}$$

(4)必经节点规则 必经节点约束是本文算法的另一个重要约束条件,定义路径间求交(meet)算子"$\cap$",求解路径中的公共节点,进而进行必经节点的判断.对于必经节点集$\{t_s, s=1,\cdots n\}$,路径集 p 中所包含的必经节点为:$t_m=p\cap t_s$,利用维度求解算子 $grade(\,)$ 即可求当前路径中包含的必经节点个数 $grade(t_m)$,当 $grade(t_m)=grade(t_s)$时,称路径 p 满足必经节点规则.

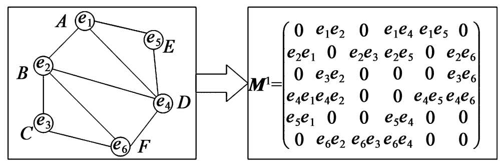


图2 网络的存储结构

3.2 节点型约束最短路径算法设计

几何代数运算空间构造为路径矩阵运算提供了完备的规则,但考虑到现实大规模网络数据的海量特性,直接基于原始邻接矩阵的计算复杂度太高,无法满足实际应用需求[13],此处引入计算矩阵仅存储与目标节点相连的路径,从而简化运算.计算矩阵为邻接矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}^n$ 的子矩阵,对于节点数为 m 的网络,给定起止节点 e_a、e_b,其计算矩阵 $\boldsymbol{Q}^n$ 为一 $2\times m$ 的矩阵$[\hat{\boldsymbol{M}}_{aj}^n,\hat{\boldsymbol{M}}_{bj}^n]^{\mathrm{T}}$,$j=1,\cdots,m$.基于上述矩阵扩展规则可知,计算矩阵中路径的扩展方法为:

$$\boldsymbol{Q}^n=\boldsymbol{Q}^{n-1}\wedge\hat{\boldsymbol{M}}^1=\boldsymbol{Q}^{n-2}\wedge\hat{\boldsymbol{M}}^1\wedge\hat{\boldsymbol{M}}^1=\boldsymbol{Q}^1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{M}}^1 \tag{6}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{M}}_{aj}^n$和 $\hat{\boldsymbol{M}}_{bj}^n$分别表示由节点 e_a、e_b 出发的路径,对 $\hat{\boldsymbol{M}}_{bj}^n$作取逆序运算$\widetilde{\hat{\boldsymbol{M}}_{bj}^n}$[15]可得到以节点 e_b 为终点的路径.则据计算矩阵 $\boldsymbol{Q}^n$ 求得连接节点 e_a、e_b 的 n 阶路径集 M_j^n为:

$$M_j^n=\hat{\boldsymbol{M}}_{aj}^n\wedge\widetilde{\hat{\boldsymbol{M}}_{bj}^n}=\boldsymbol{Q}_{1j}^n\wedge\widetilde{\boldsymbol{Q}_{2j}^n} \tag{7}$$

上述扩展方法满足连通性扩展、最小维度扩展及无回路规则,为使其满足必经节点规则,一方面要保证路径扩展更趋向于必经节点,另外也需跟踪路径中当前包含的必经节点,当其满足必经节点规则时,则返回当前路径.进而定义计算矩阵的更新方法对矩阵中的路径进行动态更新与跟踪,实现必经节点的计算与判断.首先利用 meet 算子求解 $\boldsymbol{Q}^n$ 中所包含的必经节点,并将其与 $\boldsymbol{Q}^{n-1}$中的必经节点相对比,当 $\boldsymbol{Q}^n$ 中路径包含有新的必经节点时,则更新 $\boldsymbol{Q}^{n-1}$中的对应元素.$\boldsymbol{Q}^n$ 与 $\boldsymbol{Q}^{n-1}$中所含必经节点关系可通过并积(join)算子"$\cup$"进

行求解,假设 $\boldsymbol{Q}_{ij}^{n}$与 $\boldsymbol{Q}_{ij}^{n-1}$中所包含的必经节点集为 q_{ij}^{n}与 q_{ij}^{n-1},则计算矩阵的更新规则为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}_{ij}^{n}=\boldsymbol{Q}_{ij}^{n}+\boldsymbol{Q}_{ij}^{n-1}, grade(q_{ij}^{n}\cup q_{ij}^{n-1})>\max(grade(q_{ij}^{n}), grade(q_{ij}^{n-1})) \\ \boldsymbol{Q}_{ij}^{n}=\boldsymbol{Q}_{ij}^{n-1}, \\ \boldsymbol{Q}_{ij}^{n}=Q_{ij}^{n}, grade(q_{ij}^{n}\cup q_{ij}^{n-1})=grade(q_{ij}^{n}) \end{cases} \tag{8}$$

即当 q_{ij}^{n}与 q_{ij}^{n-1}并积维度大于二者中维度较大者时(图 3(a),3(b)),直接将新求得路径并入原始计算矩阵中;当并积的维度与 q_{ij}^{n-1}的维度相等时,取 $\boldsymbol{Q}_{ij}^{n-1}$中的路径为最优路径(图 3($c$));当并积的维度与 q_{ij}^{n}的维度相等时,取新求得的路径为最优路径(图 3(d)).

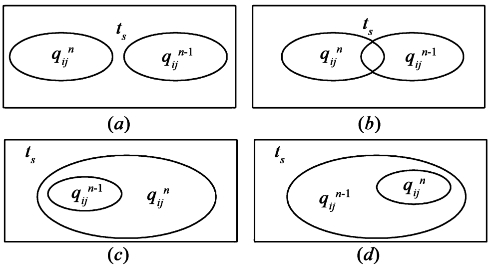


图3　必经节点的包含关系

基于几何代数的节点型约束最短路径算法在路径运算规则中嵌入最优求解的约束规则,在计算过程中即删掉不满足约束规则的路径,因而可滤除大量不必要的遍历,从而大幅降低运算复杂度,基于首尾节点同时进行路径扩展运算,也可将算法效率进一步提升.现以图 2 中网络为例,说明上述算法的计算过程:

求解:网络中起点和终点分别为 e_3 和 e_5,必经节点 e_1, e_4 的弧段最短路径

(1)据网络的连通关系,初始化邻接矩阵 $\boldsymbol{M}^1$,具体见图 2.

(2)据起止点 A、F,计算矩阵可初始化为:

$$\boldsymbol{Q}^1=\begin{pmatrix} 0 & e_3e_2 & 0 & 0 & 0 & e_3e_6 \\ e_5e_1 & 0 & 0 & e_5e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)基于外积进行路径延拓,求得:

$$\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{Q}^1\wedge\boldsymbol{M}^1=\begin{pmatrix} e_3e_2e_1 & e_3e_6e_2 & 0 & e_3e_2e_4+e_3e_6e_4 & 0 \\ e_5e_4e_1 & e_5e_1e_2+e_5e_4e_2 & 0 & e_5e_1e_4 & 0 \end{pmatrix}$$

据路径集的更新规则:

$$\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{Q}^1\wedge\boldsymbol{M}^1=\begin{pmatrix} e_3e_2e_1 & e_3e_2 & 0 & e_3e_2e_4+e_3e_6e_4 & 0 \\ e_5e_4e_1 & e_5e_1e_2+e_5e_4e_2 & 0 & e_5e_1e_4 & 0 \end{pmatrix}$$

进而求得路径集:

$M_j^2=e_3e_2e_1\wedge e_1e_4e_5+e_3e_2\wedge(e_2e_1e_5+e_2e_4e_5)+(e_3e_2e_4+e_3e_6e_4)\wedge e_4e_1e_5+e_3e_6\wedge e_6e_4e_5=e_3e_2e_1e_4e_5+e_3e_2e_4e_1e_5+e_3e_6e_4e_1e_5$,由于式中已包含必经节点 e_1, e_4,则 $e_3e_2e_1e_4e_5$、$e_3e_2e_4e_1e_5$、$e_3e_6e_4e_1e_5$ 即为所求最短路径.

3.3　网络存储结构设计

由于网络结构的各组分具有相同的表达与运算结构,可先抽象出多重向量类 Multivector 作为基类,并定义相关的运算与算子,进而设计节点、弧段、路径、路径集四种继承类,对各结构的具体方法加以实现,定义类 Crosslist,存储计算过程中的邻接矩阵(图 4).由于道路网络各节点相连的弧段数量较少,因此结合邻接表和邻接矩阵的优点,采用十字链表的方式对网络进行存储,在链表中直接存储几何代数多重向量,既保留了矩阵的特性又节省了存储空间.图 5 所示为十字链表结构及其同节点表、弧段表及路径表的链接关系,其中节点表存储点的 ID 与点的坐标;弧段表存储弧段的 ID 以及起始点和终止点;路径表存储该条路径所经过的弧段集以及所经过的必经节点集;路径集存储同一目标下的多条路径;十字链表结构则存储计算矩阵与表征网络结构的邻接矩阵.

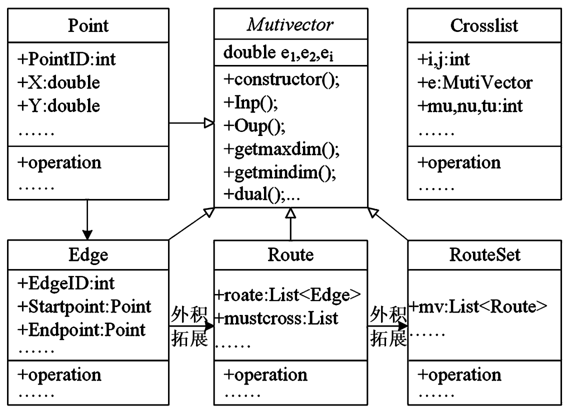


图4　数据结构设计

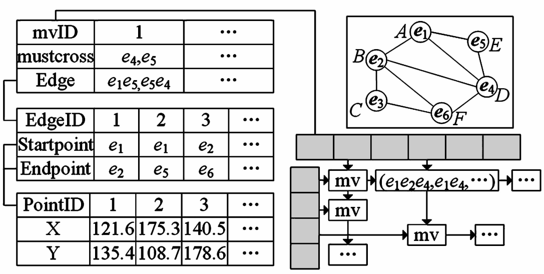


图5　拓扑关系建立与存储

4　算法实现与案例验证

4.1　节点约束最短路径算法实现

基于几何代数的节点型约束最短路径的计算流程如图 6,该算法通过外积运算扩展维度,并利用 meet 和 join 等算子进行路径必经节点的求解与判断,最终求得经过所有必经节点,且经过节点数最小的最优路径.算法的主要流程分述如下:

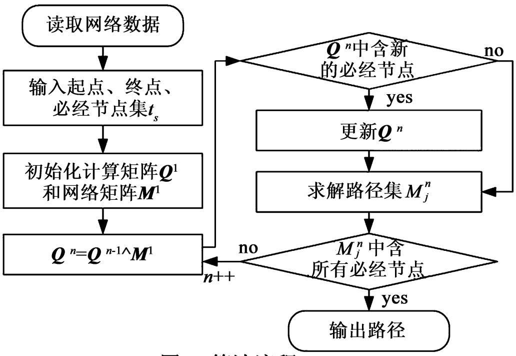
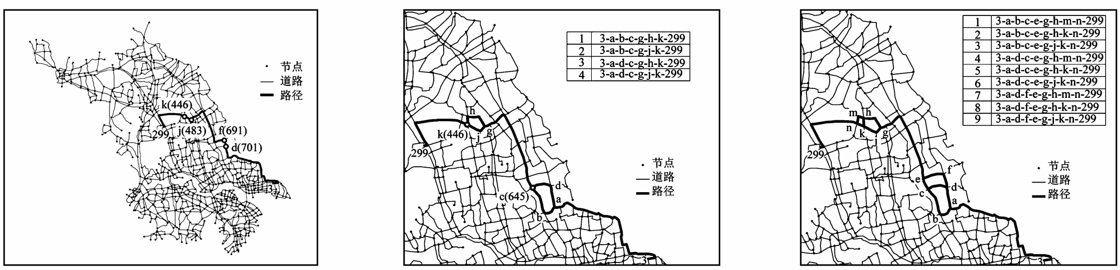


图6 算法流程

(1)利用现有网络产生网络矩阵 M^1;(2)指定起点、终点,生成计算矩阵 Q^1,指定必经的节点集 t_s;(3)利用计算矩阵 Q^{n-1}和网络矩阵 M^1 进行外积运算,求得 Q^n,由于一次外积运算只向外拓延一次,可保证当满足条件的路径第一次出现,它即成为弧段最短路径;(4)据式(8)对 Q^n 以及 Q^{n-1}进行更新,保留经过更多必经节点的路径;(5)计算当前阶次的路径集 M_j^n,并判断其数包含的必经节点是否涵盖了所有的必经节点,如果满足上述条件,输出满足条件的结果,否则重复(3)、(4)步,直到产生符合条件的路径为止.

4.2 案例验证

基于 CAUSTA 系统[16]对上述路径搜索算法加以实现,并利用江苏省道路网数据进行了验证,该数据共有925 个节点,1469 条弧段,在道路网的基础上,假设起点 *ID* 为 3,终点为 299,验证结果如图 7 所示.如图在道路网上寻找起点 3 到终点 299 的路径,当无必经节点约束时,共找到 9 条节点数最少的路径,当必经节点设置为645 和 446 时,共找出两条符号要求的路径;当必经节点设置为 701、691、446 和 483 时,共找到一条符合要求的路径.将上述结果与通过穷举法逐条路径排查的结果相对比,验证了本文算法求解结果的正确性.



(*a*) 原始网络数据与包含四个必经节点结果(1条)　(*b*) 包含两个必经节点结果(4条)　(*c*) 无必经节点结果(9条)

图7 结果验证

4.3 算法复杂度分析

基于几何代数的必经节点路径搜索算法中主要的运算复杂度来自于矩阵的外积运算.设两个矩阵分别为 $m\times n$,$n\times n$,常规的矩阵乘法的算法复杂度为 $O(m\times n^2)$.Strassen 采用了类似于在大整数乘法中使用的分治技术,将计算 2 个 n 阶矩阵乘积所需的计算时间改进到 $O(n^{\log 7})=O(n^{2.81})$,并建议将非 N 阶方阵转化为 N 阶方阵进行计算.在本文算法中,由于采用了十字链表矩阵运算,其运算次数远小于 $m\times n^2$ 和 $O(n^{2.81})$.

假设计算矩阵中非零元数为 δ_Q,网络矩阵中非零元数为 δ_M,累加器初始化时间复杂度为 $O(2n)$,矩阵外积计算复杂度为 $O(\delta_Q\times\delta_M/n)$.在大规模网络中,必经节点个数相对于总体节点数而言相对较小,既运算次数 $<<n$,可不考虑,复杂度记为 $O(2n)$,一次矩阵外积总的复杂度为 $O(2n+\delta_Q\times\delta_M/n)$,矩阵外积次数与起始点选取的情况和必经节点选取有关,最少为 1,最多为 n,这里取中位数 $n/2$.因此,总的时间复杂度为 $O(n^2+\delta_Q\times\delta_M/2n^2)$.在道路网络最常见的是二岔口、三岔口和十字路口,对于每个节点一般情况有 2~4 个邻接节点,因此网络矩阵和计算矩阵必定是极其稀疏的矩阵,δ_Q/n^2 和 δ_M/n^2 远小于 0.05.因此对于道路网络,其算法复杂度可以表示为 $O(n^2)$.孙全[17]提出了 DAG-EN 算法用于计算节点型约束的最短路径,通过必经节点的权值标定将问题转化为权值最大的简单有向路径的求解,其算法复杂度为 $O(CnE)$(其中 C 为遍历次数,E 为弧段数),对于一般道路网络,通常有 $E>n$.在现实网络中,本文算法(复杂度为 $O(n^2)$)仍有优势.

5 结论

本文利用几何代数进行网络表达与计算,进而设计了节点型约束的最短路径算法.结果显示该算法具有直观、简单等特点,相比于传统网络分析的运算思路,该方法通过网络运算规则的确定,使其在路径扩展计算过程中,即可进行回路、必经节点等约束条件的判断,从而减少大量的无效计算,提高了算法的效率,同时也为多约束及动态约束网络的最优路径求解提供基础.由于几何代数运算的独立性,该算法可以进一步拓展到多起点、终点的最短路径计算,并且对于约束节点越多的最短路径求解问题,相比传统算法优势越明显,因此适宜大规模网络的运算.本文的后续研究是充分

发挥几何代数的运算优势,研究包括权值、语义、数值等在内的多约束网络分析算法.

参考文献

[1] 林澜,闫春钢,等.基于稳定分支的变权网络最优路径算法[J].电子学报,2006,34(7):1222 – 1225.
Lin Lan,Yan Chungang,et al.Optimal path algorithm in varying-weight networks based on stable branch[J].Acta Electronica Sinica,2006,34(7):1222 – 1225.(in Chinese)

[2] 曹政才,等.面向城市交通网络的一种新型动态路径寻优方法[J].电子学报,2012,40(10):2043 – 2067.
Cao Zhengcai,et al.A novel dynamic path optimization method for urban traffic networks[J].Acta Electronica Sinica,2012,40(10):2043 – 2067.(in Chinese)

[3] 郑年波,陆峰,李清泉,等.顾及转向延误的时间依赖 A* 最短路径算法[J].测绘学报,2010,39(5):534 – 539.
Zheng Nianbo,Lu Feng,Li Qingquan,et al.The adaption of A* algorithm for least-time paths in time-dependent transportation networks with turn delays[J].Acta Geodaeticaet Cartographica Sinica,2010,39(5):534 – 539.(in Chinese)

[4] 王晟,李乐民.一种改进的多约束最佳路径算法研究[J].电子学报,2004,32(4):529 – 535.
Wang Sheng,Li Lemin.An enhanced algorithm for multiple constraints optimal path calculation[J].Acta Electronica Sinica,2004,32(4):529 – 535.(in Chinese)

[5] 杨雅君,高宏,李建中.多维代价图模型上最优路径查询问题的研究[J].计算机学报,2012,35(10):2147 – 2158.
Yang Yajun,Gao Hong,LI Jianzhong.Optimal path query based on cost function over muti-cost graphs[J].Chinese Journal of Computers,2012,35(10):2147 – 2158.(in Chinese)

[6] 于德新,等.重大灾害条件下基于 GIS 的最短路径改进算法[J].交通运输工程学报,2011,11(4):123 – 126.
Yu De-xin,et al.Shortest path improved algorithm based on GIS under large-scale disaster[J].Journal of Traffic and Transportation Engineering,2011,11(4):123 – 126.(in Chinese)

[7] Yuan Linwang,Yu Zhaoyuan,Luo Wen,et al.A 3D GIS spatial data model based on conformal geometric algebra[J].Sci China Earth Sci.,2011,54(1):101 – 112.

[8] Yuan L W,Lü G N,Luo W,et al.Geometric algebra method for multidimensionally-unified GIS computation[J].Chinese Science Bulletin,2012,57(7):802 – 811.

[9] 谢维信,等.基于 Clifford 代数的混合型传感器网络覆盖理论分析[J].中国科学(E),2007,37(8):1018 – 1031.
Xie Weixin,et al.Coverage analysis for sensor networks based on Clifford algebra[J].Science in China (Series F:Information Sciences),2008,51(5):460 – 475.(in Chinese)

[10] Zhang Jiyi,Yuan Linwang,et al.Shortest path algorithm in GIS network analysis based on Clifford algebra[A].Proceedings of 2nd ICFCC[C].Wuhan:IEEE,2010.432 – 436.

[11] Staples G S,Schott R.Dynamic geometric graph processes:Adjacency operator approach[J].Advances in Applied Clifford Algebras,2010,20:893 – 921.

[12] Yu Zhaoyuan,Yuan Linwang,Luo Wen.Clifford algebra and GIS spatial analysis algorithms the case study of geographical network and voronoi analysis[A].Procedings of GraVisMa[C].Brno:EUROGRAPHICS,2010.155 – 158.

[13] 陆峰.最短路径算法:分类体系与研究进展[J].测绘学报,2001,30(3):269 – 275.
Lu Feng.Shortest path algorithms:Taxonomy and advance in research[J].Acta Geodaetica Cartographica Snica,2001,30(3):269 – 275.(in Chinese)

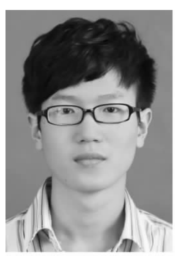
[14] 卢锡城,白建军,等.一种基于分时的 LEO 卫星网络无环路由算法[J].通讯学报,2005,26(5):9 – 16.
Lu Xicheng,Bai Jianjun,et al.Discrete time based loop-free routing algorithm for LEO satellite networks[J].Journal on Communications,2005,26(5):9 – 16.(in Chinese)

[15] Dorst L,Fontijne D,Mann S.Geometric Algebra for Computer Science:An Object-Oriented Approach to Geometry[M].San Fransisco:Morgan Kaufmann Publishers,2007.

[16] Yuan L W,Yu Z Y,Chen S F,et al.CAUSTA:Clifford algebra based unfied spatio-temporal analysis[J].Transactions in GIS,2010,14(s1):59 – 83.

[17] 孙全.满足指定节点约束的路由算法[J].计算机工程与应用,2005,(16):3 – 5.
Sun Quan.Routing algorithm satisfying explicit node constraint[J].Computer Engineering and Applications,2005,(16):3 – 5.(in Chinese)

作者简介



冯琳耀 男,1990 年生于山西运城.南京师范大学虚拟地理环境教育部重点实验室硕士研究生.研究方向为地理信息系统算法.
E-mail:fenglinyao@gmail.com

袁林旺(通信作者) 男,1973 年生于江苏海安,博士,南京师范大学教授,博士生导师,研究方向为地理信息系统理论与方法.
E-mail:yuanlinwang@njnu.edu.cn