MTL 代数语义上逻辑公式的概率真度

左卫兵
(华北水利水电大学数学与信息科学学院,河南郑州 450046)

摘 要: 基于 L-赋值理论,通过在 MTL 代数赋值格和全体公式集上分别建立概率测度,利用积分方法提出了 MTL 代数语义上公式的概率真度.证明了概率真度的 MP 规则、HS 规则及交推理规则;同时引入公式间的概率相似度和伪距离,建立了概率逻辑度量空间.将计量逻辑学中的相关理论推广到基于 MTL 代数语义的格值逻辑上,使得在格值逻辑上进行程度化推理成为可能.

关键词: MTL 代数; L-赋值; 概率真度; 概率逻辑度量空间; 程度化推理

中图分类号: O141.1, O189.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)02-0293-06

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.02.014

Probability Truth Degrees of Formulas in MTL-Algebras Semantics

ZUO Wei-bing

(*College of Mathematics and Information Science*, *North China University of Water Resources and Electric Power*, *Zhengzhou*, *Henan* 450046, *China*)

Abstract: Based on L-evaluation theory and by defining probability measure in MTL-algebra evaluation lattice and set of all formulas respectively, the concept of probability truth degree of formulas in MTL-algebras semantics is introduced by the integral method. The MP rule, HS rule and meet inference rules of probability truth degree are proved. At the meantime, the concept of probability similarity degree and pseudo-distances between formulas are introduced and the probability logic metric space is built. The theory of quantitative logic is expanded to lattice-valued logic based on MTL-algebra semantics, which makes it possible in graded reasoning in lattice-valued logic.

Key words: monoidal t-norm based logic algebra; lattice valued evaluation; probability truth degree; probability logic metric space; graded reasoning

1 引言

数理逻辑的特点在于形式化而不是数值计算,为了反映程度化的思想,二十世纪 50 年代初,Rosser 教授利用"指派真值"来反映逻辑公式和逻辑推理的真实程度[1],这种思想在 Pavelka 的系列文章[2]中得到了全面的发展.90 年代以来逻辑概念程度化的研究有了进一步发展,取得了许多成果[3~8],其中[4]基于均匀概率的思想首先提出了命题逻辑系统中公式的真度概念和逻辑度量空间理论,逐步形成了计量逻辑学[8,9],为逻辑系统的程度化推理提供了新方法,并引发了大量后续研究[10~14].

我们知道,经典逻辑、多值逻辑和模糊逻辑系统的赋值域均是线性格即链,链中任何元素均可比较大小(在偏序意义下),这样的逻辑系统自然有其优越性,但也表现出与现实中赋值存在不可比较性相悖的缺点.事实上,以格为赋值集的逻辑系统早已有之[9],文献[15,16]研究了基于格蕴涵代数的格值逻辑上的推理理论,文献[17]研究了一种剩余格值逻辑系统的完备性,等.一个自然的想法是,如何将上述计量化的思想推广到格值逻辑,从而在格值逻辑中建立类似的真度理论?事实上,文献[18]在有限 Boole 代数为赋值格的格值逻辑上通过定义有限 Boole 代数中元素的"级"的方法,提出了基于有限 Boole 语义的经典命题逻辑中公式的真度的概念,从而尝试性地将计量化的思想引入到格值逻辑之中.然而值得注意的是,这种真度理论是基于有限赋值格而设计的,因而无法适用于一般的格值逻辑.文献[19,20]基于概率空间通过积分的方法分别在 Boole 代

收稿日期:2013-08-23;修回日期:2014-08-25;责任编辑:马兰英
基金项目:国家自然科学基金(No.11201145);河南省教育厅自然科学基金(No.13A110719);河南省教育厅人文社会科学研究项目(No.2013-QN-295)

数赋值格和 MV 代数赋值格上提出了格值逻辑计量化的新方法,为格值逻辑的计量化做了很好的尝试.

另外,文献[21]建立了基于左连续 t-模的模糊逻辑系统 MTL,相应地提出了 MTL 代数理论,Boole 代数、MV 代数、BL 代数以及 R_0 代数(NM 代数)等均可看成是 MTL 代数的特例.因此作为上述工作的继续,本文研究以 MTL 代数为赋值格的逻辑系统的计量化.通过在 MTL 代数到标准 MV 代数上的全体态射集上定义概率空间,利用积分方法定义了 MTL 代数中元素的特征数,借助特征数的概念定义了 MTL 代数语义上公式的概率真度;进一步在 MTL 代数语义上建立概率逻辑度量空间,将计量逻辑学中近似推理方法推广到 MTL 代数语义上,为 MTL 代数语义的概率计量化提供了一种可行的方法.

2 基础知识

定义 1[21] MTL 代数是一个(2,2,2,2,0,0)型代数 $L=(L,\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow,0_L,1_L)$满足条件:

($M1$)$(L,\wedge,\vee,0_L,1_L)$是有界格,

($M2$)$(L,\otimes,1_L)$是以 1_L 为单位的交换半群,

($M3$)$x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\rightarrow z$, $\forall x,y,z\in L$,

($M4$)$(x\rightarrow y)\vee(y\rightarrow x)=1_L$.

设 L 是 MTL 代数,任给 $x\in L$ 可定义 $x^-=x\rightarrow 0$.如果 $x^{--}=x$,称 L 为 IMTL 代数;如果 L 满足 $x\wedge y=x\otimes(x\rightarrow y)$,称 L 为 BL 代数;如果 L 既是 IMTL 代数又是 BL 代数,称 L 为 MV 代数;如果 L 满足 $((x\otimes y)\rightarrow 0)\vee((x\wedge y)\rightarrow(x\otimes y))=1$ 和 $x^{--}=x$,称 L 为 R_0 代数(即 NM 代数).

命题 1[21] 设 L 是 MTL 代数,则

(1)$x\leqslant y$ 当且仅当 $x\rightarrow y=1_L$.

(2)$x\leqslant x^{--}$, $x\leqslant y\rightarrow x$.

(3)若 $x\leqslant y$,则 $y\rightarrow z\leqslant x\rightarrow z$, $z\rightarrow x\leqslant z\rightarrow y$.

(4)$(x\otimes y)\rightarrow z=x\rightarrow(y\rightarrow z)$.

(5)$x\rightarrow y\leqslant y^-\rightarrow x^-$.

(6)$x\leqslant(x\rightarrow y)\rightarrow y$.

(7)$(x\otimes y)^-=x\rightarrow y^-$.

(8)$x^{---}=x^-$.

设 $L=[0,1]$为 MTL 代数,称为标准 MTL 代数.标准 MTL 代数上的$\otimes$均是左连续的三角模,与之相伴随的蕴涵算子$\rightarrow$为正则蕴涵算子.常用的几种三角模:

$x\otimes_G y=x\wedge y$, $x\otimes_\Pi y=x\times y$, $x\otimes_L y=(x+y-1)\vee 0$, $x\otimes_0 y=\begin{cases}x\wedge y, & x+y>1\\ 0, & x+y\leqslant 1\end{cases}$

都是左连续的三角模,分别称为 Godel 三角模、乘积三角模、Lukasiewicz 三角模和 R_0 三角模,与它们各自相伴随的蕴涵算子分别为:$x\rightarrow_G y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ y, & x>y\end{cases}$, $x\rightarrow_\Pi y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ \frac{y}{x}, & x>y\end{cases}$, $x\rightarrow_L y=(1-x+y)\wedge 1$, $x\rightarrow_0 y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ (1-x)\vee y, & x>y\end{cases}$.依次称为 Godel 蕴涵算子、Goguen 蕴涵算子、Lukasiewicz 蕴涵算子和 R_0 蕴涵算子.

设 L 是 MTL 代数,$[0,1]_{MV}$是标准 MV 代数,用 Θ 表示从 L 到$[0,1]_{MV}$的全体态射之集.由文献[22]知,若 L 有极大 MV 滤子则 $\Theta\neq\varnothing$.从而 $\forall f\in\Theta$ 有 $f(x\rightarrow y)=f(x)\rightarrow_L f(y)$, $f(x\wedge y)=\min\{f(x),f(y)\}$, $f(1_L)=1$, $f(0_L)=0$, $x,y\in L$.本文以下部分假定 MTL 代数 L 存在极大 MV 滤子.

命题 2 设 $f\in\Theta$, $x,y\in L$,则

(1)$f(x^-)=1-f(x)$, $f(x)=f(x^{--})$.

(2)$x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$.

(3)$f(x)+f(y)=f(x\wedge y)+f(x\vee y)$.

(4)$f(x\rightarrow y)=f(x\wedge y)-f(x)+1$.

(5)$f(x)+f(x\rightarrow y)=f(y)+f(y\rightarrow x)$.

(6)$f(x\otimes y)=1-f(x\rightarrow y^-)$.

(7)$f(x)+f(y)=f(x\otimes y)+f(y^-\rightarrow x)$.

设 $S=\{q_1,q_2,\cdots\}$为原子公式集,$F(S)$是由 S 生成的$(\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow)$型自由代数,称 $F(S)$中的元为命题(或公式).

定义 2 (1)设 L 是 MTL 代数,则称$(\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow)$型同态 $\upsilon: F(S)\rightarrow L$ 为 $F(S)$的 L-赋值.$F(S)$的 L-赋值的全体之集记为 Ω.(2)设 $A\in F(S)$,若 $\forall\upsilon\in\Omega$ 恒有 $\upsilon(A)=1_L$,则称 A 为 L-重言式;若 $\forall\upsilon\in\Omega$ 恒有 $\upsilon(A)=0_L$,则称 A 为 L-矛盾式.由 $F(S)$是由 S 生成的自由代数知 υ 由它在 S 上的限制所完全决定.

3 MTL 代数语义中公式的概率真度

设(Θ,Δ,θ)是均匀概率测度空间,这里 Δ 是 Θ 上的 σ-代数,θ 是 Θ 上的均匀概率测度.$\forall x\in L$,定义函数 $x(f)=f(x)$, $f\in\Theta$,则函数 x 是(Θ,Δ,θ)上的可测函数,从而函数 x 是 Θ 上的 θ-可积函数[23].

定义 3 定义 $\varphi: L\rightarrow[0,1]$如下

$$\varphi(x)=\int_\Theta x(f)\mathrm{d}\theta, x\in L \tag{1}$$

则称 $\varphi(x)$为 x 的特征数.

注 1 (1)考虑菱形格 M,即 $M=\{0,a,b,1\}$,其中 $a^-=b$, $b^-=a$, $0^-=1$, $1^-=0$, $a\vee b=1$, $a\wedge b=0$,则 M 是 Boole 代数,从而 M 是 MTL 代数.易证 $\Theta=\{f_1,f_2\}$,其中 $f_1(a)=f_2(b)=1$, $f_1(b)=f_2(a)=0$, $f_i(1)=1$, $f_i(0)=0$, $i=1,2$.由 θ 是 Θ 上的均匀概率测度知,

$\theta(f_1)=\theta(f_2)=\frac{1}{2}$,计算得 $\varphi(1)=1,\varphi(0)=0,\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{1}{2}$.

(2)设 L 是任一 MV 代数,可知 $\Theta=\{f|f:L\to[0,1]$ 是 MV 代数同态$\}$,从而对于 MV 代数 L 中的元素 x,本文定义的 x 的特征数与文[20]中 MV 代数语义下定义的 x 的特征数是相等的.

(3)设 L 是标准 MTL 代数,由于 $\Theta=\{f\}$,其中 $f(x)=x,x\in[0,1]$,从而 $\forall x\in[0,1]$有 $\varphi(x)=f(x)=x$. 说明特征数的概念是数的概念在 MTL 代数上的推广.

命题 3　(1) $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1,x\in L$.

(2)$\varphi(1_L)=1,\varphi(0_L)=0$.

(3)$\varphi(x^-)=1-\varphi(x)$.

(4)若 $x\leqslant y$,则 $\varphi(x)\leqslant\varphi(y),x,y\in L$.

(5)$\varphi(x\vee y)=\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x\wedge y)$.

(6)$\varphi(x\to y)=\varphi(x\wedge y)-\varphi(x)+1$.

(7)$\varphi(x)+\varphi(x\to y)=\varphi(y)+\varphi(y\to x)$.

(8)$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x\otimes y)+\varphi(y^-\to x)$.

定义 4　$\forall A\in F(S)$,定义广义函数 $\bar{A}:\Omega\to L$ 如下

$$\bar{A}(\upsilon)=\upsilon(A),\upsilon\in\Omega \tag{2}$$

设(Ω,Ξ,μ)是概率测度空间,这里 Ξ 满足:$\forall A\in F(S)$,$\varphi(\bar{A})$是可测函数,即$(\bar{A}\circ\varphi)^{-1}(B_{[0,1]})\subset\Xi$,其中 $B_{[0,1]}$是单位区间$[0,1]$上的 Borel 集合系. 则 $\forall A\in F(S)$,函数 $\varphi(\bar{A})$是 μ-可积的.

定义 5　$\forall A\in F(S)$,定义 $\tau:F(S)\to[0,1]$如下

$$\tau(A)=\int_\Omega\varphi(\bar{A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

称 $\tau(A)$为公式 A 的概率真度,又简称为 μ-真度.

注 2　(1)当赋值格是注 1(1)中菱形格 M,(Ω,Ξ,μ)是均匀概率测度空间时,易得 $\tau(q_1)=\frac{1}{2}$,$\tau(q_1\to q_2)=\frac{3}{4}$;(2)当赋值格 L 是 Boole 代数或 MV 代数时此定义即为文[18~20]中公式的概率真度的定义;当赋值格 L 是标准 MV 代数时,由注 1(3)知

$$\tau(A)=\int_\Omega\varphi(\bar{A}(\upsilon))\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\bar{A}(\upsilon)\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

为多值逻辑系统中公式的概率真度[24].

定理 1　设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$0\leqslant\tau(A)\leqslant 1$.

(2)A 是 L-重言式当且仅当$\tau(A)=1$,A 是 L-矛盾式当且仅当$\tau(A)=0$.

(3)若 $\vdash A\to B$,则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$.

(4)若 $A\approx B$,则 $\tau(A)=\tau(B)$.

(5)$\tau(\neg A)=1-\tau(A)$.

定理 2　设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$.

(2)$\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1$.

(3)$\tau(A)+\tau(A\to B)=\tau(B)+\tau(B\to A)$.

(4)$\tau(A)+\tau(B)=\tau(A\otimes B)+\tau(\neg B\to A)$.

由命题 3 易证,略.

在 MTL 代数语义中有相应于多值逻辑中程度化的 MP 规则、HS 规则和交推理规则.

定理 3　设 $A,B,C\in F(S)$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,则

(1)若 $\tau(A)\geqslant\alpha,\tau(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$,即 $\tau(B)\geqslant\tau(A)\otimes_L\tau(A\to B)$,也即 $\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\to_L\tau(B)$.

(2)若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$,即 $\tau(A\to C)\geqslant\tau(A\to B)\otimes_L\tau(B\to C)$.

(3)若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(A\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to B\wedge C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

证明　(1)由定理 2 的(2)得 $\tau(A)+\tau(A\to B)-1=\tau(A\wedge B)\leqslant\tau(B)$,即 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(2)在 MTL 代数 L 中下式成立[21],$\forall a,b,c\in L$,$(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to c))=1_L$. 则 $\forall\upsilon\in\Omega$ 有$(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))(\upsilon)=1_L$ 成立,从而,有 $\tau((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))=1$. 又 $\tau(B\to C)\geqslant\beta$,由本定理的(1)得 $\tau((A\to B)\to(A\to C))\geqslant 1+\beta-1=\beta$. 再利用一次本定理的(1)和 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha$,得 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(3)由定理 2 的(2)得 $\tau(A\to B\wedge C)=\tau(A\wedge B\wedge C)-\tau(A)+1=\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge C)-\tau(A\wedge(B\vee C))-\tau(A)+1\geqslant\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge C)-2\tau(A)+1\geqslant\tau(A\to B)+\tau(A\to C)-1\geqslant\alpha+\beta-1$.

推论 1　(1)若 $\tau(A)=\tau(A\to B)=1$,则 $\tau(B)=1$.

(2)若 $\tau(A\to B)=\tau(B\to C)=1$,则 $\tau(A\to C)=1$.

(3)若 $\tau(A\to B)=\tau(A\to C)=1$,则 $\tau(A\to B\wedge C)=1$.

4　MTL 代数语义上公式间的概率相似度

基于上述 MTL 代数语义中概率真度的概念和性质,下面引入公式间的概率相似度.

定义 6　设 $A,B\in F(S)$,定义 $\xi_i:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下

$$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A)) \tag{5}$$

$$\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A) \tag{6}$$

$$\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A)) \tag{7}$$

则称 $\xi_i(A,B)$为公式 A 与 B 之间的第 i 种概率相似度,简称 ξ_i-相似度($i=1,2,3$).

定理 4　$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1=1-\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)$.

证明 由(4.1)和定理 2(1)得 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-\tau((A\to B)\vee(B\to A))$,因为$(A\to B)\vee(B\to A)=1_L$,所以 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1$.

由定理 2(2)得 $\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1+\tau(A\wedge B)-\tau(B)+1-1=2\tau(A\wedge B)-\tau(A)-\tau(B)+1=1-\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B)$.

推论 2 设 $A,B\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A\vee B,A)=\tau(B\to A)$,$\xi_1(A\wedge B,A)=\tau(A\to B)$;(2)$\xi_1(A\to B,B)=\tau(A\vee B)$,$\xi_1(A\to B,A)\geq\tau(A\wedge B)$;(3)$\xi_1(A\to B,A\wedge B)=\tau(A)$,$\xi_1(A\to B,A\vee B)\geq\tau(B)$;(4)$\xi_1(A\vee B,A\wedge B)=\xi_1(A\to B,B\to A)=\xi_1(A,B)$.

定理 5 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_i(A,A)=1$,$\xi_i(A,B)=\xi_i(B,A)$,$(i=1,2,3)$.

(2)$\xi_i(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$,$(i=1,2)$;若 $A\approx B$ 则 $\xi_3(A,B)=1$,反之不然.

(3)$\xi_i(A,C)\geq\xi_i(A,B)\otimes_L\xi_i(B,C)$,$(i=1,2,3)$.

证明 (1)和(2)由定义 6 易证.

(3)对于 ξ_1,由定理 4 及定理 3 的(2),得 $\xi_1(A,C)=\tau(A\to C)+\tau(C\to A)-1\geq[\tau(A\to B)+\tau(B\to C)-1]+[\tau(C\to B)+\tau(B\to A)-1]-1=[\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1]+[\tau(B\to C)+\tau(C\to B)-1]-1=\xi_1(A,B)+\xi_1(B,C)-1$,即 $\xi_1(A,C)\geq\xi_1(A,B)\otimes_L\xi_1(B,C)$.

对于 ξ_2,由定理 3 的(2)知,$\tau(A\to C)\geq\tau(A\to B)\otimes_L\tau(B\to C)$及 $\tau(A\to C)\geq\tau(C\to B)\otimes_L\tau(B\to A)=\tau(B\to A)\otimes_L\tau(C\to B)$,再由 MV 代数的基本性质得

$$
\begin{aligned}
\xi_2(A,C)&=\tau(A\to C)\wedge\tau(C\to A)\\
&\geq(\tau(A\to B)\otimes_L\tau(B\to C))\wedge(\tau(B\to A)\otimes_L\tau(C\to B))\\
&=(\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A))\otimes_L(\tau(B\to C)\wedge\tau(C\to B))\\
&=\xi_2(A,B)\otimes_L\xi_2(B,C)
\end{aligned}
$$

对于 ξ_3,由 MV 代数的基本性质知,$\tau(A)\to_L\tau(C)\geq(\tau(A)\to_L\tau(B))\otimes_L(\tau(B)\to_L\tau(C))$及 $\tau(C)\to_L\tau(A)\geq(\tau(B)\to_L\tau(A))\otimes_L(\tau(C)\to_L\tau(B))$,所以

$$
\begin{aligned}
\xi_3(A,B)&=(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A))\\
&\geq((\tau(A)\to_L\tau(B))\otimes_L(\tau(B)\to_L\tau(C)))\wedge((\tau(B)\to_L\tau(A))\otimes_L(\tau(C)\to_L\tau(B)))\\
&=((\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A)))\otimes_L((\tau(B)\to_L\tau(C))\wedge(\tau(C)\to_L\tau(B)))\\
&=\xi_3(A,B)\otimes_L\xi_3(B,C)
\end{aligned}
$$

推论 3 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A\vee C,B\vee C)\geq\xi_1(A,B)$,$\xi_1(A\wedge C,B\wedge C)\geq\xi_1(A,B)$.

(2)$\xi_1(A\to C,B\to C)\geq\xi_1(A,B)$,$\xi_1(C\to A,C\to B)\geq\xi_1(A,B)$.

(3)$\xi_1(A\otimes C,B\otimes C)\geq\xi_1(A,B)$.

推论 4 设 $A,B,C,D\in F(S)$,则

(1)$\xi_1(A\wedge C,B\wedge D)\geq\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$.

(2)$\xi_1(A\vee C,B\vee D)\geq\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$.

(3)$\xi_1(A\to C,B\to D)\geq\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$.

(4)$\xi_1(A\otimes C,B\otimes D)\geq\xi_1(A,B)+\xi_1(C,D)-1$.

三种概率相似度有如下关系.

定理 6 设 $A,B\in F(S)$,则 $\xi_1(A,B)\leqslant\xi_2(A,B)\leqslant\xi_3(A,B)$.

证明 由定理 4 知,$\xi_1(A,B)=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1\leqslant\tau(A\to B)$,又 $\xi_1(A,B)\leqslant\tau(B\to A)$,从而 $\xi_1(A,B)\leqslant\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)=\xi_2(A,B)$.

由定理 3 的(1)知,$\tau(A\to B)\leqslant\tau(A)\to_L\tau(B)$,同样 $\tau(B\to A)\leqslant\tau(B)\to_L\tau(A)$.所以 $\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)\leqslant(\tau(A)\to_L\tau(B))\wedge(\tau(B)\to_L\tau(A))=\xi_3(A,B)$.

更进一步有:

定理 7 设 $A,B\in F(S)$,则 $\xi_2(A,B)=\frac{1}{2}(\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B))$.

证明 由定理 4 及定理 2 的(2),利用 $\alpha\wedge\beta=\frac{1}{2}((\alpha+\beta)-|\alpha-\beta|)$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,有 $2\xi_2(A,B)=2\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A))-|\tau(A\to B)-\tau(B\to A)|=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1)+1-|(\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1)-(\tau(A\wedge B)-\tau(B)+1)|=\xi_1(A,B)+1-|\tau(A)-\tau(B)|=\xi_1(A,B)+\xi_3(A,B)$.定理得证.

5 MTL 代数语义上的概率逻辑度量空间

基于上述三种概率相似度可自然地在 $F(S)$上引入逻辑伪度量.

定义 7 定义 $\rho_i:F(S)\times F(S)\to[0,1]$如下

$$\rho_i(A,B)=1-\xi_i(A,B),A,B\in F(S),i=1,2,3 \quad (8)$$

则由定理 5 知 ρ_i 是 $F(S)$上的伪度量,称$(F(S),\rho_i)$是 MTL 代数语义上的第 i 种概率逻辑度量空间,简称 ρ_i-度量空间.

定理 8 设 $A,B,C\in F(S)$,$i=1,2,3$,则

(1)$\rho_i(A,A)=0$,$0\leqslant\rho_i(A,B)\leqslant1$,$\rho_i(A,B)=\rho_i(B,A)$.

(2)$\rho_i(A,B)=\rho_i(\neg A,\neg B)$,$\rho_i(A,C)\leqslant\rho_i(A,B)+\rho_i(B,C)$.

(3)$\rho_1(A,B)=\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)=2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)$.

(4)$\rho_3(A,B)=\tau(A)\vee\tau(B)-\tau(A)\wedge\tau(B)=|\tau$

$(A)-\tau(B)|$.

(5) $\rho_3(A,B)\leqslant\rho_2(A,B)\leqslant\rho_1(A,B),\rho_2(A,B)=\frac{1}{2}(\rho_1(A,B)+\rho_3(A,B))$.

下面我们讨论逻辑运算$\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\otimes$等在随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_i)$上的一致连续性.

定理 9　随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_1)$上运算$\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\otimes$都是一致连续的.

证明　由定义 7、定理 8 和推论 4 易证,略.

定理 10　在 $F(S)$上 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量.

证明　因为$\forall A,B\in F(S)$,$\rho_2(A,B)\leqslant\rho_1(A,B)$,为证 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量,只需证当$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(A_n,B_n)=0$时有$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,B_n)=0$.事实上,由定理 8(5)知 $\rho_3(A_n,B_n)\leqslant\rho_2(A_n,B_n)$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_3(A_n,B_n)=0$;又 $\rho_1(A_n,B_n)=2\rho_2(A_n,B_n)-\rho_3(A_n,B_n)$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(A_n,B_n)=0$.即在 $F(S)$上 ρ_1 与 ρ_2 是等价的伪度量.

推论 5　伪度量空间$(F(S),\rho_2)$上运算$\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\otimes$都是一致连续的.

定理 11　伪度量空间$(F(S),\rho_3)$上运算$\neg$是一致连续的,但$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\otimes$关于 ρ_3 未必连续.

证明　仅举例说明$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\otimes$关于 ρ_3 不连续.设$M=[0,1]_{\mathrm{MV}}$,μ 是均匀概率测度,令 $A=q_1,B=q_2,C=D=q_3$,可见 $\rho_3(A,C)=\rho_3(B,D)=0$,但 $\rho_3(A\vee B,C\vee D)=\rho_3(q_1\vee q_2,q_3)>0$,$\rho_3(A\wedge B,C\wedge D)=\rho_3(q_1\wedge q_2,q_3)>0$,$\rho_3(A\rightarrow B,C\rightarrow D)=\rho_3(q_1\rightarrow q_2,1)>0$,即$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$关于 ρ_3 不连续;又令 $A=q_1,B=q_2,C=q_3,D=\neg q_3$有 $\rho_3(A,C)=\rho_3(B,D)=0$,但,$\rho_3(A\otimes B,C\otimes D)=\rho_3(q_1\otimes q_2,0)>0$,从而$\otimes$关于 ρ_3 不连续.

下面初步研究 MTL 代数语义中理论的发散度及近似推理理论.

定义 8　设 Γ 是 $F(S)$中的理论,即 $\Gamma\subset F(S)$,令

$$div_i(\Gamma)=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\},i=1,2,3,\tag{9}$$

称 $div_i(\Gamma)$为理论 Γ 的第 i 种概率发散度,简称 i-发散度.

定理 12　设 $\Gamma\subset F(S)$,则 $div_1(\Gamma)=div_2(\Gamma)=div_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$.

证明　设 $T=\{A\mid\tau(A)=1\}$为全体 L-重言式之集,对于 $\Gamma\subset F(S)$,若 $A\in T$ 则$A\in D(\Gamma)$,从而 $div_i(\Gamma)=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}=\sup\{\rho_i(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}$.所以,由定理 8 得

$$\begin{aligned}div_1(\Gamma)&=\sup\{\rho_1(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{1-\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}div_3(\Gamma)&=\sup\{\rho_3(A,B)\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{|\tau(A)-\tau(B)|\mid A\in T,B\in D(\Gamma)\}\\&=\sup\{1-\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}.\end{aligned}$$

即 $div_1(\Gamma)=div_3(\Gamma)=1-\inf\{\tau(B)\mid B\in D(\Gamma)\}$,再由定理 8(5)利用两边夹定理可得结论成立.

可见在三个$(F(S),\rho_i)$上有相同的理论发散度,统一表示为 $div(\Gamma)$.若 $div(\Gamma)=1$,称 Γ 是全发散的.

定义 9　设 Γ 是 $F(S)$中的理论,$B\in F(S)$,$\varepsilon>0$.

(1)若 $\rho(B,D(\Gamma))=\inf\{\rho_1(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 I-型误差小于ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

(2)若 $1-\sup\{\tau(A\rightarrow B)\mid A\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 II-型误差小于ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(3)若 $\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset F(S),\Sigma\vdash B\}<\varepsilon$,则称 B 为 Γ 的 III-型误差小于 ε 的结论,简记为 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$.这里 H 是 $P(F(S))-\{\varnothing\}$上的 Hausdroff 距离.

定理 13　设 Γ 是 $F(S)$中的理论,$A\in F(S)$,$\varepsilon>0$,则

(1) $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$当且仅当 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(2)若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,$A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

证明　(1)(必要性)设 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,由定义 9 的(1)知存在 $C\in D(\Gamma)$使得 $\rho_1(A,C)<\varepsilon$,又由 $\rho_1(A,C)=2-\tau(A\rightarrow C)-\tau(C\rightarrow A)\geq 1-\tau(C\rightarrow A)$,所以 $1-\sup\{\tau(B\rightarrow A)\mid B\in D(\Gamma)\}\leqslant 1-\tau(C\rightarrow A)<\varepsilon$.因此 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

(充分性)设 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$,则存在 $C\in D(\Gamma)$使得 $1-\tau(C\rightarrow A)<\varepsilon$,由 $C\rightarrow(C\vee A)$为 L-重言式及 MP 规则可知 $C\vee A\in D(\Gamma)$.又 $\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\rightarrow A)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant\rho_1(A,C\vee A)=1-\tau(C\rightarrow A)<\varepsilon$,得证.

(2)若 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则存在 $\Sigma_0\subset F(S)$使得 $\Sigma_0\vdash A$ 且 $H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,这时 $A\in D(\Sigma_0)$,所以 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\varepsilon$,即 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.由(1)知后者也成立.

6　结束语

本文基于 L-赋值理论利用测度论和积分方法提出了 MTL 代数赋值格命题逻辑中公式的概率真度,研究了 MTL 代数语义上的计量逻辑学的有关性质,建立了 MTL 代数语义上逻辑公式的真度理论,为进一步在 MTL 代数语义上进行近似推理提供了可能的框架,有关工作另文研究.同时非可换逻辑及其代数结构成为逻辑学研究的一个新的热点,如何将概率计量方法应用到非可换逻辑及其代数为赋值格的格值逻辑上将是我们研究的另一个重点.

参考文献

[1] Rosser J B, Turquette A R. Many-Valued Logics[M]. Amsterdam: North-Holland, 1952. 46 – 66.

[2] Pavelka J. On fuzzy logic(I, II, III)[J]. Zeitschr f Math Logik u Grundlagen d Math. 1979, 25: 45-52, 119-134, 447 – 464.

[3] Ying M S. A logic for approximate reasoning[J]. J Symbolic Logic, 1994, 59(3): 830 – 837.

[4] Wang G J, Fu L, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two valued logic[J]. Sci China Ser A-Math, 2002, 45(9): 1106 – 1116.

[5] Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces[J]. Fuzzy Set and Systems, 2003, 136(1): 71 – 91.

[6] Li B J, Wang G J. Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz n-valued propositional logic and a limit theorem [J]. Sci China Ser F-Inf Sci, 2005, 48(6): 727 – 736.

[7] Zhou H J, Wang G J, Zhou W. Consistency degrees of theories and methods of graded reasoning in n-valued R_0-logic (NM-logic)[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2006, 43(2): 117 – 132.

[8] Wang G J, Zhou H J. Quantitative logic[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 226 – 247.

[9] Wang G J, Zhou H J. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle[M]. Beijing: Science Press, Oxford: Alpha Science International Limited, 2009. 76 – 105.

[10] 罗敏霞, 姚宁. L^* 系统中公式的语构程度化方法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 424 – 428.

Luo M X, Yao N. Syntactic graded method of formulas in the system L^*[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 424 – 428. (in Chinese)

[11] Zhou H J, Wang G J. Borel probabilistic and quantitative logic [J]. Sci China Inf Sci, 2011, 54(9): 1843 – 1854.

[12] 王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用[J]. 中国科学: 信息科学, 2012, 42(5): 648 – 662.

Wang G J. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application[J]. Sci China Inf Sci, 2012, 42(5): 648-662. (in Chinese)

[13] Wang G J. A unified integrated method for evaluating goodness of propositions in several propositional logic systems and its applications[J]. Chinese Journal of Electronics, 2012, 21(2): 195 – 201.

[14] 时慧娴, 王国俊. 多值模态逻辑的计量化方法[J]. 软件学报, 2012, 23(12): 3074 – 3087.

Shi H X, Wang G J. Quantitative method for multi-valued modal logics[J]. Journal of Software, 2012, 23(12): 3074 – 3087. (in Chinese)

[15] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 20 – 26.

Xu Y. Lattice implication algrbras[J]. Jounral of Southwest Jiaotong University, 1993, 28(1): 20 – 26. (in Chinese)

[16] Xu Y, Qin K Y, Liu J. L-valued propositional logic L_{vpl}[J]. Information Scicence, 1999, 114(1): 205 – 235.

[17] 裴道武. 强正则剩余格值逻辑系统 L^N 及其完备性[J]. 数学学报, 2002, 45(4): 745 – 752.

Pei D W. A logic system based on strong regular reseiduated lattices and its completeness[J]. Acta Mathematica Sinca, 2002, 45(4): 745 – 752. (in Chinese)

[18] 傅丽, 宋建社. 经典命题逻辑的 Boole 语义理论[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(2): 46 – 52.

Fu L, Song J S. Theory of boolean semantics of classical propositional logic[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(2): 46 – 52. (in Chinese)

[19] 左卫兵. Boole 语义的程度化方法[J]. 电子学报, 2012, 40(3): 441 – 447.

Zuo W B. Graded method of Boolean semantics[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(3): 441 – 447. (in Chinese)

[20] 左卫兵. 基于 MV 代数语义的格值逻辑的程度化方法[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 2035 – 2040.

Zuo W B. Graded method of lattice-valued logic based on MV-algebra semantics[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 2035 – 2040. (in Chinese)

[21] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271 – 288.

[22] Liu L Z. On the existence of states on MTL-algebras[J]. Information Sciences, 2013, 220: 559 – 567.

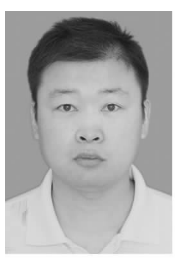
[23] 李璧镜, 王国俊. 正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间[J]. 电子学报, 2010, 38(3): 497 – 502.

Li B J, Wang G J. Logic pseudo-metric spaces of regular implication operators[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(3): 497 – 502. (in Chinese)

[24] 左卫兵. 多值逻辑系统中公式的 μ-真度理论[J]. 系统科学与数学, 2011, 31(7): 879-892.

Zuo W B. μ-truth degree of formula in many-valued propositional logic[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science, 2011, 31(7): 879 – 892. (in Chinese)

作者简介



左卫兵 男, 1976 年 3 月出生, 河南内黄人. 现为华北水利水电大学数学与信息科学学院副教授、硕士生导师. 研究方向为不确定性推理、非经典数理逻辑.

E-mail: zuoweibing@ncwu.edu.cn