

基于正交补空间的遮挡点恢复方法

刘侍刚^{1,2}, 彭亚丽^{1,2}, 曾智勇³, 裘国永^{1,2}

(1. 现代教学技术教育部重点实验室, 陕西西安 710062; 2. 陕西师范大学计算机科学学院, 陕西西安 710062;
3. 福建师范大学软件学院, 福建福州 350108)

摘要: 为了有效地恢复遮挡点的位置, 提出了一种基于正交补空间的遮挡点恢复方法, 该方法将图像两两组合, 并删除同组中的遮挡点, 利用删除遮挡点后的图像组生成的正交补空间之和等于三维空间结构点生成的正交补空间的特性, 线性地求解出遮挡点的真实位置. 由于该方法的求解是线性的, 克服了现有迭代方法需要初值的缺点; 同时, 该方法将所有的图像及可见图像点都平等地看待. 模拟实验和真实实验结果表明, 该方法具有鲁棒性好及误差小等优点.

关键词: 遮挡点; 正交补空间; 重投影

中图分类号: TP391.41; P232

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2015)05-0911-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.05.012

An Occlusion Recovery Method Based on Orthogonal Complement Subspace

LIU Shi-gang^{1,2}, PENG Ya-li^{1,2}, ZENG Zhi-Yong³, QIU Guo-yong^{1,2}

(1. Key Laboratory of Modern Teaching Technology, Ministry of Education, Xi'an, Shaanxi 710062

2. School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062;

3. Faculty of Software, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350108)

Abstract: To recover the position of occlusion, an occlusion recovery method based on orthogonal complement subspace is presented. Two images are combined into a group and the occlusions in the group are removed. Then, the position of occlusion is linearly obtained, based on the fact that the sum of orthogonal complement subspaces spanned by all the image groups equals to the one spanned by the 3D space structure points. Being linearly, the method for occlusion recovery overcomes the shortcoming that some existing iteration methods need a good original value. At the same time, all the images and all the image points are treated uniformly. The experiments with both simulate and real data show that the method is efficient, robust and has small re-projection errors.

Key words: occlusions; orthogonal complement subspaces; re-projection

1 引言

特征点跟踪是三维重建的基础, 是计算机视觉的一个重要研究领域^[1,2]. 在特征点的跟踪过程中, 由于存在光照的变化、遮挡等原因, 必然会导致部分特征点的丢失. 这样, 如何恢复这些丢失的特征点, 即遮挡点, 就成为三维重建过程中必须考虑的问题之一^[3].

为了恢复遮挡点, Marques 和 Jacobs 等依据图像矩阵秩为 4 的特性^[4,5], 利用子矩阵法对遮挡点进行恢复, 但结果易受所选择的子矩阵的影响. 为了克服子矩阵法的缺点, 有部分学者采用一种 Resection-intersection 技

术^[6~8], 即开始假设遮挡点的初值, 利用图像点矩阵可以分解为投影矩阵和空间结构点矩阵相乘的特性, 保持其中一个不变, 求另外一个, 这样交替进行. 这类方法中, 最具有代表性的是 Wiberg 方法^[8], 但是 Wiberg 方法刚开始并没有引起人们的重视, 后来 Okatani 和 Deguchi 重提及它^[9], 才引起人们的重视, 并逐步成为遮挡点恢复的标准算法之一^[10,11]. 但是该类方法的收敛速度比较慢, 尤其是到了算法后期. 为了克服这个缺点, 有些学者利用重投影点和可见点构造一个目标函数^[12,13], 利用阻尼牛顿法进行迭代求解. 但是基于阻尼牛顿法只能提高收敛速度, 而不会提高收敛精度. 近年来, 一些学者

收稿日期: 2014-03-19; 修回日期: 2014-07-21; 责任编辑: 马兰英

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61402274, No. 41171338, No. 41271387); 中国博士后科学基金特别资助(No. 200902594); 陕西省重点科技创新团队(No. 2014KTS-18); 陕西师范大学中央高校基本科研业务费项目(No. CK201402040, No. CK201302029); 现代教学技术教育部重点实验室学习科学交叉学科培育计划资助; 陕西师范大学实验技术研究项目(No. SYJS201329)

利用图像矩阵秩为低秩矩阵的特性,采用增广拉格朗日方法进行求解^[14,15].但是前面这些方法都是基于迭代的思想,这些方法都需要初始值,若初始值远离真实解,会陷入局部最优.

为了克服上述缺点,本文提出了一种基于正交补空间的遮挡点恢复方法,该方法将图像两两组合,并删除同组中的遮挡点,利用删除遮挡点后的图像组构成的正交补空间之和等于三维空间结构点构成的正交补空间的特性,线性地求解该线性子空间,完成遮挡点恢复.由于该方法为线性求解,因此无需初值,同时,在遮挡点恢复过程中,将所有的图像及所有的可见图像点都平等的看待,因此具有较高的恢复精度.

2 相机模型

若有 m 幅图像及 n 个 3 维空间点,相机为正投影模型,则有

$$\mathbf{m}_{i,j} = \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j \quad (1)$$

式中 $\mathbf{m}_{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T$ 表示图像点坐标, $\mathbf{X}_j = [x_j \quad y_j \quad z_j \quad 1]^T$ 表示 3 维空间点的齐次坐标, \mathbf{P}_i 为相机的投影矩阵, i 和 j 分别表示第 i 幅图像和第 j 个图像点.

将所有图像及投影矩阵放在一起,则有

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{X} \quad (2)$$

$$\text{式中 } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_m \end{bmatrix}_{2m \times n}, \quad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2 \times n}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m \end{bmatrix}_{2m \times 4},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_{4 \times n}.$$

从式(2)中可以看出,矩阵 \mathbf{M} 是一个秩为 4 的矩阵.

3 基于子空间的描述

对于第 $2k-1$ 幅和第 $2k$ 幅图像上的所有图像点也满足式(2),即有

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{2k-1} \\ \mathbf{m}_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2k-1} \\ \mathbf{P}_{2k} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{P} \mathbf{X} \quad (3)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, [m/2]$.

若用 Ω_k 和 Ω 分别表示由图像点 \mathbf{M}_k 和空间结构点 \mathbf{X} 的行向量生成的线性子空间,即

$$\Omega_k = \text{span}\{\mathbf{u}_{2k-1}, \mathbf{v}_{2k-1}, \mathbf{u}_{2k}, \mathbf{v}_{2k}\}, \quad \Omega = \text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{1}\} \quad (4)$$

从式(4)可以看出, Ω_k 和 Ω 都是 4 维线性子空间,

由式(3)可得

$$\Omega_k = \Omega, \quad \sum_{k=1}^{[m/2]} \Omega_k = \Omega \quad (5)$$

若用 \mathcal{U}_k 和 \mathcal{U} 分别表示线性子空间 Ω_k 和 Ω 的正交补空间,即

$$\Omega_k + \mathcal{U}_k = \mathfrak{R}^n, \quad \Omega + \mathcal{U} = \mathfrak{R}^n \quad (6)$$

式中 \mathfrak{R}^n 表示整个空间.

4 线性子空间的求解

为了表示方便,假设第 $2k-1$ 幅及第 $2k$ 幅图像只有 1 个遮挡点,且第 2 个图像点为不可见点,即

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} u_{2k-1,1} & \times & u_{2k-1,3} & \cdots & u_{2k-1,n} \\ v_{2k-1,1} & \times & v_{2k-1,3} & \cdots & v_{2k-1,n} \\ u_{2k,1} & \times & u_{2k,3} & \cdots & u_{2k,n} \\ v_{2k,1} & \times & v_{2k,3} & \cdots & v_{2k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{2k-1} \\ \mathbf{v}_{2k-1} \\ \mathbf{u}_{2k} \\ \mathbf{v}_{2k} \end{bmatrix} \quad (7)$$

由于点 $(u_{2k-1,2} \quad v_{2k-1,2})$ 和 $(u_{2k,2} \quad v_{2k,2})$ 的值并不知道,因此,无法知道向量 $\mathbf{u}_{2k-1}, \mathbf{v}_{2k-1}, \mathbf{u}_{2k}, \mathbf{v}_{2k}$. 但若将不可见点全删除,则有

$$\mathbf{M}'_k = \begin{bmatrix} u_{2k-1,1} & u_{2k-1,3} & \cdots & u_{2k-1,n} \\ v_{2k-1,1} & v_{2k-1,3} & \cdots & v_{2k-1,n} \\ u_{2k,1} & u_{2k,3} & \cdots & u_{2k,n} \\ v_{2k,1} & v_{2k,3} & \cdots & v_{2k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_{2k-1} \\ \mathbf{v}'_{2k-1} \\ \mathbf{u}'_{2k} \\ \mathbf{v}'_{2k} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由于已经将遮挡点 $(u_{2k-1,2} \quad v_{2k-1,2})$ 和 $(u_{2k,2} \quad v_{2k,2})$ 从式(8)中删除,因此向量 $\mathbf{u}'_{2k-1}, \mathbf{v}'_{2k-1}, \mathbf{u}'_{2k}, \mathbf{v}'_{2k}$ 比 $\mathbf{u}_{2k-1}, \mathbf{v}_{2k-1}, \mathbf{u}_{2k}, \mathbf{v}_{2k}$ 的长度小 1.

令由图像点 \mathbf{M}'_k 行向量生成的线性子空间为

$$\Omega'_k = \text{span}\{\mathbf{u}'_{2k-1}, \mathbf{v}'_{2k-1}, \mathbf{u}'_{2k}, \mathbf{v}'_{2k}\} \quad (9)$$

其正交补空间为 \mathcal{U}'_k , 且有

$$\Omega'_k + \mathcal{U}'_k = \mathfrak{R}^{n-1} \quad (10)$$

此时, \mathfrak{R}^{n-1} 是在整个子空间 \mathfrak{R}^n 中, 去除第 2 维后得到的一个子空间. 由于 Ω'_k 是一个 4 维子空间, 因此, \mathcal{U}'_k 是一个 $n-5$ 维子空间, 可以假设子空间 \mathcal{U}'_k 的一组标准正交基为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}'_1 \\ \boldsymbol{\beta}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}'_{n-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-5,1} & \beta_{n-5,2} & \cdots & \beta_{n-5,n-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

将 \mathcal{U}'_k 的标准正交基扩展到原来的 \mathfrak{R}^n 维空间中, 可在遮挡点位置处补上 0, 即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & 0 & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \beta_{2,1} & 0 & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-5,1} & 0 & \beta_{n-5,2} & \cdots & \beta_{n-5,n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

令

$$\tilde{\mathbf{U}}_k = \text{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_{n-5}) \quad (13)$$

式中 $\tilde{\mathbf{U}}_k$ 表示 \mathbb{R}^n 空间中的一个线性子空间。

在空间 \mathbb{R}^{n-1} 中,由于 $(\boldsymbol{\beta}'_1, \boldsymbol{\beta}'_2, \dots, \boldsymbol{\beta}'_{n-5})$ 是线性子空间 Ω'_k 的正交补空间 \mathbf{U}'_k 的一组基,而 Ω'_k 是由向量 $\mathbf{u}'_{2k-1}, \mathbf{v}'_{2k-1}, \mathbf{u}'_{2k}, \mathbf{v}'_{2k}$ 组成,因此有

$$\mathbf{M}'_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}'_1 \\ \boldsymbol{\beta}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}'_{n-5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_{2k-1} \\ \mathbf{v}'_{2k-1} \\ \mathbf{u}'_{2k} \\ \mathbf{v}'_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}'_1 \\ \boldsymbol{\beta}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}'_{n-5} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \quad (14)$$

根据向量 $\mathbf{u}'_{2k-1}, \mathbf{v}'_{2k-1}, \mathbf{u}'_{2k}, \mathbf{v}'_{2k}$ 及向量 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_{n-5})$ 的定义,可得

$$\mathbf{M}_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{2k-1} \\ \mathbf{v}_{2k-1} \\ \mathbf{u}_{2k} \\ \mathbf{v}_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-5} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \quad (15)$$

从式(15)可以看出,线性子空间 $\tilde{\mathbf{U}}_k$ 和 Ω_k 正交,同时由 \mathbf{U} 的定义可得:

$$\tilde{\mathbf{U}}_k \subset \mathbf{U} \quad (16)$$

在前面的推导过程中,本文假设在第 $2k-1$ 幅及第 $2k$ 幅图像中只有一个遮挡点,若有 l 个遮挡点,则 $\tilde{\mathbf{U}}_k$ 是一个 $n-4-l$ 维的线性子空间。

若对于每个空间结构点,至少在一组图像中可见,则有

$$\sum_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \tilde{\mathbf{U}}_k = \mathbf{U} \quad (17)$$

若线性子空间 \mathbf{U} 已知,则很容易求到其正交补空间 Ω ,即三维空间结构点 \mathbf{X} 生成的子空间的一组基 \mathbf{X}' 。

从式(2)可以看出,图像点矩阵 \mathbf{M} 中的任何行向量 \mathbf{v} 都可以由空间结构点 \mathbf{X} 行向量线性表示,即向量 \mathbf{v} 在线性子空间 Ω 中.由于子空间 \mathbf{U} 和 Ω 是正交,因此向量 \mathbf{v} 在子空间 \mathbf{U} 的投影为 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{X}'^T(\mathbf{X}'\mathbf{X}'^T)^{-1}\mathbf{X}') = \mathbf{0} \quad (18)$$

利用上式可以线性地求到 \mathbf{v} 中的未知数,即遮挡点的位置。

5 算法总结

算法的流程图如图 1 所示,其实现过程如下:

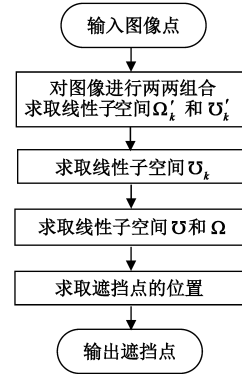


图1 算法流程图

Step1 利用式(8),(9),(10),求到第 k 组图像中删除遮挡点后组成的线性子空间 Ω'_k 及其正交补空间 \mathbf{U}'_k 。

Step2 利用式(12)和式(13),求到将遮挡点位置补 0 后所生成的线性子空间 $\tilde{\mathbf{U}}_k$ 。

Step3 利用式(17),求到线性子空间 \mathbf{U} 及其正交补空间 Ω ,即求到子空间 Ω 的一组基 \mathbf{X}' 。

Step4 利用式(18)可以求到遮挡点的位置。

6 模拟与真实图像实验

6.1 模拟实验

为了研究本文方法的性能与遮挡率之间的变化关系及和 Wiberg 方法^[11]进行对比实验,用计算机模拟在单位球内随机产生 100 个空间结构点,模拟产生相机的投影矩阵,并变化相机位置以产生 20 幅大小为 640×480 的图像,同时,在图像点中加入 2 个像素的高斯噪声,随机遮挡其中部分图像点,并求取重投影误差.在每种高斯噪声条件下,用本文方法及 Wiberg 方法分别重复进行 100 次实验,然后求重投影的平均值,模拟结果如图 2 所示。

从图 2 可以看出,当遮挡率低于 55% 时,本文方法和 Wiberg 方法的重投影误差几乎随遮挡率线性增加,原因是由于遮挡率越高,可利用的点就越少,因此,恢复精度就越低.但是,当遮挡率高于 55% 时,重投影误差急剧增加,说明恢复效果较差.从图 2 中还可以看出本文方法比 Wiberg 方法的重投影误差要小,说明本文方法具有更高的恢复精度,原因是由于本文方法采用线性方法求解,并不需要初始值,而 Wiberg 方法是采用迭代的的思想,若初始值远离真实解,有可能无法收敛到全局最优,只能收敛到局部最优,因此 Wiberg 方法的重

投影误差比较大。

同时,为了研究本文方法的恢复精度与图像点噪声之间的关系,本文随机遮挡 30% 的图像点,并在图像点中加入 0 至 4 个像素的高斯噪声,在每种高斯噪声下,用本文方法及 Wiberg 方法分别运行 100 次,然后求得平均重投误差随图像点噪声的变化曲线,如图 3 所示。

从图 3 可以看出,重投影误差随图像点噪声线性的增加,遮挡率越高,重投影误差越大,这点和图 2 是一致的。当遮挡率为 10% 时,重投影误差比图像点噪声大约 20%;当遮挡率为 30% 时,重投影误差比图像点噪声大约 55%;当遮挡率为 50% 时,重投影误差比图像点噪声大约 120%。同时,从图中还可以看出,本文方法的重投影误差比 Wiberg 方法的重投影误差要小。

同时,为了研究本文方法与图像数及空间点数之间的关系,首先保持空间点数为 100,图像数目由 5 幅变化到 40 幅,然后,图像数目保持 20 幅,空间点数由 20 个变化到 300 个。同时,在图像中加入 2.0 个象素的高斯噪声,并随机遮挡 30% 的图像点。在每种实验下分别运行 100 次,然后求得重投误差随图像数及空间点数的变化曲线,如图 4 和图 5 所示。

从图 4 和图 5 中可以看出,随着图像数及空间点数的增加,重投影误差会逐渐减小,最后会保持稳定。原

因是由于刚开始时,图像数(空间点)较少时,可利用的图像点信息比较少,因此重投影误差较大,随着图像数(空间点数)的增加,可见图像点增多,因此,重投影误差减小,但减小的速度越来越小。

6.2 真实图像实验

为了验证本方法的正确性,本文获得一个由 21 幅图像组成的绕钟楼一圈的图像序列,图像大小为 640×480 ,其中第 3 和 14 幅图像如图 6 所示。本文提取并跟踪约 400 个特征点(如图 6 中 + 所示),由于自身的遮挡,遮挡率约为 50%。用本文提出的方法进行恢复,恢复结果如图 6 所示(其中 * 表示恢复的遮挡点,○表示重投影点)。从图中所恢复的遮挡点可以看出,本文方法能够较好的恢复出遮挡点的真实位置。从图中还可以看出,重投影点(○)和特征点(+)基本重合,说明本文方法具有较高的恢复精度。

7 结束语

本文提出了一种基于正交补空间的遮挡点恢复方法,该方法的恢复过程是线性的,克服了现有迭代方法需要初值的缺点,同时,在恢复的过程中,将所有的图像及所有的可见图像点都平等的看待,因此具有较高的恢复精度。模拟实验和真实实验结果表明,该方法具有鲁棒性好、恢复精度高等优点。

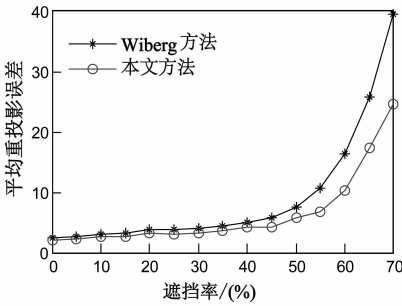


图2 重投影误差与遮挡率变化图

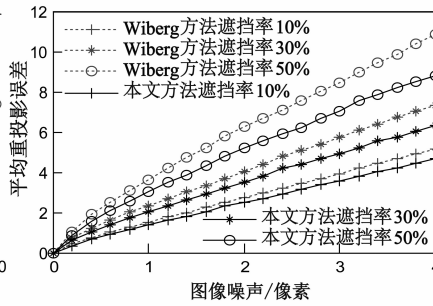


图3 重投影误差随图像点噪声变化图

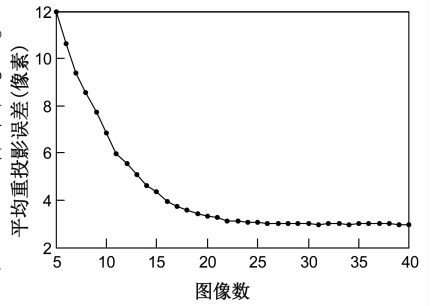


图4 重投影误差随图像数变化图

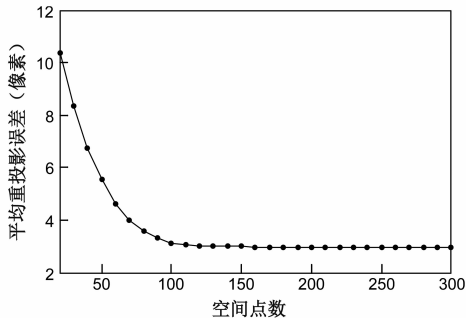


图5 重投影误差随空间点数变化图

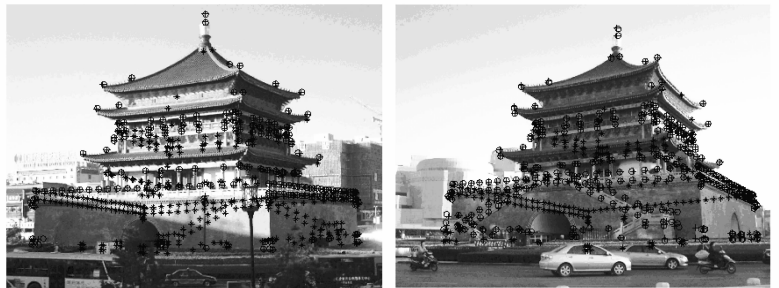


图6 图像序列中提取的角点(+)重投影点(O)及恢复的遮挡点(*)

参考文献

- [1] G Bastian, A Mathieu, K Kalin, C Daniel. A super-resolution framework for high-accuracy multiview reconstruction[J]. International Journal of Computer Vision, 2014, 106(2): 172 – 191.
- [2] S Shen. Accurate multiple view 3D reconstruction using patch based stereo for large-scale scenes[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(5): 1901 – 1914.
- [3] Y Liu, L Cao, C Liu, Y Pu, H Cheng. Recovering shape and motion by a dynamic system for low-rank matrix approximation in L_1 norm[J]. The Visual Computer, 2013, 29(5): 421 – 431.
- [4] M Marques, J Costeira. Estimating 3D shape from degenerate sequences with missing data[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2009, 113(2): 261 – 272.
- [5] D Jacobs. Linear fitting with missing data for structure-from-motion[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2008, 82(1): 57 – 81.
- [6] C Häne, C Zach, A Cohen, R Angst. Joint 3D scene reconstruction and class segmentation[A]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Portland Oregon, 2013. 97 – 104.
- [7] D Alessio. Adaptive non-rigid registration and structure from motion from image trajectories [J]. International Journal of Computer Vision, 2013, 103(2): 226 – 239.
- [8] T Wiberg. Computation of principal components when data are missing[A]. Proceedings of the Second Symposium of Computational Statistics[C]. Berlin, 1976. 229 – 326.
- [9] T Okatani, K Deguchi. On the Wiberg algorithm for matrix factorization in the presence of missing components[J]. International Journal of Computer Vision, 2007, 72(3): 329 – 337.
- [10] Y Zheng, S Sugimoto, S Yan, M Okutomi. Generalizing Wiberg algorithm for rigid and nonrigid factorizations with missing components and metric constraints[A]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Rhode Island, USA, 2012. 2010 – 2017.
- [11] D Strelow. General and nested Wiberg minimization [A]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Rhode Island, USA, 2012. 1584 – 1591.
- [12] A Eriksson, A Hengel. Efficient computation of robust weighted low-rank matrix approximations using the L_1 norm[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(9): 1681 – 1690.

- [13] A Roland, P Marc. Multilinear factorizations for multi-camera rigid structure from motion problems[J]. International Journal of Computer Vision, 2013, 103(2): 240 – 266.
- [14] Z Wen, W Yin, Y Zhang. Solving a low-rank factorization model for matrix completion by a nonlinear successive over-relaxation algorithm[J]. Mathematical Programming Computation, 2012, 4(4): 333 – 361.
- [15] J Yang, X Yuan. Linearized augmented Lagrangian and alternating direction methods for nuclear norm minimization[J]. Mathematics of Computation, 2013, 82(281): 301 – 329.

作者简介



刘侍刚 男, 1973 年 11 月出生于江西峡江, 1997 年和 2001 年在哈尔滨工程大学分别获得学士学位和硕士学位, 2005 年在西安电子科技大学获得博士学位, 现为陕西师范大学副教授. 从事计算机视觉、图像处理、三维重建等方面的有关研究.

E-mail: shgliu@gmail.com



彭亚丽(通信作者) 女, 1979 年 3 月出生于陕西石泉, 2005 年在哈尔滨工程大学获得硕士学位, 2013 年在西安电子科技大学获得博士学位, 现为陕西师范大学讲师. 从事图像处理、智能计算等方面的有关研究.

E-mail: pengylxa@gmail.com

曾智勇 男, 1965 年 7 月出生于江西龙南, 2006 年在西安电子科技大学获得博士学位, 现为福建师范大学副教授. 主要从事图像检索、模式识别、人工智能等方面的有关研究.

E-mail: zhiyeng@gmail.com

裘国永 男, 1964 年 5 月出生于浙江绍兴, 1984 年在武汉大学获得学士学位, 1989 年在陕西师范大学获得硕士学位, 1999 年在浙江大学获得博士学位, 现为陕西师范大学副教授. 从事计算机视觉、模式识别等方面的有关研究.

E-mail: qgyqgy@snnu.edu.cn