

# 加伯变换与线性正则变换的关系及其在滤波器设计中的应用

张志超, 罗懋康

(四川大学数学学院, 四川成都 610065)

**摘 要:** 线性正则变换是分数阶傅里叶变换的广义形式, 由于其具有 3 个自由参数, 故相比于分数阶傅里叶变换有更强的灵活性. 加伯变换作为短时傅里叶变换的特例, 是信号处理领域中一种重要的时频分析工具. 本文基于短时傅里叶变换与线性正则变换的关系以及 Gaussian 函数在线性正则变换下的不变性, 研究了加伯变换与线性正则变换的关系, 提出了一种修正的加伯变换形式, 得到了当参变量满足一定条件时修正后的加伯变换与线性正则变换之间具有时频平面仿射变换关系, 进而研究了该关系在线性正则变换域上滤波器设计中的应用. 仿真的结果验证了结论的正确性, 表明了滤波器设计方法的有效性.

**关键词:** 加伯变换; 线性正则变换; 仿射变换

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2015)12-2525-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.12.027

## Relations Between Gabor Transform and Linear Canonical Transform and Their Application for Filter Design

ZHANG Zhi-chao, LUO Mao-kang

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China)

**Abstract:** The linear canonical transform(LCT) is a generalization of the fractional Fourier transform(FRFT) and has more flexibility than FRFT since it contains three free parameters. As a special case of the short-time Fourier transform(STFT), the Gabor transform(GT) is an important time-frequency analysis tool for signal processing. According to the relationship between STFT and LCT, as well as the invariance of Gaussian function in LCT domain, we present a new form of GT and obtain that the LCT is equivalent to an affine transformation for the new GT when parameters meet certain conditions. Furthermore, we investigate the application of this relationship for filter design in LCT domain. Finally, the simulation results verify the correctness and effectiveness of the proposed theory and technique.

**Key words:** Gabor transform; linear canonical transform; affine transformation

### 1 引言

在时频分析领域, 分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FRFT)因其在处理非平稳信号尤其是雷达信号中展现的独特魅力, 故在理论与应用方面都取得了长足的发展. 然而, FRFT 只有一个自由参数, 使其在处理大多数非平稳信号的过程中缺乏足够的灵活性, 随着更多自由参数的引入, 作为 FRFT 广义形式的含有 3 个参变量的线性正则变换(Linear Canonical Transform, LCT)便应运而生. 早在 20 世纪 70 年代, LCT 就由 Moshinsky 和 Collins 提出<sup>[1,2]</sup>, 被用于微分方程求解和光学系统分析<sup>[3]</sup>.

在利用 LCT 处理非平稳信号的过程中, LCT 域上的

滤波器设计是关键性的技术, 随着 LCT 快速离散算法的提出<sup>[4]</sup>, 迄今已有大量关于 LCT 域上滤波器设计的研究成果. 1997 年, Barshan 等人首次介绍了 LCT 域上滤波器设计的相关问题<sup>[5]</sup>; 2000 年~2003 年, 国立台湾大学贝苏章等人研究了 LCT 在时频滤波方面的初步应用<sup>[6~9]</sup>; 2006 年, Sharma 等人研究了基于 LCT 的多分量时频信号分离问题<sup>[10]</sup>; 同年, 贝苏章等人基于加伯变换(Gabor Transform, GT)与 FRFT 之间的时频平面旋转变换关系研究了 FRFT 域上的滤波器设计问题, 为研究 LCT 域上的滤波器设计提供了一种新的思路<sup>[11]</sup>; 在此基础上, 2010 年, 向强等人从短时傅里叶变换(Short-Time Fourier Transform, STFT)与 LCT 之间的关系出发, 提出了基于 LCT 与 STFT 联合的时频分析方法并将之应用到多

分量时频信号分离等问题上<sup>[12,13]</sup>.但是由于 STFT 中使用的窗函数在时域与 LCT 域上往往具有不同的形式,故 STFT 与 LCT 之间并不具有严格意义上的时频平面仿射变换关系,这使得无法沿用贝苏章等人提出的方法来研究 LCT 域上的滤波器设计问题.

为此,本文首先证明了 Gaussian 函数的 LCT 仍为 Gaussian 函数;然后根据 STFT 与 LCT 的关系,提出了一种修正的 GT 表达式,并给出了当参变量满足一定的条件时,修正后的 GT 与 LCT 之间具有时频平面仿射变换关系;最后简单介绍了该仿射变换关系在 LCT 域上滤波器设计问题中的应用.计算机仿真结果验证了结论的正确性以及滤波器设计方法应用于多分量时频信号分离的有效性.

## 2 LCT 与 GT 的定义

### 2.1 LCT 的定义

信号  $f(t)$  以实数  $(a, b, c, d)$  为参变量并满足  $ad - bc = 1$  的 LCT 定义式如下<sup>[3]</sup>:

$$F_{(a,b,c,d)}(u) = L_{(a,b,c,d)}[f(t)] = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{1}{b}ut} e^{j\frac{a}{2b}t^2} f(t) dt, & b \neq 0 \\ \sqrt{d} e^{j\frac{ad}{2}u^2} f(du), & b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

当参数  $b = 0$  时,信号  $f(t)$  的 LCT 仅仅是尺度变换,并伴有幅度调制及二次相位调制.由不失一般性,故在本文后续章节只考虑参数  $b \neq 0$  的情形.

当参变量  $(a, b, c, d) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha)$  时,LCT 变为 FRFT.进而,当参变量  $(a, b, c, d) = (0, 1, -1, 0)$ ,即  $\alpha = \pi/2$  时,LCT 变为傅里叶变换(Fourier Transform, FT).

故而式(1)中的  $u$  域可看作时域、频域和分数阶傅里叶变换域的统一,这里称这类新的时频域为线性正则变换域.

LCT 有许多重要性质,例如:叠加性、可逆性(逆线性正则变换)、时间移位性、频率移位性、时频移位性等<sup>[14]</sup>.

### 2.2 GT 的定义

信号  $f(t)$  的 GT 定义式如下<sup>[15,16]</sup>:

$$G_f(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-t)^2/2} e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \quad (2)$$

为使 GT 与 FRFT 之间具有时频平面旋转变换关系,可对 GT 修改如下<sup>[11]</sup>:

$$\tilde{G}_f(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-t)^2/2} e^{-j\omega(\tau-t/2)} f(\tau) d\tau \quad (3)$$

为区别于 GT,称之为修改 GT,并记为 MGT.从而,可得 MGT 与 FRFT 之间具有时频平面旋转变换关系,即:

$$\tilde{G}_{F_\alpha}(u, v) = \tilde{G}_f(ucos\alpha - vsin\alpha, usin\alpha + vcos\alpha) \quad (4)$$

其中  $F_\alpha(u)$  为信号  $f(t)$  的  $\alpha$  阶 FRFT<sup>[11]</sup>.

## 3 Gaussian 窗函数的 LCT

设 Gaussian 函数  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ ,其中  $\sigma$  为标准差.根据式(1), $g(t)$  的 LCT 可以表达为

$$\begin{aligned} G_{(a,b,c,d)}(u) &= \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{j(\frac{d}{2b}t^2 - \frac{1}{b}ut + \frac{a}{2b}t^2)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(\frac{1}{\sigma} - j\frac{a}{b})t + j\frac{u}{b}]^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} e^{-\frac{1}{2}b^2(\frac{1}{\sigma} - j\frac{a}{b})^2} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - j\frac{a}{b}}t + \frac{j}{b\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - j\frac{a}{b}}}u)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{j b + a\sigma^2}} e^{\frac{1}{2}j\frac{bd+a\sigma^2}{b^2+a^2\sigma^4}u^2} e^{-\frac{1}{2}j\frac{u}{b^2/\sigma^2+a^2\sigma^2}u^2} \end{aligned} \quad (5)$$

从式(5)中可知,Gaussian 函数的 LCT 为具有复变量的 Gaussian 函数,并伴有幅度调制及二次相位调制.

## 4 STFT 与 LCT 的关系

信号  $f(t)$  的 STFT 定义式如下<sup>[12,13]</sup>:

$$S_f^h(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \quad (6)$$

其中, $h(t)$  是窗函数,故 STFT 也称作加窗傅里叶变换(WFT).结合式(2)与式(6)可得,当窗函数取  $h(t) = e^{-t^2/2}$ ,STFT 变为 GT.类似于 MGT,可定义修改的 STFT (MSTFT)如下<sup>[12,13]</sup>:

$$\tilde{S}_f^h(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau - t) e^{-j\omega(\tau-t/2)} f(\tau) d\tau \quad (7)$$

假定  $F_{(a,b,c,d)}(u)$ ,  $H_{(a,b,c,d)}(u)$  分别是信号  $f(t)$ ,  $h(t)$  以实数  $(a, b, c, d)$  为参数的 LCT,根据文献[12, 13]可得 MSTFT 与 LCT 之间的关系:

$$\tilde{S}_F^H(u, v) = \tilde{S}_f^h(du - bv, -cu + av) \quad (8)$$

其中, $\tilde{S}_F^H(u, v)$  是  $F_{(a,b,c,d)}(u)$  以  $H_{(a,b,c,d)}(u)$  为窗函数的 MSTFT,即:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_F^H(u, v) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{(a,b,c,d)}^*(\tau - u) \\ &\quad \cdot e^{-jv(\tau-u/2)} F_{(a,b,c,d)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

从关系式(8)可看出,由于式(7)与式(9)中的窗函数分别为  $h(t)$  和  $H_{(a,b,c,d)}(u)$ ,但信号在时域和 LCT 域往往具有不同形式,从而 MSTFT 与 LCT 之间不具有严格意义上的时频平面仿射变换关系.事实上,考察 MSTFT 的特例 MGT,取窗函数为  $h(t) = e^{-t^2/2}$ ,带入式

(5)中,即令  $\sigma^2 = 1$ ,可得  $h(t)$  的 LCT

$$H_{(a,b,c,d)}(u) = \frac{1}{\sqrt{j b + a}} e^{\frac{1}{2} j \frac{b d + a c}{b^2 + a^2} u^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{b^2 + a^2} u^2} \quad (10)$$

对比  $h(t) = e^{-t^2/2}$ ,虽然  $h(t)$  和  $H_{(a,b,c,d)}(u)$  都是 Gaussian 函数,但是二者通常具有不同的方差并且  $H_{(a,b,c,d)}(u)$  中存在额外的 chirp 因子,因此

$$\tilde{S}_f^h(u, v) \neq K \tilde{S}_f^h(du - bv, -cu + av) \quad (11)$$

即:

$$\tilde{G}_F(u, v) \neq K \tilde{G}_F(du - bv, -cu + av) \quad (12)$$

其中,  $K$  是常数因子. 从式(12)可知, MGT 与 LCT 之间不具有时频平面仿射变换关系.

### 5 修正 GT 及其与 LCT 的关系

根据上述分析,一般情形下 MGT 与 LCT 之间不具有仿射变换关系,故需要对 MGT 作进一步的修改. 根据式(8),要使 MSTFT 与 LCT 之间具有严格意义上的时频平面仿射变换关系,只需寻找在时域和 LCT 域上具有相同形式的窗函数. 由式(5),高斯窗函数  $e^{-t^2/(2\sigma^2)}$  的 LCT 为  $e^{-t^2/[2(b^2/\sigma^2 + a^2\sigma^2)]}$ ,若令  $\sigma^2 = b^2/\sigma^2 + a^2\sigma^2$ ,即  $\sigma^2 = \sqrt{b^2/(1-a^2)}$ ,则有

$$e^{-t^2/(2\sigma^2)} = e^{-t^2/[2(b^2/\sigma^2 + a^2\sigma^2)]} \quad (13)$$

为此,进一步修改 MGT 如下:

$$\hat{G}_f(t, \omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-t)^2/[2\sqrt{b^2/(1-a^2)}]} e^{-j\omega(\tau-t/2)} f(\tau) d\tau \quad (14)$$

为区别于 GT 和 MGT,称上述修改后的 MGT 为修正 GT,

并记为 LGT. 从而,可得 LGT 与 LCT 的关系如下定理所示:

**定理 1** 假定  $F_{(a,b,c,d)}(u)$  是信号  $f(t)$  以实数  $(a, b, c, d)$  为参数的 LCT,如果参数满足  $a = d$ ,则有

$$\hat{G}_F(u, v) = \frac{k^*}{\sqrt{\sqrt{b^2/(1-a^2)}}} \hat{G}_f(du - bv, -cu + av) \quad (15)$$

其中,  $\hat{G}_f(t, \omega)$  为信号  $f(t)$  的 LGT,  $\hat{G}_F(u, v)$  为信号  $F_{(a,b,c,d)}(u)$  的 LGT,  $k = \sqrt{j b + a \sqrt{b^2/(1-a^2)}}$ .

证明:令

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sqrt{b^2/(1-a^2)}}} e^{-t^2/[2\sqrt{b^2/(1-a^2)}]} \quad (16)$$

根据式(5)及  $a = d$ ,可得  $h(t)$  的 LCT

$$H_{(a,b,c,d)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k} e^{-\frac{u^2}{2\sqrt{b^2/(1-a^2)}}} \quad (17)$$

其中,  $k = \sqrt{j b + a \sqrt{b^2/(1-a^2)}}$ .

将式(16)及式(17)带入式(7)~(9)中,则有

$$\frac{1}{k^*} \hat{G}_F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{b^2/(1-a^2)}}} \hat{G}_f(du - bv, -cu + av) \quad (18)$$

$$\text{即: } \hat{G}_F(u, v) = \frac{k^*}{\sqrt{\sqrt{b^2/(1-a^2)}}} \hat{G}_f(du - bv, -cu + av).$$

信号  $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$ ,  $(a, b, c, d) = (2/3, 1, -5/9, 2/3)$ ,则  $\hat{G}_f(t, \omega)$ 、 $\hat{G}_F(t, \omega)$  及  $\hat{G}_F(dt - bv, -ct + a\omega)$  的时频分布如图 1 所示.

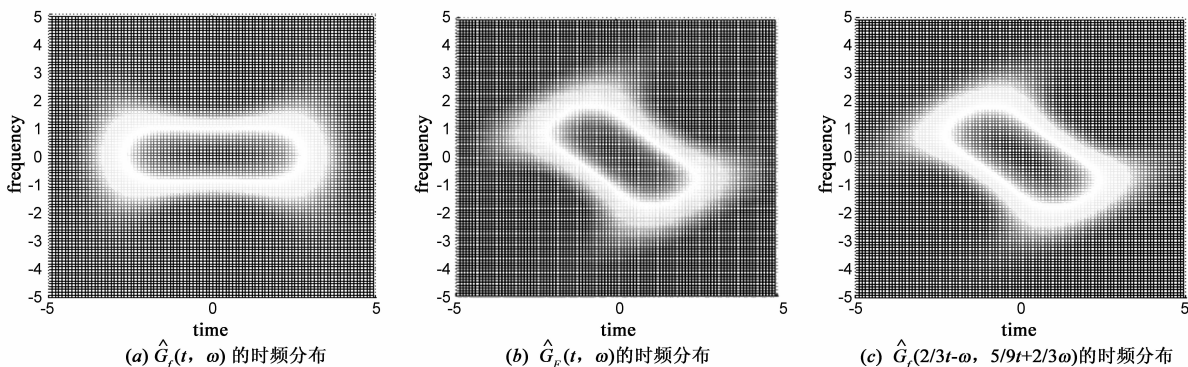


图1 参变量满足  $a=d$  时 LGT 与 LCT 的关系仿真

定理 1 及仿真的结果表明,当参变量满足  $a = d$  时, LGT 与 LCT 之间具有时频平面仿射变换关系.

### 6 LCT 域上滤波器设计

滤波器设计与信号分离是信号处理领域的重要研究课题. 文献[11]表明, MGT 与 FRFT 之间的时频平面旋转变换关系应用于 FRFT 域上的滤波器设计和信号

分离非常有效. 因此,本章节主要讨论 LGT 与 LCT 之间的时频平面仿射变换关系在 LCT 域上滤波器设计以及多分量时频信号分离问题中的应用. 同时,给出仿真以验证所提时频滤波器设计方法的合理性和有效性.

LCT 域上带通滤波器设计的一般方法如下<sup>[14]</sup>:

$$s_0(t) = L_{(d, -b, -c, a)} [L_{(a, b, c, d)} [f(t)] \cdot U(u)] \quad (19)$$

其中,  $U(u) = \begin{cases} 1, & u_1 \leq u \leq u_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ . 相应的低通、高通及带阻滤波器设计方法与之类似, 只不过滤波函数  $U(u)$  具有不同的形式.

从式(19)可知滤波器设计有两个关键步骤:

- ① LCT 的参变量  $(a, b, c, d)$  的选取.
- ② 滤波函数  $U(u)$  中 LCT 域截止标准  $u_1, u_2$  的确定.

为此, 基于定理 1 给出如下 LCT 域上的滤波器设计方法:

联合 GT 与 LCT 的时频滤波器设计方法: 对于信号  $f(t)$ , 设计 LCT 域的乘性滤波器, 则滤波器的输出为

$$s_0(t) = L_{(a, -b, -c, a)}[L_{(a, b, c, a)}[f(t)] \cdot U(u)] \quad (20)$$

其中,  $U(u) = \begin{cases} 1, & u \leq u_0 \\ 0, & u > u_0 \end{cases}$  (或  $U(u) = \begin{cases} 1, & u \geq u_0 \\ 0, & u < u_0 \end{cases}$ , 取决于噪声在时频平面的分布情况). 上述滤波器设计问题等价于存在参变量  $a, b$  使得在信号  $f(t)$  的 LGT 的时频分布中, 截止线(将纯净信号分量与噪声分量分割)具有如下形式:

$$u_0(a, -c) + k(-b, a), k \in (-\infty, +\infty) \quad (21)$$

根据定理 1, 则有, 在  $F_{(a, b, c, a)}(u)$  的 LGT 的时频分布中, 截止线的方程变为

$$u = u_0, \quad v = k \in (-\infty, +\infty) \quad (22)$$

即, 截止线为垂直于  $u$  轴且与之相交于  $(u_0, 0)$  的直线, 同时, 纯净信号分量与噪声分量分别位于截止线两旁.

这表明, 信号  $f(t)$  在该 LCT 域上可实现解耦和. 从而, 在该滤波器的作用下, 位于截止线一边的噪声时频分量被移除, 同时保留另一边的纯净信号时频分量.

根据上述滤波器设计方法, 可按如下步骤实现 LCT 域上的滤波器设计.

**步骤 1** 寻找参变量  $a, b$  使得在信号  $f(t)$  的 LGT 的时频分布中, 截止线的斜率恰好为  $-a/b$ .

**步骤 2** 根据步骤 1 中所得截止线计算其与时间轴交点的横坐标  $t_0$ , 再由  $u_0 = at_0$  可得滤波函数  $U(u)$  的 LCT 域截止标准.

**步骤 3** 根据 LGT 的时频分布中纯净信号与噪声的分布情况确定滤波函数  $U(u)$  的形式.

如下例子表明上述滤波器设计方法应用于多分量时频信号分离的有效性. 令纯净信号

$$s(t) = 2\cos(5t)e^{-0.5t^2} \quad (23)$$

两个噪声分别为  $n_1(t) = e^{j0.5(t-15)^2}$ ,  $n_2(t) = e^{j0.5(t+15)^2}$ .

输入信号  $f(t) = s(t) + n_1(t) + n_2(t)$ , 通过搜索法可得当参变量  $a = -0.29$ ,  $b = 0.32$  时, 在信号  $f(t)$  的 LGT 的时频分布中, 两条截止线的斜率都为  $-a/b = 0.9$  且与时间轴交点的横坐标  $t_0 = \pm 10$ ; 再由纯净信号与两噪声的分布情况可得滤波函数  $U(u) = \begin{cases} 1, & |u| \leq -10a \\ 0, & |u| > -10a \end{cases}$ ; 最后带入式(20)可得滤波器的输出信号  $s_0(t)$  以及该信号与原纯净信号  $s(t)$  的平均平方误差为 0.11%. 计算机仿真结果如图 2 所示.

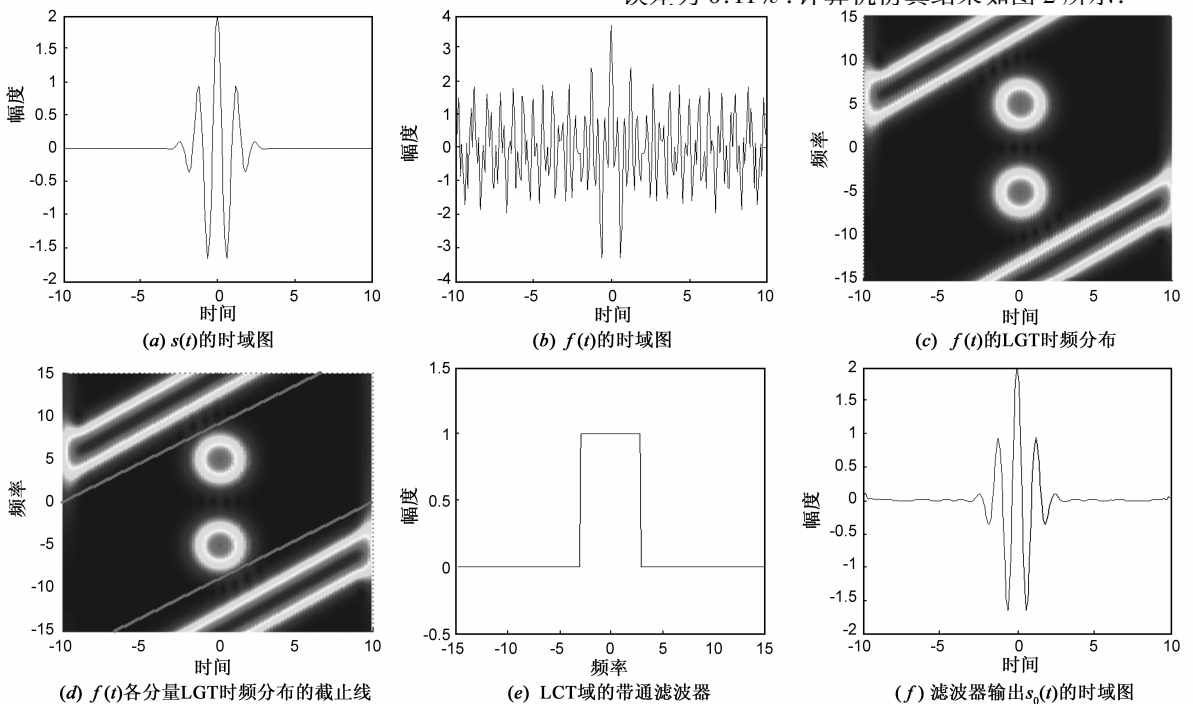


图2 基于LGT与LCT之间仿射变换关系的滤波器设计仿真

## 7 结束语

本文从 MGT 与 LCT 之间不具有时频平面仿射变换关系出发,基于 STFT 与 LCT 的关系以及 Gaussian 函数在 LCT 下的不变性,通过对 MGT 作进一步的修改,提出了一种修正的 GT 表达式,并记之为 LGT,得到了当参变量满足  $a = d$  时,LGT 与 LCT 之间具有时频平面仿射变换关系,进而基于该关系,给出了联合 GT 与 LCT 的时频滤波器设计方法.仿真实例表明文中结论的正确性以及所提滤波器设计方法应用于多分量时频信号分离的有效性.

### 参考文献

- [1] M Moshinsky, C Quesne. Linear canonical transformations and their unitary representations [J]. Journal of Mathematical Physics, 1971, 12 (8): 1772 – 1783.
- [2] S A Collins. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. Journal of the Optical Society of America, 1970, 60 (9): 1168 – 1177.
- [3] 邓兵,陶然.线性正则变换及其应用[J].兵工学报,2006, 27(4):665 – 670.  
DENG Bing, TAO Ran. Linear canonical transform and its implication[J]. Acta Armamentarii, 2006, 27 (4): 665 – 670. (in Chinese)
- [4] B M Hennelly, J T Sheridan. Fast numerical algorithm for the linear canonical transforms[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2005, 22(5):928 – 937.
- [5] B Barshan, M A Kutay, H M Ozaktas. Optimal filtering with linear canonical transformations [J]. Optics Communications, 1997, 135(1):32 – 36.
- [6] Soo-chang Pei, Jian-jiun Ding. Eigenfunctions of linear canonical transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(1):11 – 26.
- [7] Soo-chang Pei, Jian-jiun Ding. Close-form discrete fractional and affine Fourier transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(5):1338 – 1353.
- [8] Soo-chang Pei, Jian-jiun Ding. Eigenfunctions of the offset Fourier, fractional Fourier, and linear canonical transforms[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2003, 20 (3): 522 – 532.
- [9] Jian-jiun Ding. Research of Fractional Fourier Transform and Linear Canonical Transform[D]. Taipei, Taiwan: National Taiwan University, 2001.

- [10] K K Sharma, S D Joshi. Signal separational using linear canonical and fractional Fourier transform [J]. Optics Communications, 2006, 265 (2):454 – 460.
- [11] Soo-chang Pei, Jian-jiun Ding. Relations between Gabor transforms and fraction Fourier transform and their applications for signal processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55 (10):4839 – 4850.
- [12] 向强,秦开宇.基于线性正则变换与短时傅里叶变换联合的时频分析方法 [J]. 电子学报, 2011, 39(7):1508 – 1513.  
XIANG Qiang, QIN Kai-yu. A time-frequency analysis method based on linear canonical transform and short-time Fourier transform [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39 (7): 1508 – 1513. (in Chinese)
- [13] 向强.线性正则变换相关理论问题研究 [D]. 四川成都:电子科技大学, 2013. 38 – 47.  
XIANG Qiang. Research on Some Theoretical Issues of the Linear Canonical Transform [D]. Chengdu, Sichuan: University of Electronics Science & Technology of China, 2013, 38 – 47. (in Chinese)
- [14] 陶然,邓兵,王越.分数阶傅里叶变换及其应用 [M]. 北京:清华大学出版社, 2009. 451 – 453.
- [15] D Gabor. Theory of communication [J]. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1946, 93(3):429 – 457.
- [16] M J Bastiaans. Gabor's expansion of signal into Gaussian elementary signals [J]. Proceedings of the IEEE, 1980, 68 (4): 594 – 598.

### 作者简介



张志超 男, 1991 年 7 月生于江西省景德镇市, 四川大学数学学院硕士研究生. 主要研究方向为不确定性处理、信号处理.

E-mail: gnsyzc@126.com



罗懋康(通讯作者) 男, 1956 年 2 月生于重庆市, 博士, 四川大学数学学院教授、博士生导师, 教育部“长江学者奖励计划”特聘教授, 国家“杰出青年科学基金”获得者. 主要研究方向为不确定性理论、方法与应用.

E-mail: makaluo@scu.edu.cn