

## 基于裁剪造型的等几何分析方法求解波导本征值问题

林 皋<sup>1</sup>, 李 鹏<sup>1</sup>, 刘 俊<sup>1,2</sup>, 张 勇<sup>3</sup>, 王 峰<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学水利工程学院, 辽宁大连, 116024; 2. 上海交通大学海洋工程国家重点实验室, 上海 200240;  
3. 中国科学院合肥物质科学研究院核能安全技术研究所, 安徽合肥 230031)

**摘 要:** 等几何分析方法使得几何模型和分析模型能够用 NURBS 统一表达, 避免了模型转换过程, 但由于其分析域是由张量积面片构成, 很难处理截面形式复杂的多联通域问题. 裁剪造型等几何分析方法通过背景曲面和裁剪曲线将复杂带孔结构作为一个被 NURBS 曲线裁剪后的参数区域直接映射而成, 只需要一个参数空间就可以表示任意复杂的拓扑结构, 该方法既保留了传统等几何分析方法的优点, 又实现了对复杂多孔结构的处理. 本文将裁剪造型的等几何分析方法扩展到 TE 波的波导本征值问题, 对复杂多孔结构的截止波数进行有效求解, 并通过相应的数值算例验证方法的有效性和高精度性.

**关键词:** 波导本征值; 等几何分析; NURBS; 裁剪; 背景曲面; 多孔结构

**中图分类号:** TN925      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2016)10-2548-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.10.038

## Isogeometric Analysis with Trimming Technique for the Waveguide Eigenvalue Problem

LIN Gao<sup>1</sup>, LI Peng<sup>1</sup>, LIU Jun<sup>1,2</sup>, ZHANG Yong<sup>3</sup>, WANG Feng<sup>1</sup>

(1. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;  
2. State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;  
3. Hefei Institutes of Physical Science, Chinese Academy of Science, Hefei, Anhui 230031, China)

**Abstract:** The geometric model and analysis model can be uniformly described by NURBS in isogeometric analysis method, so the model transformation process is avoided. However, since the analysis domain of IGA should be composed of tensor-product patches, it is difficult to deal with the issue of complex multiply connected domains. IGA based on trimming technique is constructed by NURBS geometric modeling of underlying surface and trimming curve, and then, directly map a parameter space trimmed by NURBS curve as the complicated holed structure, only one parameter space is sufficient to describe arbitrary complex topology. The advantages and properties of conventional IGA are maintained, and also, the range application of IGA is enlarged. In this paper, IGA based on trimming technique is expanded to the TE waveguide eigenvalue problem. With the solution of cutoff wave number for complicated multiholes structure, the effectiveness and high accuracy of proposed method are demonstrated by corresponding numerical examples.

**Key words:** waveguide eigenvalue; isogeometric analysis; non-uniform rational B-spline (NURBS); trimming technique; underlying surface; multiholes structure

### 1 引言

波导本征值问题就是在波导控制方程<sup>[1]</sup>, 即亥姆霍兹方程中求解截止波数的问题, 这是微波技术领域和电磁工程中最基本的问题之一. 当代微波理论和技术必须能够满足高性能系统不断提出的各种苛刻需求, 也要不断探索新的波导形状. 因此有效求解复杂截

面形状波导的本征值问题更是成为波导研究中富有挑战性的课题.

波导本征值问题的求解方法主要有解析法、数值方法两大类. 解析法只适用于少数简单几何边界的波导本征值问题<sup>[2]</sup>. 数值方法主要有有限差分法<sup>[3]</sup>、有限元法<sup>[4]</sup>、边界元法<sup>[5]</sup>、比例边界有限元法<sup>[6]</sup>、无网格法<sup>[7]</sup>、等几何分析方法<sup>[8]</sup>等.

收稿日期: 2015-03-09; 修回日期: 2015-06-16; 责任编辑: 孙瑶

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 51409038, No. 51138001); 中国博士后科学基金 (No. 2013M530919, No. 2014T70251); 上海交通大学海洋工程国家重点实验室开放基金 (No. 1202); 中央高校基本科研业务费专项 (No. DUT15RC(4)23)

等几何分析 (IGA-IsoGeometric Analysis) 方法是由 Hughes 等人<sup>[9]</sup>提出的一种新型数值分析方法,该方法采用 NURBS<sup>[10]</sup> (Non-Uniform Rational B-Spline) 基函数和控制点,代替等参有限元分析方法中的插值多项式和节点.省略了耗时较多的自定义网格剖分过程,而且将几何模型中的高阶连续性保留到计算物理场中,提高了数值解的精度,同时节省了计算自由度.目前该方法已成功用于流体、固体、电磁、振动和裂纹扩展等问题的分析<sup>[11]</sup>.

但是,由于 NURBS 曲面片建立在张量积矩形参数区域,使得等几何分析方法不便于分析带孔结构,尤其是内部多孔结构. Cottrell 等人<sup>[11]</sup>提出的多块面片拼接 (Multiple Patches) 方法,把被分析的带孔结构用多块 NURBS 面片拼接而成,但对于多孔结构则非常不利于过程与程序的自动化.

基于裁剪造型的等几何分析方法则是把被分析的多孔结构作为一块由 NURBS 曲线裁剪后的参数区域直接映射而成的几何区域,只需要一个参数空间就可以表达任意复杂的几何模型.由裁剪曲线搜索出被裁剪单元后,采用专门的重构策略对被裁单元进行处理,可以直接利用几何模型的 NURBS 信息对带孔结构进行分析.

本文将裁剪造型的等几何分析方法用于求解多孔结构的波导本征值问题,以圆形和圆形多孔结构为数值算例,通过与解析解和有限元方法计算结果比较,此方法具有自由度少、精度高、收敛速度快的优点.

## 2 NURBS 基函数

二维 NURBS 基函数定义的  $p \times q$  次 NURBS 曲面表达式为<sup>[10]</sup>

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j}^{p,q}(u, v) P_{i,j} \quad (1)$$

其中二维 NURBS 基函数  $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$  定义为

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)} \quad (2)$$

式中  $P_{i,j} (i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n)$  构成了两个方向的控制点网格,  $\omega_{i,j}$  是权因子,  $N_{i,p}(u)$  和  $N_{j,q}(v)$  为定义在节点矢量  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p+1}\}$  和  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{m+q+1}\}$  上的  $p$  次和  $q$  次 B 样条基函数.

## 3 波导本征值问题的等几何分析方法推导

等几何分析方法的映射关系可由图 1 所示的简单结构进行说明,实体空间的单元由参数空间的单元映射而成,用下式表达为

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j}^{p,q}(u, v) P_{i,j} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{X}$  为实体坐标,  $(u, v)$  为参数坐标,  $P_{i,j}$  形成了控制网格, NURBS 基函数  $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$  将节点矢量所张成的矩形参数域映射为实体域.参数域上一个不具有重节点的胞腔  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$  直接映射为实体域中的一个 NURBS 单元,无须网格划分.等几何的模式构造变量场的本质仍然是传统等参元,即描述变量场的基函数采用与描述几何形体相同的基函数.

$$u^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e \quad (4)$$

其中,  $u^e$  表示实体空间 NURBS 单元内任一点的场变量,  $N_i (i=1, 2, \dots, ncp)$  表示与单元控制点相关联的基函数,  $\mathbf{N}^e = [N_1 I, N_2 I, \dots, N_{ncp} I]$ ,  $ncp$  表示单元相关联的控制点个数,  $d_i (i=1, 2, \dots, ncp)$  表示控制点变量,  $\mathbf{d}^e = \{d_1, d_2, \dots, d_{ncp}\}^T$ .

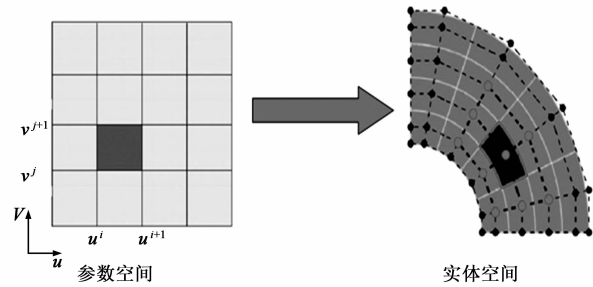


图1 NURBS单元

对于 TE 波,描述其波导本征值问题的控制方程为亥姆霍兹方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_c^2 \phi = 0 \quad (5)$$

式中  $\phi$  为纵向磁场强度,  $k_c$  为截止波数,  $k_c = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2$ ,  $\omega$  为频率,  $\mu$  为磁导率,  $\varepsilon$  为介电常数,  $\beta$  为相位常数.

TE 波对应的边界条件为:在域边界  $\partial\Omega$  上给定场值的方向导数.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} = 0 \quad (6)$$

采用 Galerkin 加权余量法对控制微分方程(3)进行处理,得出等几何分析方法的离散方程:

$$(\mathbf{K} - k_c^2 \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^e$  分别为 NURBS 单元集成的总体系数矩阵.

$$\mathbf{K}^e = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mathbf{B}^e(u, v)^T \mathbf{B}^e(u, v) |J| du dv \quad (8)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \mathbf{N}^e(u, v)^T \mathbf{N}^e(u, v) |J| du dv \quad (9)$$

$$\mathbf{B}^e(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial N_2^e(u, v)}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial N_{ncp}^e(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial N_1^e(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial N_2^e(u, v)}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial N_{ncp}^e(u, v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^e(u, v) = \{N_1^e(u, v) \quad N_2^e(u, v) \quad \cdots \quad N_{ncp}^e(u, v)\}^T$$

#### 4 基于裁剪造型的等几何分析方法

裁剪曲面等几何分析原理:用一条或多条 NURBS 曲线  $C(t)$  将背景曲面  $S_0(u, v)$  的参数区域进行裁剪,不再保持其参数空间的完整性,这样参数空间就出现了孔洞和非矩形单元,然后映射出物理空间中的裁剪曲面  $S(u, v)$ ,只用一个参数空间就表达了复杂的几何模型。

曲线  $C(t)$  的参数方向决定了裁剪曲面的保留区域和裁剪区域。本文采用的方向准则为:将内部区域裁剪掉的曲线为顺时针方向,将外部区域裁剪掉的曲线为逆时针方向。如图 2 表示的 1/4 圆,正方形网格  $S_0(u, v)$  为背景曲面,裁剪曲线  $C(t)$ ,圆点表示控制点。裁剪曲线  $C(t)$  穿过的单元称为裁剪单元,其他未被穿过的单元称为非裁剪单元。沿曲线方向左侧区域为保留区域,右侧为抛弃区域。落在保留区域的非裁剪单元称为普通单元,落在抛弃区域的非裁剪单元称为无效单元。与普通单元和裁剪单元相关联的控制点称为激活控制点(图 2 实心圆点),与无效单元相关联的控制点称为非激活控制点(图 2 空心圆点)。

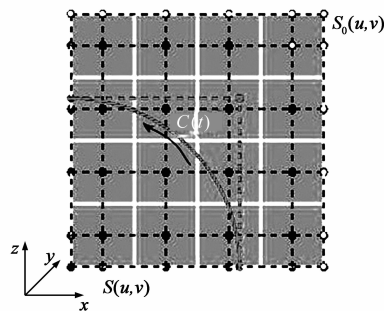


图2 1/4裁剪圆面

裁剪曲面  $S(u, v)$  的确定需要两方面的信息,首先,需要确定 NURBS 曲面单元与裁剪曲线  $C(t)$  在参数域和实体域的交点;其次,需要确定  $S(u, v)$  各个单元的类型。

NURBS 曲面单元与裁剪曲线的交点,即  $C(t_i^{int}) = S(u_i^{int}, v_i^{int})$ ,本文中交点搜索通过反演和投影计算实现。

交点确定之后,则可通过交集来判别单元的类型,如图 3 所示。对裁剪后曲面  $S(u, v)$  的每个单元分配一个单元类型,无效单元为 -1,普通单元为 0。裁剪单元为正数,并根据其裁剪后单元的性质,分别为三角形

(3),四边形(4),五边形(5),如图 4 所示。

曲面  $S(u, v)$  的单元类型确定后,对不同类型的裁剪单元进行重构,即对裁剪单元采用一组新的局部控制点和基函数进行描述,并且要确定新的控制点与背景曲面单元相关联控制点间的关系。以四边形剪切单元为例,如图 5 所示。实心圆点表示背景曲面单元的关联控制点,方块点表示裁剪单元局部重构的关联控制点。

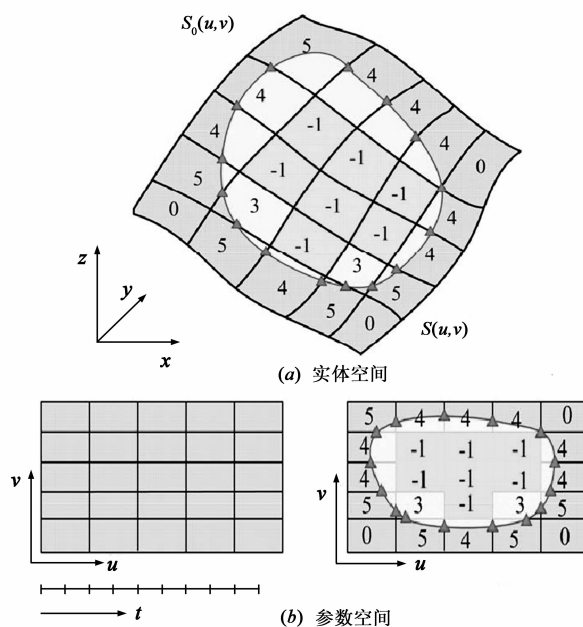


图3 曲面单元类型和交点

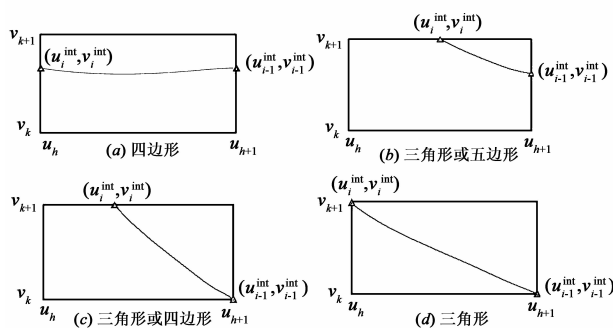


图4 裁剪曲面单元的类型

局部重构单元的控制点  $P_j'$  需要通过对裁剪单元进行采样获得,采样点如图 5 中空圆点所示,采样点处的场值在两种基函数的描述下是等价的,即

$$\sum_{i=1}^{n_0} N_i(u_m, v_m) P_i = \sum_{j=1}^{n_1} N_j'(u_m', v_m') P_j \quad (10)$$

式(10)中,左端是对背景曲面单元的描述,对应参数  $(u_m, v_m)$ ,右端是对重构单元的描述,对应参数  $(u_m', v_m')$ 。  $n_0$  和  $n_1$  分别表示背景单元和局部重构单元相对应的控制点个数,选取  $s$  个采样点,并将式(10)写成关于

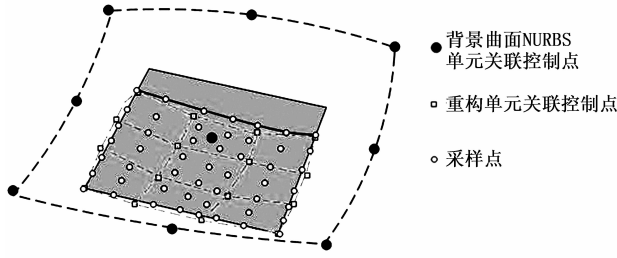


图5 裁剪NURBS单元的局部重构

采样点的方程形式

$$N \cdot P = N' \cdot P' \quad (11)$$

$P, P'$  和  $N, N'$  分别表示背景曲面单元和重构 NURBS 单元的关联控制点和基函数在采样点处的取值。

由式(11)可求得重构单元的控制点,即

$$P' = T \cdot P \quad (12)$$

$$T = (N')^{-1} \cdot N \quad (13)$$

其中  $T$  为重构单元控制点和背景单元控制点之间的转换矩阵。

三角形裁剪单元可以看作是四边形裁剪单元一条边退化为一个点的特殊情况,五边形裁剪单元则可分解为两个四边形单元,这两种情况仍可以采用与四边形剪切单元相同的策略处理。

无效单元不参与计算分析,普通单元按照正常 NURBS 单元进行分析。但是,由于对裁剪单元进行重构而引入了局部控制点,以及原有的整体 NURBS 单元的控制点,同时存在着两类控制点。相应的,此时也存在两类控制点变量,即局部控制点变量和整体控制点变量。

单元集成时整体控制点变量可以集成到整体向量中,但裁剪单元是局部独立重构的,局部控制点变量不能参与集成。需要将局部控制点变量映射为整体控制点变量。在裁剪单元上由整体控制点变量和局部点控制变量分别表示的场变量具有等价性。即,

$$N^{e, \text{global}} \cdot d^{e, \text{global}} = N^{e, \text{local}} \cdot d^{e, \text{local}} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} d^{e, \text{local}} &= (N^{e, \text{local}})^{-1} \cdot N^{e, \text{global}} \cdot d^{e, \text{global}} \\ &= T \cdot d^{e, \text{global}} \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $d^{e, \text{global}}$  和  $d^{e, \text{local}}$  分别表示整体控制点变量和局部控制点变量。  $N^{e, \text{global}}$  和  $N^{e, \text{local}}$  分别表示整体 NURBS 单元和重构单元相关联的基函数。代入弱化方程中整理可得

$$K^{e, \text{global}} = T^T K^{e, \text{local}} T \quad (16)$$

$$M^{e, \text{global}} = T^T M^{e, \text{local}} T \quad (17)$$

其中,

$$K^{e, \text{local}} = \int_{V^{e, \text{local}}} (B^{e, \text{local}})^T B^{e, \text{local}} dV,$$

$$M^{e, \text{local}} = \int_{V^{e, \text{local}}} (N^{e, \text{local}})^T N^{e, \text{local}} dV.$$

然后集成所有裁剪单元和普通单元,得到裁剪等几何分析方法的总体系数矩阵。

## 5 数值算例

本节选用圆形和多孔结构波导作为算例,并与有限元法计算结果进行对比,有限元法通过 ANSYS 软件, HF118 二次单元实现。

### 5.1 基于裁剪的圆形波导

选取圆形波导的 TE 波为计算模型,空气介质,介电常数为 1,该计算模型的截止波数具有解析解<sup>[12]</sup>。背景曲面与裁剪曲线的初始控制点坐标及权重如表 1 所示,图 6(a)所示为背景曲面  $S_0(u, v)$  和裁剪曲线  $C(t)$ , 裁剪曲线  $C(t)$  的参数方向为逆时针方向。背景曲面  $S_0(u, v)$  的节点矢量  $U$  和  $V$ ,如式(18)所示,两个参数方向的次数设置为 2 次。裁剪曲线  $C(t)$  也取为 2 次,节点向量  $W$  如式(19)所示。

$$\begin{aligned} U &= \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \\ V &= \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$W = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \quad (19)$$

将初始等几何模型细分为  $4 \times 4$ ,如图 6(b)。裁剪曲线只参与裁剪单元识别和重构,并未参与分析计算,不进行细分。裁剪等几何模型的网格如图 7(a)所示,深色和浅色分别表示裁剪单元和保留单元。一个典型的裁剪单元如图 7(b)所示,为了与背景曲面单元对比,重构单元两个张量积方向的次数均比背景单元高 1 次。

首先考察裁剪等几何方法与 FEM 都在较少 d. o. f (degree of freedom) 时的计算精度,裁剪圆的重构等几何模型的单元数和控制点数分别为 16 和 36,如图 7(a),为表征波导曲面,FEM 中单元数和节点数分别取为 54 和 187。两种方法计算前五阶截止波数与解析解的对比如表 2 所示。

表 1 背景曲面与裁剪曲线的初始控制点坐标及权重列表

	$(i, j)$	$P_{i, j}$	$w_{i, j}$	$(i, j)$	$P_{i, j}$	$w_{i, j}$	$(i, j)$	$P_{i, j}$	$w_{i, j}$
	(1,0)	(a/2, 0)	1.00	(1,1)	(a/2, a/2)	1.00	(1,2)	(a/2, a)	1.00
	(2,0)	(a, 0)	1.00	(2,1)	(a, a/2)	1.00	(2,2)	(a, a)	1.00
裁剪曲线	$i$	$P_i$	$w_i$	$i$	$P_i$	$w_i$	$i$	$P_i$	$w_i$
	0	(a/2 + R, a/2)	1.00	1	(a/2 + R, a/2 + R)	$\sqrt{2}/2$	2	(a/2, a/2 + R)	1.00
	3	(a/2 - R, a/2 + R)	$\sqrt{2}/2$	4	(a/2 - R, a/2)	1.00	5	(a/2 - R, a/2 - R)	$\sqrt{2}/2$
	6	(a/2, a/2 - R)	1.00	7	(a/2 + R, a/2 - R)	$\sqrt{2}/2$	8	(a/2 + R, a/2)	1.00

表 2 裁剪圆截止波数对比表

阶数	解析解	裁剪 IGA (d. o. f = 36)	裁剪 IGA (d. o. f = 88)	FEM 解 (d. o. f = 187)	FEM 解 (d. o. f = 3336)	裁剪 IGA 误差 (d. o. f = 36)	裁剪 IGA 误差 (d. o. f = 88)	FEM 误差 (d. o. f = 187)	FEM 误差 (d. o. f = 3336)
1	1.8412	1.8423	1.8421	1.8090	1.8256	0.0597%	0.0519%	1.7480%	0.8464%
2	3.0542	3.0601	3.0592	2.8839	3.0903	0.1932%	0.1648%	5.5771%	1.1808%
3	3.8317	3.8084	3.8206	3.6802	3.8760	0.6129%	0.2896%	3.9540%	1.1560%
4	4.2012	4.27334	4.1824	4.0054	4.2538	1.7174%	0.4463%	4.6603%	1.2523%
5	5.3176	5.41411	5.3485	5.0597	5.3504	1.8158%	0.5833%	4.8490%	0.6177%

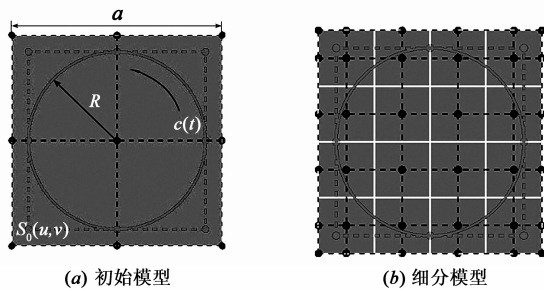


图6 初始和细分的裁剪等几何模型

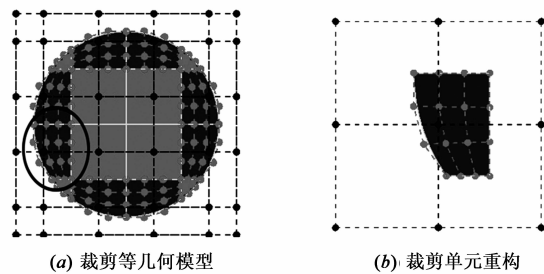


图7 裁剪圆的等几何模型及其单元重构

表 2 数据反映,36 个控制点时裁剪 IGA 方法解的精度已经高于 FEM187 个节点的求解精度,并且在较少的控制点数量下,裁剪 IGA 方法求出的截止波数已能较好的逼近解析解. 增加两种方法下计算模型的网格数量,裁剪 IGA 方法增加到 52 个单元和 88 个控制点时,计算精度会进一步提高,最大误差仅为 0.5833%. 不断增加 FEM 的网格数量,FEM 的精度也会大幅度提高,在单元数 1075 和节点数 3336 达到与裁剪 IGA 方法相同的精度,但是此时裁剪 IGA 方法所使用的自由度数量约为 FEM 的 1/10,具体误差分布对比如图 8. 可见裁剪 IGA 方法在截面形式简单的波导本征值求解上精度优势明显,并且在较少的计算自由度下就能得到很高的精度.

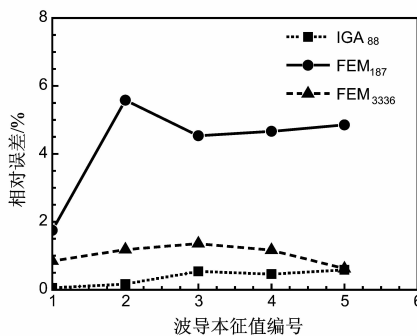


图8 圆形波导裁剪IGA解与FEM解误差对比

### 5.2 圆形多孔结构波导

考察四种圆孔结构,分别为单孔,双孔,三孔,四

孔,即 H1、H2、H3、H4,裁剪 IGA 模型分别如图 9 所示,介电常数取为 1,分别对应一个裁剪等几何模型和一个传统有限元模型. 圆孔半径设置为 0.3cm,背景曲面为边长 2.8cm 的正方形,两个参数方向的次数都设置为 2,在 Matlab 的 PDE Toolbox 中将模型无限细分计算得到的结果作为参考解. 表 3 表示在 TE<sub>10</sub> 模态下,H1 至 H4,裁剪 IGA 方法和 FEM 均在较少自由度数时的计算精度对比,其中 H1 至 H4 裁剪 IGA 模型计算控制点数

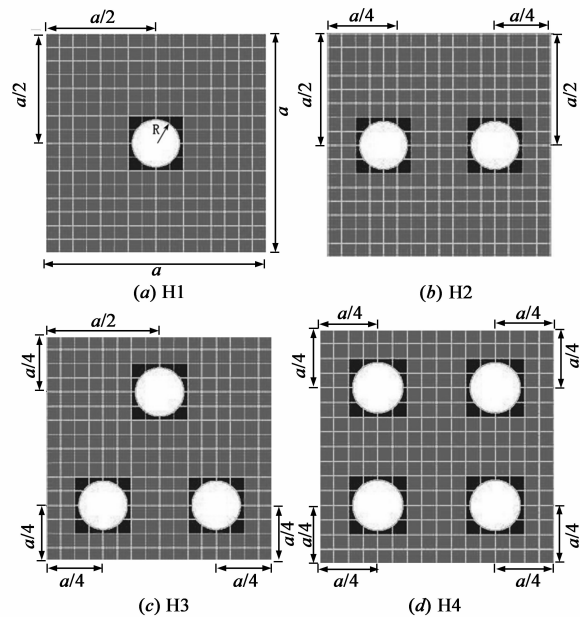


图9 圆形多孔结构裁剪等几何模型

均为 324 个,为表征波导曲面,FEM 分别取 1109(H1),1031(H2),1332(H3),1449(H4)个节点.

表 3 截止波数对比表

孔洞分布	参考值	裁剪 IGA (d. o. f = 324)	FEM		FEM 误差
			(d. o. f = 1109) (d. o. f = 1031) (d. o. f = 1332) (d. o. f = 1449)	裁剪 IGA 误差	
H1	1.0488	1.0462	1.1282	0.2479%	7.5706%
H2	0.9763	0.9697	0.9114	0.6760%	6.6516%
H3	1.0065	1.0056	1.1030	0.0894%	9.5877%
H4	1.0407	1.0409	0.9649	0.0792%	7.2818%

表 3 数据反映,TE10 模式下,H1 至 H4 中裁剪 IGA 方法均较 FEM 精度约高 10 倍,而且在 H3,H4 这两种较多孔洞条件下,精度优势更为明显.图 10 给出了在较少的计算自由度下 H1 至 H4 前 5 阶截止波数相对误差的变化趋势,裁剪 IGA 方法在 324 个控制点数时 H1 至 H4 下最大误差分别为 0.9932%、0.8139%、

0.7764% 和 0.8115%,已具有很高的计算精度.而此时 FEM 在 1109(H1),1031(H2),1332(H3),1449(H4)个节点下最大误差分别为 8.69%、8.23%、11.64% 和 10.56%.对 FEM 网格进行加密,提高其计算精度,为达到与裁剪 IGA 方法相当的计算精度,H1 至 H4 下 FEM 分别需要 3156(H1)、3199(H2)、4397(H3)、3350(H4)个节点,此时 FEM 的最大误差改进为 1.6399%、1.5231%、2.7427% 和 1.7307%,但裁剪 IGA 方法所使用的自由度数量仍约为 FEM 的 1/10,如图 10 所示.可见裁剪 IGA 方法在多孔复杂结构波导本征值问题的求解上也具有消耗自由度少、精度高的优点.

将 H1 至 H4 裁剪等几何模型细分一次,得到不同控制点数量下前 10 阶截止波数的相对误差比较,如图 11 所示,324 个控制点时前 10 阶的最大误差为 0.9932%(H1),0.933%(H2)和 1.068%(H3),0.8115%(H4)分别减小到 0.0206%(H1),0.036%(H2)和 0.0308%(H3),0.0369%(H4),可见该方法收敛速度也较快.

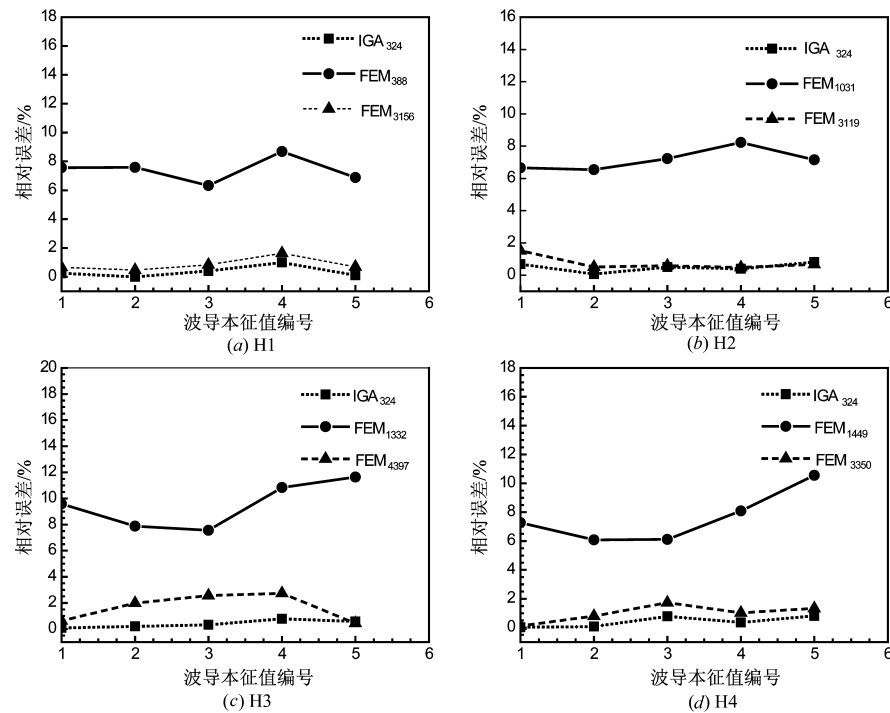


图 10 H1至H4裁剪IGA解与FEM解误差对比

## 6 结论

本文将基于裁剪造型的等几何分析方法扩展到多孔结构的波导本征值问题的求解:(1)通过对裁剪圆和多孔结构,给出了裁剪等几何分析方法求解波导本征值问题的基本原理和实施过程;(2)数值算例表明:裁

剪等几何分析方法在多孔结构波导本征值问题的求解中是可行和有效,并且能在较少的节点数下获得较高的计算精度;(3)裁剪等几何分析方法虽然能直接利用几何模型的 NURBS 信息对带孔结构进行分析,但需要采用专门的策略处理裁剪单元和裁剪边界,这在一定程度上增加了计算的复杂度.

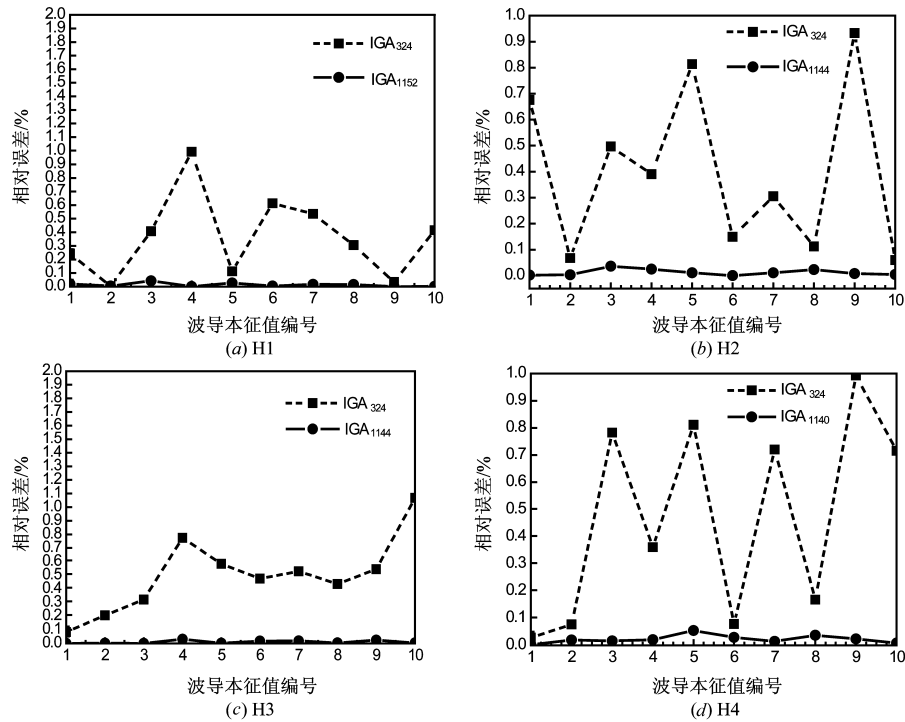


图11 H1至H4裁剪IGA方法收敛性比较

## 参考文献

- [1] 王秉中. 计算电磁学[M]. 北京:科学出版社,2002.  
Wang Bing-zhong. Computational Electromagnetics [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese)
- [2] 郑勤红, 谢福瑶, 林为干. 波导本征值问题的多极理论分析[J]. 电子学报, 2003, 31(2): 51-55.  
Zheng Qin-hong, Xie Fu-yao, Lin Wei-gan. Multipole theory analysis of waveguide eigenvalue problem [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(2): 51-55. (in Chinese)
- [3] Guan Jenn Ming, Su Ching Chuan. Analysis of metallic waveguides with rectangular boundaries by using the finite-difference method and the simultaneous iteration with the Chebyshev acceleration[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1995, 43(2): 374-382.
- [4] 李融林, 倪光正, 俞集辉. B样条有限元法解波导本征值问题[J]. 电子学报, 1997, 25(3): 5-9.  
Li Rong-lin, Ni Guang-zheng, Yu Ji-hui. B-spline finite element solution of waveguide eigenvalue problems [J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(3): 5-9. (in Chinese)
- [5] 周平. 任意截面波导本征值问题的边界元分析[J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 1997, 20(4): 93-98.  
Zhou Ping. The boundary-element method of waveguide eigenvalue problem of arbitrary cross section [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 1997, 20(4): 93-98. (in Chinese)
- [6] Lin G, Liu J, Li J B, et al. Scaled boundary finite element approach for waveguide eigenvalue problem [J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2011, 5(12): 1508-1515.
- [7] 张淮清, 俞集辉. 波导本征值问题分析的径向基函数方法[J]. 电子学报, 2008, 36(12): 2433-2438.  
Zhang Huai-qing, Yu Ji-hui. Radial basis function method for the eigen analysis of waveguide [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(12): 2433-2438. (in Chinese)
- [8] 张勇, 林皋, 刘俊, 胡志强. 波导本征值问题的等几何分析方法[J]. 应用力学学报, 2012, 29(2): 113-119.  
Zhang Yong, Lin Gao, Liu Jun, et al. The isogeometric analysis for eigen problem of waveguide [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2012, 29(2): 113-119. (in Chinese)
- [9] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41): 4135-4195.
- [10] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book (Monographs in Visual Communication) [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [11] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA [M]. New York: Wiley, 2009.
- [12] Balanis C. Advanced Engineering Electromagnetics [M]. New York: Wiley, 1989.

作者简介



林 皋 男,1929 年 1 月出生,江西丰城人,大连理工大学水利工程学院教授、博士研究生导师,中国科学院院士. 主要研究方向为大坝、核电结构、地下结构地震响应分析与安全评价,以及等几何分析在力学边值问题中的应用.  
E-mail: gaolin@ dlut. edu. cn



李 鹏(通讯作者) 男,1987 年 5 月出生,辽宁辽阳人,大连理工大学水利工程学院博士研究生. 主要研究方向为等几何分析及比例边界等几何的研究及其应用于力学和电磁学分析.  
E-mail: brteibr521@ 163. com