

多领航者网络化系统的动态群集运动

王付永, 杨洪勇, 韩辅君

(鲁东大学信息与电气工程学院, 山东烟台 264025)

摘 要: 针对时变动态切换拓扑下具有多个领航者的网络化系统群集运动问题, 本文分别给出了一阶/二阶网络化系统的控制算法, 并对所提出的控制算法进行了理论分析. 运用现代控制理论、代数图论和矩阵论等分析工具, 研究了当通信拓扑为动态联合连通时, 系统可以实现群集运动, 即系统的运动轨迹都收敛到由多个领航者构成的凸包中. 通过对系统信息拓扑连通部分的进一步研究, 得到了二阶网络化系统群集运动的约束条件. 最后应用仿真实验验证了结论的正确性.

关键词: 多领航者; 网络化系统; 群集运动; 联合连通

中图分类号: TP27 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)07-1751-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.07.033

Flocking Motion of Dynamic Networked Systems with Multiple Leaders

WANG Fu-yong, YANG Hong-yong, HAN Fu-jun

(College of Information and Electrical Engineering, Ludong University, Yantai, Shandong 264025, China)

Abstract: Control algorithms are presented for the first-order and second-order networked systems with multiple leaders and time-varying dynamic switching topologies. By applying modern control theory and algebraic graph theory, the cooperative motion of networked systems with jointly-connected topologies is studied, and the flocking motion control of networked systems is obtained, i. e., trajectories of multi-agent systems are converged to the convex hull formed by multiple leaders. Through further researching the connected portion of networked systems, the constraint condition of flocking motion control for second-order networked systems is achieved. Finally, a simulation example is given to verify the effectiveness of the conclusion.

Key words: multiple leaders; networked systems; flocking motion; jointly-connected

1 引言

近年来, 基于生物学启发的网络化系统分布式协调问题引起了众多研究者的广泛关注. 在生物学、社会行为学、计算机图形学、通信网络等分布式控制领域的应用, 大大推动了对网络化系统协同运动的深入研究.

网络化系统的一致性问题是分布式协同控制的一个重要研究方向^[1-3]. 包容控制是一种具有多领航者的类一致性问题, 其目的在于通过设计跟随者的控制协议使得跟随者最终收敛到领航者围成的某一目标区域内(领航者围成的凸包内). 具有单领航者的包容控制实际上是一致性跟踪问题^[4-6], 具有多领航者的群集运动控制主要包括一阶网络化系统^[7-10]、二阶网络化系统^[11-13]和非线性系统^[14]. 多领航者网络化系统的群集

运动控制, 就是具有多个领航者的网络化系统的包容控制问题.

文献[7]首先研究了无向连通网络中一阶网络化系统的包容控制问题, 并利用偏差分方程的方法证明了控制算法的有效性. 文献[8]讨论了一阶网络化系统的包容控制问题, 并证明了当网络拓扑连通时系统可以实现包容控制. 文献[9]研究了有向网络中固定拓扑和切换拓扑两种情况下一阶网络化系统的包容控制问题, 并给出了系统收敛的充要条件. 文献[10]研究了一阶线性网络化系统的分布式包容控制问题, 提出了一种基于动态输出反馈的控制算法. 文献[11]针对具有动态领航者的二阶网络化系统, 分别提出了连续渐近包容控制算法和离散渐近包容控制算法. 文献[12]研究了随机切换拓扑下二阶网络化系统的包容控制问

题,并提出了一种基于不可约马尔科夫链信息拓扑的包容控制算法.文献[13]研究了二阶网络化系统的分布式包容控制问题,并给出了系统收敛的充分必要条件.文献[14]研究了非线性网络化系统的姿态包容控制问题,并提出了两种有限时间收敛的包容控制算法.

在实际应用中,通信拓扑结构通常是变化的,不连通的.在网络拓扑为联合连通条件下,文献[15]研究了一阶时滞网络化系统的一致性问题,并扩展到了二阶时滞网络化系统^[16].文献[17]研究了时滞系统和非时滞系统两种情况下具有动态领航者的二阶网络化系统的一致性跟踪问题.文献[18]则研究了非线性网络化系统的一致性跟踪问题.因此在系统拓扑不连通的情况下,研究具有多个领航者的网络化系统的群集运动控制问题具有十分重要的意义.

本文研究在联合连通条件下由多个领航者引导的一阶和二阶网络化系统的群集运动问题.本文的创新点在于假设系统信息拓扑不连通的情况下,提出了具有多领航者的网络化系统在联合连通条件下的群集运动控制算法,应用矩阵理论和现代控制理论,研究了算法的收敛性.

2 代数图论

设 $G = (V, \omega, A)$ 是 n 个节点的权重无向图, $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 为一个顶点(或节点)集合, $\omega \subseteq V \times V$ 为一个边的集合, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为权重邻接矩阵. 对于 $\forall i \in V$, $a_{ii} = 0$; 对于 $\forall i, j \in V, i \neq j$, 若 $(i, j) \in \omega$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则, $a_{ij} = 0$. 节点 i 的邻居集合定义为 $N_i = \{j \in V \mid (i, j) \in \omega\}$. 定义 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为图 G 的度矩阵, 其中 $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$. 权重图 G 的 Laplacian 矩阵定义为: $L = D - A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

定义 1 如果网络化系统中的一个自主体至少存在一个邻接成员, 则称为跟随者, 否则称为领航者.

定义 2^[16] 设拓扑图 G_1, G_2, \dots, G_m 具有相同的顶点集 V , 其并集记为 G_{1-m} , 它的节点集是 V , 边集是所有图 G_1, G_2, \dots, G_m 的边的并集, 它的第 i 个节点和第 j 个节点间的链接权重是图 G_1, G_2, \dots, G_m 第 i 个节点和第 j 个节点间所有的链接权重之和. 称 G_1, G_2, \dots, G_m 为联合连通, 如果它们的联合图 G_{1-m} 是连通的.

考虑一组无穷有序的有界连续时间段 $[t_r, t_{r+1}), r = 1, 2, \dots$, 且 $t_1 = 0, t_{r+1} - t_r \leq T_1, T_1 > 0$. 假设每个时间段 $[t_r, t_{r+1})$ 中存在一组非重叠的有限子序列 $[t_{r,j}, t_{r,j+1}), j = 1, 2, \dots, m_r$, 且系统拓扑在 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 内保持不变, 其中 $t_{r,1} = t_r, t_{r,m_r+1} = t_{r+1}, t_{r,j+1} - t_{r,j} \geq T_2, T_2 > 0$. 令 $\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \Gamma, \Gamma = \{1, 2, \dots, N\}$ 为一个分段切换常函数, N 为总拓扑数. 本文研究由 n 个跟随者和 m 个

领航者组成的分布式网络化系统. 系统在 t 时刻的信息拓扑图记为 $G_{\sigma(t)}$, 相应的 Laplacian 矩阵记为 $L_{\sigma(t)}$. 其中, 由 n 个跟随者构成的信息拓扑图记为 $G_{F\sigma(t)}$, 相应的 Laplacian 矩阵记为 $L_{F\sigma(t)}$.

3 一阶多领航者网络化系统群集运动控制算法分析

考虑一个由 n 个跟随者和 m 个领航者构成的网络化系统. 跟随者集合与领航者集合分别记为 $F = \{1, 2, \dots, n\}$ 和 $Y = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$. 假设一阶网络化系统动态方程描述为:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m \quad (1)$$

其中, $x_i(t) \in \mathbb{R}, u_i(t) \in \mathbb{R}$ 分别为网络化系统中第 i 个自主体的状态和控制输入.

假设 1 由 n 个跟随者和 m 个领航者构成的网络化系统拓扑在非重叠时间区间 $[t_r, t_{r+1}), r = 1, 2, \dots$ 内为联合连通的.

假设 2 非重叠时间区间 $[t_{r,j}, t_{r,j+1}) \subset [t_r, t_{r+1}), j = 1, 2, \dots, m_r$ 内, 分布式网络化系统存在一连通子集. 连通子集中任意一个跟随者 i , 至少与一个领航者 j 之间存在一条路径.

假设一阶网络化系统控制协议为:

$$\begin{cases} u_i(t) = - \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_i(t) - x_j(t)], & i \in F \\ u_i(t) = 0, & i \in Y \end{cases} \quad (2)$$

定义 3 图 G 的 Laplacian 矩阵为 $L, L = \begin{bmatrix} L_F & L_{FY} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$, 其中 L_F 为 n 阶方阵, L_{FY} 为 $n \times m$ 阶矩阵.

根据定义 3, 系统(1)可描述为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -L\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t), \dots, x_{n+m}(t)]^T$.

引理 1^[14] 对于无向图 G_F , 若假设 2 成立, 则 L_F 为正定阵, $-L_F^{-1}L_{FY}$ 为非负矩阵且每行元素和为 1.

定义 4^[9] 设集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为实向量空间 $V \subseteq \mathbb{R}$ 的子集, X 的凸包定义为 $CO(X) = \{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \}$.

引理 2 令 $\mathbf{x}_F = [x_1, \dots, x_n]^T, \mathbf{x}_Y = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T$, 若有 $\mathbf{x}_F \rightarrow -L_F^{-1}L_{FY}\mathbf{x}_Y$, 则网络化系统可以实现包容控制.

证明 由引理 1 可知, $-L_F^{-1}L_{FY}$ 为非负矩阵且每行元素和为 1, 满足定义 4 中的条件, 且 $\mathbf{x}_Y = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^T$, 则 $-L_F^{-1}L_{FY}\mathbf{x}_Y$ 位于领航者围成的凸包内. 因此若有 $\mathbf{x}_F \rightarrow -L_F^{-1}L_{FY}\mathbf{x}_Y$, 那么网络化系统就可以实现包

容控制.

假设系统通信拓扑图 G_σ 在时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 内有 $n_\sigma \geq 1$ 个连通部分,且连通成分的子拓扑图记为 $G_\sigma^i, i = 1, 2, \dots, n_\sigma$. 图 G_σ^i 内有 $d_\sigma^i \geq 1$ 个节点,其中领航者 $d_{Y\sigma}^i$ 个,跟随者 $d_{F\sigma}^i$ 个,满足 $d_\sigma^i = d_{Y\sigma}^i + d_{F\sigma}^i$. 矩阵块 L_σ^i 为拓扑图 G_σ^i 相对应的 Laplacian 矩阵. 根据 L_σ 的定义,存在一个置换矩阵 E_σ ,使得

$$E_\sigma^T L_\sigma E_\sigma = \text{diag} \{ L_\sigma^1, L_\sigma^2, \dots, L_\sigma^{n_\sigma} \} \quad (4)$$

$$\mathbf{x}^T(t) E_\sigma = [\mathbf{x}_{\sigma 1}^T(t), \mathbf{x}_{\sigma 2}^T(t), \dots, \mathbf{x}_{\sigma d_\sigma^i}^T(t)] \quad (5)$$

其中 $\mathbf{x}_{\sigma d_\sigma^i}^T(t) = [\mathbf{x}_{\sigma d_\sigma^i 1}^T(t), \dots, \mathbf{x}_{\sigma d_\sigma^i d_\sigma^i}^T(t), \dots, \mathbf{x}_{\sigma d_\sigma^i d_\sigma^i}^T(t)]$, $i = 1, 2, \dots, n_\sigma$.

在动态切换拓扑下网络化系统式(3)可描述为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -L_\sigma \mathbf{x}(t) \quad (6)$$

其中, $L_\sigma = \begin{bmatrix} L_{F\sigma} & L_{FY\sigma} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_F^T(t), \mathbf{x}_Y^T(t)]^T$, $\mathbf{x}_F(t)$ 表示跟随者的状态, $\mathbf{x}_Y(t)$ 表示领航者的状态, $\mathbf{x}_F(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $\mathbf{x}_Y(t) = [x_{n+1}(t), \dots, x_{n+m}(t)]^T$.

在每个时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 内,系统(6)可以被分解为 n_σ 个子系统,即

$$\dot{\mathbf{x}}_\sigma^i(t) = -L_\sigma^i \mathbf{x}_\sigma^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_\sigma \quad (7)$$

其中, $\mathbf{x}_\sigma^i(t) = [\mathbf{x}_{F\sigma}^{iT}(t), \mathbf{x}_{Y\sigma}^{iT}(t)]^T$,

$$\mathbf{x}_{F\sigma}^{iT}(t) = [x_{\sigma 1}^i(t), x_{\sigma 2}^i(t), \dots, x_{\sigma d_{F\sigma}^i}^i(t)]^T,$$

$$\mathbf{x}_{Y\sigma}^{iT}(t) = [x_{\sigma d_{F\sigma}^i+1}^i(t), \dots, x_{\sigma d_\sigma^i}^i(t)]^T,$$

$$L_\sigma^i = \begin{bmatrix} L_{F\sigma}^i & L_{FY\sigma}^i \\ \mathbf{0}_{d_{F\sigma}^i \times d_{F\sigma}^i} & \mathbf{0}_{d_{Y\sigma}^i \times d_{Y\sigma}^i} \end{bmatrix}.$$

定理 1 考虑由 n 个跟随者和 m 个领航者构成的一阶动态网络化系统,且满足动态方程式(1),在假设 1 和假设 2 条件下,则系统在控制协议(2)下能够实现渐近包容控制.

证明 由式(7),得

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{F\sigma}^i(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{F\sigma}^i & L_{FY\sigma}^i \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) \\ \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix},$$

即有 $\dot{\mathbf{x}}_{F\sigma}^i(t) = -L_{F\sigma}^i \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) - L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(t), i = 1, \dots, n_\sigma$ (8)

在时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 内解式(8)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) &= e^{-L_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t_{r,j}) \\ &+ \int_{t_{r,j}}^t e^{-L_{F\sigma}^i(t-\tau)} d\tau \cdot (-L_{FY\sigma}^i) \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(t_{r,j}) \\ &= e^{-L_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} [\mathbf{x}_{F\sigma}^i(t_{r,j}) + L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(t_{r,j})] \\ &- L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(t_{r,j}) \end{aligned}$$

其中 $t \in [t_{r,j}, t_{r,j+1})$. 由于考虑静态的领航者,即 $\dot{\mathbf{x}}_{Y\sigma}^i(t_{r,j}) = \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(0)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) &= e^{-L_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} [\mathbf{x}_{F\sigma}^i(t_{r,j}) + L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(0)] \\ &- L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(0) \end{aligned} \quad (9)$$

根据引理 1, $L_{F\sigma}^i$ 为正定阵,即 $L_{F\sigma}^i$ 的所有特征根均具有正实部,因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-L_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} \rightarrow 0$, 进而得到 $\mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) \rightarrow -L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(0)$.

在任意区间 $[t_{r,j}, t_{r,j+1}) \subset [t_r, t_{r+1}), j = 1, 2, \dots, m_r$ 内, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) \rightarrow -L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(0), i = 1, 2, \dots, n_\sigma$. 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时,系统在连续时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 和 $[t_{r,j+1}, t_{r,j+2})$ 内(即 $[t_{r,j}, t_{r,j+2})$ 内)的连通成分,仍然满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{F\sigma}^i(t) \rightarrow -L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i \mathbf{x}_{Y\sigma}^i(0), i = 1, 2, \dots, n_\sigma$. 因此以此类推,根据假设 1,系统的拓扑图在每个时间段 $[t_r, t_{r+1})$ 内联合连通,当 $t \rightarrow \infty$ 时,则有 $\mathbf{x}_F(t) \rightarrow -L_F^{-1} L_{FY} \mathbf{x}_Y(0)$, 由引理 2 可知一阶网络化系统实现了渐近包容控制.

4 二阶多领航者网络化系统群集运动控制算法分析

假设网络化系统由 n 个跟随者和 m 个领航者组成,其二阶网络化系统动态方程描述为:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= p_i(t), \quad \dot{p}_i(t) = u_i(t), \quad (10) \\ i &= 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m \end{aligned}$$

其中, $q_i(t) \in \mathbb{R}, p_i(t) \in \mathbb{R}, u_i(t) \in \mathbb{R}$ 分别为网络化系统中第 i 个自主体的位置信息、速度信息和控制输入. 假设二阶网络化系统控制协议为:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\alpha p_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [\beta (q_i(t) - q_j(t)) \\ &+ \gamma (p_i(t) - p_j(t))], \quad i \in F \end{aligned} \quad (11)$$

$$p_i(t) = 0, \quad i \in Y$$

其中, α, β, γ 均为常数.

定义 5 矩阵 $H = \begin{bmatrix} H_F & H_{FY} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$, 其中,

$$H_{FY} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} & \mathbf{0}_{n \times m} \\ -\beta L_{FY} & -\gamma L_{FY} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & I_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$H_F = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & I_n \\ -\beta L_F & -\alpha I_n - \gamma L_F \end{bmatrix}, L_F \text{ 为 } n \text{ 阶方阵}, L_{FY} \text{ 为 } n$$

$\times m$ 阶矩阵.

根据式(10)和式(11),二阶网络化系统可描述为:

$$\dot{\xi}(t) = H_\sigma \xi(t) \quad (12)$$

其中,

$\xi(t) = [\xi_F^T(t), \xi_Y^T(t)]^T, \xi_F(t) = [q_F^T(t), p_F^T(t)]^T,$
 $\xi_Y(t) = [q_Y^T(t), p_Y^T(t)]^T, q_F(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T,$
 $q_Y(t) = [q_{n+1}(t), \dots, q_{n+m}(t)]^T, p_F(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]^T,$
 $p_Y(t) = [p_{n+1}(t), \dots, p_{n+m}(t)]^T, \xi_F(t)$ 表示跟随者的信息, $\xi_Y(t)$ 表示领航者的信息, $q_F(t)$ 和 $q_Y(t)$ 分别表示跟随者和领航者的位置信息, $p_F(t)$ 和 $p_Y(t)$ 分别表示

跟随者和领航者的速度信息. 采用与式(4)相同的处理方法, 存在一个置换矩阵 E_σ , 使得

$$E_\sigma^T I_n E_\sigma = \text{diag} \{ I_{d_\sigma^1}, I_{d_\sigma^2}, \dots, I_{d_\sigma^{n_\sigma}} \} \quad (13)$$

$$q^\top(t) E_\sigma = [q_\sigma^{1\top}(t), q_\sigma^{2\top}(t), \dots, q_\sigma^{n_\sigma\top}(t)] \quad (14)$$

$$p^\top(t) E_\sigma = [p_\sigma^{1\top}(t), p_\sigma^{2\top}(t), \dots, p_\sigma^{n_\sigma\top}(t)] \quad (15)$$

其中,

$$q_\sigma^{i\top}(t) = [q_{\sigma 1}^i(t), \dots, q_{\sigma d_{i\sigma}}^i(t), q_{\sigma d_{i\sigma}+1}^i(t), \dots, q_{\sigma d_\sigma}^i(t)],$$

$$p_\sigma^{i\top}(t) = [p_{\sigma 1}^i(t), \dots, p_{\sigma d_{i\sigma}}^i(t), p_{\sigma d_{i\sigma}+1}^i(t), \dots, p_{\sigma d_\sigma}^i(t)],$$

$i = 1, 2, \dots, n_\sigma$.

在每个时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 内, 系统(12)可以被分解为 n_σ 个子系统, 即

$$\dot{\xi}_\sigma^i(t) = H_\sigma^i \xi_\sigma^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_\sigma \quad (16)$$

其中,

$$\xi_\sigma^i(t) = [\xi_{F\sigma}^{i\top}(t), \xi_{Y\sigma}^{i\top}(t)]^\top,$$

$$\xi_{F\sigma}^{i\top}(t) = [q_{F\sigma}^{i\top}(t), p_{F\sigma}^{i\top}(t)]^\top,$$

$$\xi_{Y\sigma}^{i\top}(t) = [q_{Y\sigma}^{i\top}(t), p_{Y\sigma}^{i\top}(t)]^\top,$$

$$q_{F\sigma}^{i\top}(t) = [q_{\sigma 1}^i(t), q_{\sigma 2}^i(t), \dots, q_{\sigma d_{i\sigma}}^i(t)],$$

$$q_{Y\sigma}^{i\top}(t) = [q_{\sigma d_{i\sigma}+1}^i(t), \dots, q_{\sigma d_\sigma}^i(t)],$$

$$p_{F\sigma}^{i\top}(t) = [p_{\sigma 1}^i(t), p_{\sigma 2}^i(t), \dots, p_{\sigma d_{i\sigma}}^i(t)],$$

$$p_{Y\sigma}^{i\top}(t) = [p_{\sigma d_{i\sigma}+1}^i(t), \dots, p_{\sigma d_\sigma}^i(t)],$$

$$H_\sigma^i = \begin{bmatrix} H_{F\sigma}^i & H_{FY\sigma}^i \\ \mathbf{0} & B_\sigma^i \end{bmatrix},$$

$$B_\sigma^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & I_{d_{i\sigma}} \\ \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} \end{bmatrix},$$

$$H_{F\sigma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & I_{d_{i\sigma}} \\ -\beta L_{F\sigma}^i & -\alpha I_{d_{i\sigma}} - \gamma L_{F\sigma}^i \end{bmatrix},$$

$$H_{FY\sigma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} \\ -\beta L_{FY\sigma}^i & -\gamma L_{FY\sigma}^i \end{bmatrix}.$$

定理 2 考虑由 n 个跟随者和 m 个领航者构成的二阶动态网络化系统, 且满足动态方程式(10), 在假设 1 和假设 2 条件下, 且对任意的 $t \in (0, +\infty)$ 满足

$$\begin{cases} \alpha > \max_k \{ \gamma \mu_k \}, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \beta > 0 \end{cases} \quad (17)$$

则系统在控制协议(11)下能够实现渐近包容控制. 其中, μ_k 表示矩阵 $(-L_{F\sigma})$ 的特征值.

证明 由式(16), 得

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{F\sigma}^i(t) \\ \dot{\xi}_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{F\sigma}^i & H_{FY\sigma}^i \\ \mathbf{0} & B_\sigma^i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi_{F\sigma}^i(t) \\ \xi_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix}, \text{ 即有}$$

$$\dot{\xi}_{F\sigma}^i(t) = H_{F\sigma}^i \xi_{F\sigma}^i(t) + H_{FY\sigma}^i \xi_{Y\sigma}^i(t) \quad (18)$$

$$\dot{\xi}_{Y\sigma}^i(t) = B_\sigma^i \xi_{Y\sigma}^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_\sigma \quad (19)$$

由式(18), 得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{F\sigma}^i(t) \\ \dot{p}_{F\sigma}^i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & I_{d_{i\sigma}} \\ -\beta L_{F\sigma}^i & -\alpha I_{d_{i\sigma}} - \gamma L_{F\sigma}^i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{F\sigma}^i(t) \\ p_{F\sigma}^i(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} \\ -\beta L_{FY\sigma}^i & -\gamma L_{FY\sigma}^i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{Y\sigma}^i(t) \\ p_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix}$$

由式(19), 得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{Y\sigma}^i(t) \\ \dot{p}_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & I_{d_{i\sigma}} \\ \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} & \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{Y\sigma}^i(t) \\ p_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix},$$

即, $\dot{q}_{Y\sigma}^i(t) = p_{Y\sigma}^i(t)$, $\dot{p}_{Y\sigma}^i(t) = 0$.

在时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 内解式(18)可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_{F\sigma}^i(t) \\ p_{F\sigma}^i(t) \end{bmatrix} &= e^{H_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} \begin{bmatrix} q_{F\sigma}^i(t_{r,j}) \\ p_{F\sigma}^i(t_{r,j}) \end{bmatrix} \\ &+ \int_{t_{r,j}}^t e^{H_{F\sigma}^i(t-\tau)} d\tau H_{FY\sigma}^i \begin{bmatrix} q_{Y\sigma}^i(t) \\ p_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix} \\ &= e^{H_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} \begin{bmatrix} q_{F\sigma}^i(t_{r,j}) \\ p_{F\sigma}^i(t_{r,j}) \end{bmatrix} \\ &+ (e^{H_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} H_{F\sigma}^{i-1} - H_{F\sigma}^{i-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times 1} \\ -\beta L_{FY\sigma}^i q_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中, $p_{Y\sigma}^i(t) = \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times 1}$, $q_{Y\sigma}^i(t) = q_{Y\sigma}^i(0)$,

$$H_{F\sigma}^{i-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} L_{F\sigma}^{i-1} - \frac{\gamma}{\beta} I_{d_{i\sigma}} & -(\beta L_{F\sigma}^i)^{-1} \\ I_{d_{i\sigma}} & \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times d_{i\sigma}} \end{bmatrix}.$$

若 $H_{F\sigma}^i$ 的所有特征值均具有负实部, 则有 $e^{H_{F\sigma}^i(t-t_{r,j})} \rightarrow 0$, 进而得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_{F\sigma}^i(t) \\ p_{F\sigma}^i(t) \end{bmatrix} &\rightarrow -H_{F\sigma}^{i-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times 1} \\ -\beta L_{FY\sigma}^i q_{Y\sigma}^i(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i q_{Y\sigma}^i(0) \\ \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times 1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

下面讨论 $H_{F\sigma}^i$ 的特征值.

由引理 1 得, $-L_{F\sigma}^i$ 的特征值均为负实数, 记为 $\mu_{\sigma d_{i\sigma}}^i \leq \dots \leq \mu_{\sigma 2}^i \leq \mu_{\sigma 1}^i < 0$. 设 $H_{F\sigma}^i$ 的特征值为 λ_σ^i , 则

$$\begin{aligned} \det(\lambda_\sigma^i I_{2 \times d_{i\sigma}} - H_{F\sigma}^i) &= \det[\lambda_\sigma^i I_{d_{i\sigma}} + (\alpha I_{d_{i\sigma}} + \gamma L_{F\sigma}^i) \lambda_\sigma^i + (\beta L_{F\sigma}^i)] \\ &= \prod_{l=1}^{d_{i\sigma}} [\lambda_\sigma^{i2} + (\alpha - \gamma \mu_{\sigma l}^i) \lambda_\sigma^i - \beta \mu_{\sigma l}^i] \end{aligned}$$

$$l = 1, 2, \dots, d_{i\sigma}$$

记 $f(\lambda_\sigma^i) = \lambda_\sigma^{i2} + (\alpha - \gamma \mu_{\sigma l}^i) \lambda_\sigma^i - \beta \mu_{\sigma l}^i$. 当满足 $-\beta \mu_{\sigma l}^i > 0$ (其中 $\mu_{\sigma l}^i < 0$) 且 $(\alpha - \gamma \mu_{\sigma l}^i) > 0$ 时, 即 $\alpha > \gamma \mu_{\sigma l}^i$ 且 $\beta > 0$ 时, $f(\lambda_\sigma^i)$ 的特征根均具有负实部. 根据式(4), 显然有 $\max\{\mu(-L_{F\sigma})\} \geq \max\{\mu(-L_{F\sigma}^i)\}$, 其中 $\mu(-L_{F\sigma})$ 和 $\mu(-L_{F\sigma}^i)$ 分别表示矩阵 $-L_{F\sigma}$ 和 $-L_{F\sigma}^i$ 的特征值. 因此根据式(17), $H_{F\sigma}^i$ 的特征值均具有负实部, 即得

$$\begin{bmatrix} q_{F\sigma}^i(t) \\ p_{F\sigma}^i(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -L_{F\sigma}^{i-1} L_{FY\sigma}^i q_{Y\sigma}^i(0) \\ \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times 1} \end{bmatrix}.$$

任意区间 $[t_{r,j}, t_{r,j+1}) \subset [t_r, t_{r+1}), j = 1, 2, \dots, m_r$, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{F\sigma}^i(t) \\ \mathbf{p}_{F\sigma}^i(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{F\sigma}^{i-1} \mathbf{L}_{FY\sigma}^i \mathbf{q}_{Y\sigma}^i(0) \\ \mathbf{0}_{d_{i\sigma} \times 1} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n_{\sigma}.$$

因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统在连续时间段 $[t_{r,j}, t_{r,j+1})$ 和 $[t_{r,j+1}, t_{r,j+2})$ 内 (即 $[t_{r,j}, t_{r,j+2})$ 内) 的连通成分, 仍然满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{F\sigma}^{i'}(t) \\ \mathbf{p}_{F\sigma}^{i'}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{F\sigma}^{i'-1} \mathbf{L}_{FY\sigma}^{i'} \mathbf{q}_{Y\sigma}^{i'}(0) \\ \mathbf{0}_{d_{i'\sigma} \times 1} \end{bmatrix}, i' = 1, \dots, n'_{\sigma}.$$

因此以此类推, 根据假设 1, 系统的拓扑图在每个时间段 $[t_r, t_{r+1})$ 内联合连通, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 则有 $\begin{bmatrix} \mathbf{q}_F(t) \\ \mathbf{p}_F(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_F^{-1} \mathbf{L}_{FY} \mathbf{q}_Y(0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, 由引理 2 可知二阶网络化系统实现了渐近包容控制。

5 实例分析

考虑 3 个领航者和 6 个跟随者, 领航者集合和跟随者集合分别为 $Y = \{7, 8, 9\}$ 和 $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 其动态拓扑图如图 1 所示. 假定系统互连拓扑图在时刻 $t = kT, k = 0, 1, \dots$, 在拓扑图 $G1 \sim G4$ 中随机地切换, T 取为 0.5s. 系统互连拓扑图的连接权重下图中已标记, 未标记的默认为 1.

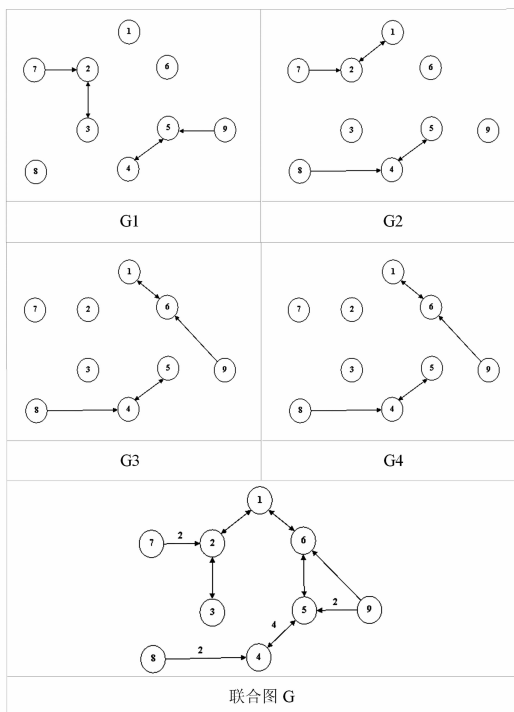


图1 6个跟随者和3个领航者构成的系统信息拓扑图

5.1 一阶网络化系统数值仿真

跟随者和领航者的初始位置分别取为 $x_1(0) = (0, 0), x_2(0) = (2, 0), x_3(0) = (4, 0), x_4(0) = (6, 0),$

$x_5(0) = (8, 0), x_6(0) = (10, 0); x_7(0) = (4, 6), x_8(0) = (4, 8), x_9(0) = (6, 8)$. 系统的运动轨迹如图 2, 可见各跟随者的位置最终渐近收敛到了由三个领航者的位置所围成的平面三角形区域内, 即一阶多领航者网络化系统实现了群集运动。

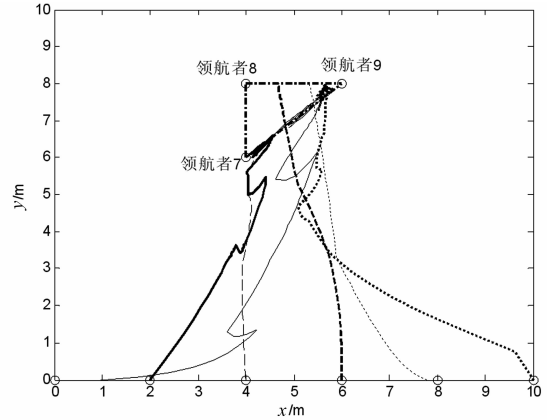


图2 一阶系统中跟随者的位置变化轨迹

5.2 二阶网络化系统数值仿真

根据系统联合拓扑图 G , 得系统矩阵 L_F . 经计算, L_F 的特征值约为: 10.4630, 4.7517, 3.7539, 2.2568, 1.1940, 0.5806. 取 $\beta = 1.0 > 0, \gamma = -0.2, \alpha = 2.1$. 跟随者的初始位置及初始速度分别取为 $q_1(0) = (1, 1), q_2(0) = (2, 2), q_3(0) = (2, 7), q_4(0) = (3, 5), q_5(0) = (5, 6), q_6(0) = (7, 3), p_1(0) = (2, 6), p_2(0) = (3, 8), p_3(0) = (4, 6), p_4(0) = (5, 5), p_5(0) = (6, 3), p_6(0) = (9, 7)$. 静态领航者的初始位置取为 $q_7(0) = (8, 10), q_8(0) = (10, 8), q_9(0) = (10, 10)$. 系统的运动轨迹如图 3, 可见各跟随者的位置最终渐近收敛到了由三个领航者的位置所围成的平面三角形区域内, 即二阶多领航者网络化系统实现了群集运动。

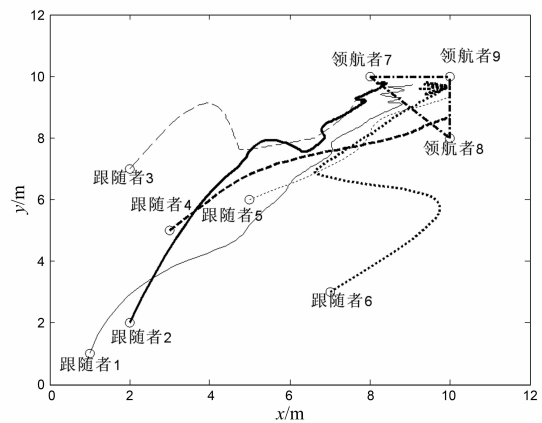


图3 二阶系统中跟随者的位置变化轨迹

6 结论

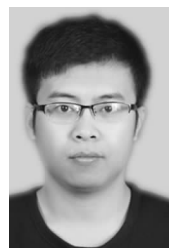
本文研究了在联合连通条件下具有多个静态领航

者的网络化系统的群集运动问题,并分别针对一阶/二阶系统提出了相应的控制算法.运用控制理论及代数图论等理论工具分别对动态网络化系统进行了收敛性分析,给出了一阶系统的一般收敛性条件以及二阶系统收敛性对控制增益系数的约束条件.仿真示例分别对一阶系统和二阶系统的理论结果进行了有效验证.

参考文献

- [1] Lin P, Jia Y M. Average-consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay [J]. *Physical A*, 2008, 387(1): 303 – 313.
- [2] 朱旭, 闫建国, 屈耀红. 高阶多智能体系统的一致性分析 [J]. *电子学报*, 2012, 40(12): 2466 – 2471.
Zhu Xu, Yan Jian-guo, Qu Yao-hong. Consensus analysis for high-order multi-agent systems [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(12): 2466 – 2471. (in Chinese)
- [3] Dai P P, Liu C L, Liu F. Consensus problem of heterogeneous multi-agent systems with time delay under fixed and switching topologies [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2014, 11(3): 340 – 346.
- [4] 杨洪勇, 田生文, 张嗣瀛. 具有领航者的时延多智能体系统的一致性 [J]. *电子学报*, 2011, 39(4): 872 – 876.
Yang Hong-yong, Tian Sheng-wen, Zhang Si-ying. Consensus of multi-agent systems with heterogeneous delays and leader-following [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(4): 872 – 876. (in Chinese)
- [5] 杨洪勇, 张玉玲, 等. 基于采样数据的时延多智能体系统的动态路径跟踪 [J]. *电子学报*, 2013, 41(9): 1760 – 1764.
Yang Hong-yong, Zhang Yu-ling, et al. Dynamic trajectory following of delayed multi-agent systems with sampling data [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(9): 1760 – 1764. (in Chinese)
- [6] Hu A H, Cao J D, Hu M F. Consensus of leader-following multi-agent systems in time-varying networks via intermittent control [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2014, 12(5): 969 – 976.
- [7] Ji M, Ferrari-Trecate G, Egerstedt M, Buffa A. Containment control in mobile networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1972 – 1975.
- [8] Hu J P, Yuan H W. Collective coordination of multi-agent systems guided by multiple leaders [J]. *Chinese Physics B*, 2009, 18(9): 3777 – 3782.
- [9] Cao Y C, Ren W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph [A]. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C]*. Piscataway: IEEE, 2009. 3014 – 3019.
- [10] Ma Q, Miao G Y. Distributed containment control of linear multi-agent systems [J]. *Neurocomputing*, 2014, 133(6): 399 – 403.
- [11] Liu H Y, Xie G M, Wang L. Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1415 – 1422.
- [12] Lou Y C, Hong Y G. Target containment control of multi-agent systems with random switching interconnection topologies [J]. *Automatica*, 2012, 48(2): 879 – 885.
- [13] 张安慧, 陈健, 等. 二阶系统包容控制算法及其收敛速度分析 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2014, 46(9): 1 – 8.
Zhang An-hui, Chen Jian, et al. Containment control protocol and its convergence speed analysis for double-integrator dynamics systems [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2014, 46(9): 1 – 8.
- [14] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2092 – 2099.
- [15] Lin P, Jia Y M. Multi-agent consensus with diverse time-delays and jointly-connected topologies [J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 848 – 856.
- [16] Lin P, Jia Y M. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3): 778 – 784.
- [17] Qi B, Lou K, Miao S, Cui B T. Second-order consensus of leader-following multi-agent systems with jointly connected topologies and time-varying delays [J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2014, 39(2): 1431 – 1440.
- [18] Xu W Y, Cao J D, et al. Leader-following consensus of non-linear multi-agent systems with jointly connected topology [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(6): 432 – 440.

作者简介



王付永 男, 1990 年 3 月出生, 山东济南人. 2013 年于鲁东大学获得学士学位, 现为鲁东大学硕士研究生, 主要研究领域为复杂网络、多智能体编队控制等.
E-mail: wangfuyong0323@163.com



杨洪勇 男, 1967 年 9 月出生, 山东庆云人. 2005 年毕业于东南大学自动化系, 获得博士学位, 现为鲁东大学信息与电气工程学院教授, 主要从事复杂网络、多智能体编队、智能控制、非线性系统控制等领域研究工作.
E-mail: hyyang@yeah.net