

多尺度量子谐振子算法的收敛特性

王 鹏¹, 黄 焱^{2,3}, 袁亚男^{2,3}, 都 政⁴, 安俊秀⁵

(1. 西南民族大学, 四川成都 610225; 2. 中国科学院成都计算机应用研究所, 四川成都 610041;
3. 中国科学院大学, 北京 100049; 4. 国家超级计算深圳中心, 广东深圳 518055;
5. 成都信息工程大学并行计算实验室, 四川成都 610225)

摘 要: 多尺度量子谐振子算法的收敛特性证明单一尺度的收敛过程不能同时获得良好的全局搜索精度和局部搜索精度, 只有采用多尺度迭代才能实现对全局最优解的逐步精确定位, 所以 MQHOA 算法利用量子谐振子收敛过程(QHO 收敛)和多尺度收敛过程(M 收敛)两个嵌套的收敛过程实现对优化问题的求解. QHO 收敛过程按谐振子波函数由高能态向低能态的变化实现搜索区域的收缩, M 收敛过程以 2 的倍数逐步减小尺度提高搜索精度. 算法的波函数收敛定理证明 QHO 收敛时采样分布为高斯分布. QHO 收敛过程算法模型中不同能级和不同尺度下的波函数图像为跟踪研究算法的迭代收敛过程提供了直观的具有物理含义的手段. 实验证明算法在收敛过程中基态波函数形态和基态时零点能的存在都与算法物理模型的理论描述和预言是高度吻合的.

关键词: 优化算法; 量子算法; 收敛; 量子谐振子

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)08-1988-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.08.031

Convergence Characteristics of Multi-scale Quantum Harmonic Oscillator Algorithm

WANG Peng¹, HUANG Yan^{2,3}, YUAN Ya-nan^{2,3}, DU Zheng⁴, AN Jun-xiu⁵

(1. Southwest University for Nationalities, Chengdu, Sichuan 610225, China;
2. Chengdu Institute of Computer Application, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610041, China;
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
4. National Supercomputing Center in Shenzhen, Shenzhen, Guangdong 518055, China;
5. Parallel Computing Laboratory, Chengdu University of Information Technology, Chengdu, Sichuan 610225, China)

Abstract: The convergence characteristics of Multi-scale Quantum Harmonic Oscillator Algorithm (MQHOA) prove that single scale convergence process cannot simultaneously get global search accuracy and local search accuracy. Only by multi-scale iteration can we gradually get the accurate position of the global optimum solution. MQHOA solves the optimization problem by two nested convergence processes: Quantum Harmonic Oscillator convergence process (QHO process) and Multi-scale convergence process (M process). QHO process shrinks the searching areas by the manner harmonic oscillator's wave function moving from high-energy state to low-energy state. M process shrinks the search areas by half cutting to improve searching precision. The wave function convergence theorem proves that sampling distribution is Gauss distribution when QHO process is convergent. By the wave function diagram in different energy level and scale, we can track the algorithm iterative process explicitly. The experiments demonstrate the shape of ground-state wave function, the existence of zero-point energy on the ground state, all of which exactly match the physical model of MQHOA.

Key words: optimization algorithm; quantum algorithm; convergence; quantum harmonic oscillator

1 引言

多尺度量子谐振子算法 (Multi-scale Quantum Harmonic Oscillator Algorithm, MQHOA) 是 2009 年提出的一种模仿量子谐振子波函数能级模型的优化算法^[1,2]. 文献[2]中的结果表明 MQHOA 算法能以较少的迭代次数准确地获得全局最优解, 对于 15 种 2 维标准测试函数分别进行 1000 次重复计算都能以 100% 的概率获得全局最优解, 同时对于高维测试函数如 6 维 Griewank 函数, 8 维 Rastrigrin 函数, 10 维 Levy 函数、Zakharov 函数、Sum Square 函数, 15 维 Sphere 函数也都能以 100% 的概率获得全局最优解. 该算法在 2009 年首次提出后 (最初版本称为模拟谐振子算法 SHO), 就引起了国内一些学者的关注和研究, 并将这一算法成功应用于多个领域^[3-7]. MQHOA 算法作为一种新的优化算法, 在近期研究中还成功地应用到组合优化、聚类及大规模数据中心相空间分析方法中, 预计将具有广阔的应用前景.

近年提出的与 MQHOA 结构最为相似的优化算法是文献[8,9]所提出的具有很好收敛性的量子粒子群算法 (QPSO), QPSO 取消了传统粒子群算法的速度参数并利用 δ 势阱所得到的量子波函数构造算法^[10], 而本文所提出的 MQHOA 算法则直接利用谐振子势阱所得到的量子波函数构造算法, 通过多尺度收敛实现对目标函数的全局搜索, 本文算法的收敛过程具有更为精巧的数学结构和更为明确的物理意义, 其收敛过程完全符合量子谐振子物理模型的预言.

MQHOA 算法的收敛过程是由量子谐振子收敛 (Quantum Harmonic Oscillator, QHO 收敛) 和多尺度收敛 (Multi-scale, M 收敛) 两个嵌套的迭代过程构成, 这两个收敛过程的特性决定了整个算法的性能, 本文从 MQHOA 算法的收敛特性入手, 发现 MQHOA 的收敛过程的理论和实验结果与量子谐振子物理模型所预言的收敛特性高度吻合.

2 MQHOA 算法的基本收敛过程和参数选择

2.1 MQHOA 算法的基本收敛过程

MQHOA 算法的收敛过程包含两个迭代步骤, 一个是在同一尺度下的量子谐振子收敛过程, 一个是多尺度收敛过程. QHO 收敛过程实现对搜索空间的逐步收缩定位, M 收敛过程实现对采样精度的逐步提高, MQHOA 算法从数学的角度也可以认为是一种多尺度高斯邻域采样群体算法. 由于整个算法在迭代过程中只采用了不同尺度下的高斯邻域采样, 使 MQHOA 与其他自然算法相比具有简单的数学描述和算法结构. 我

们在文献[2]中对 MQHOA 算法的基本过程进行了详细描述.

在 MQHOA 算法收敛过程中当前 k 个最优解位置的方差 σ_k 是一个十分重要的参数, 算法在 QHO 收敛时每一次迭代都是以 σ_k 作为收敛判据的. σ_k 在收敛过程中的变化反映了算法的整体收敛状态, 图 1 为二维 Levy 函数和 Griewank 函数求最优解迭代时 σ_k 与迭代次数的关系 (纵轴是以 2 为底的对数坐标). 对于 Levy 函数, 迭代总次数为 7, x 方向的 σ_k 在第 6 次迭代时为 0, y 方向的 σ_k 在第 7 次迭代时为 0, x 方向首先实现收敛, 而算法的结束条件是所有采样坐标位置都同时满足收敛条件, 所以算法总收敛次数为迭代次数最多的变量方向; 对于 Griewank 函数, 迭代总次数为 11, x 、 y 方向的 σ_k 均在第 11 次迭代时变为 0, 最后收敛时 σ_k 为 0 表明算法收敛时 k 个较优解的位置全部相同. σ_k 在整个收敛过程中通常都是逐步减小的, σ_k 与迭代次数的曲线关系能反映算法的基本收敛进程.

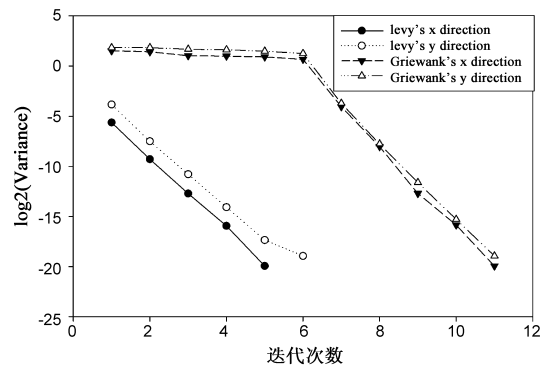
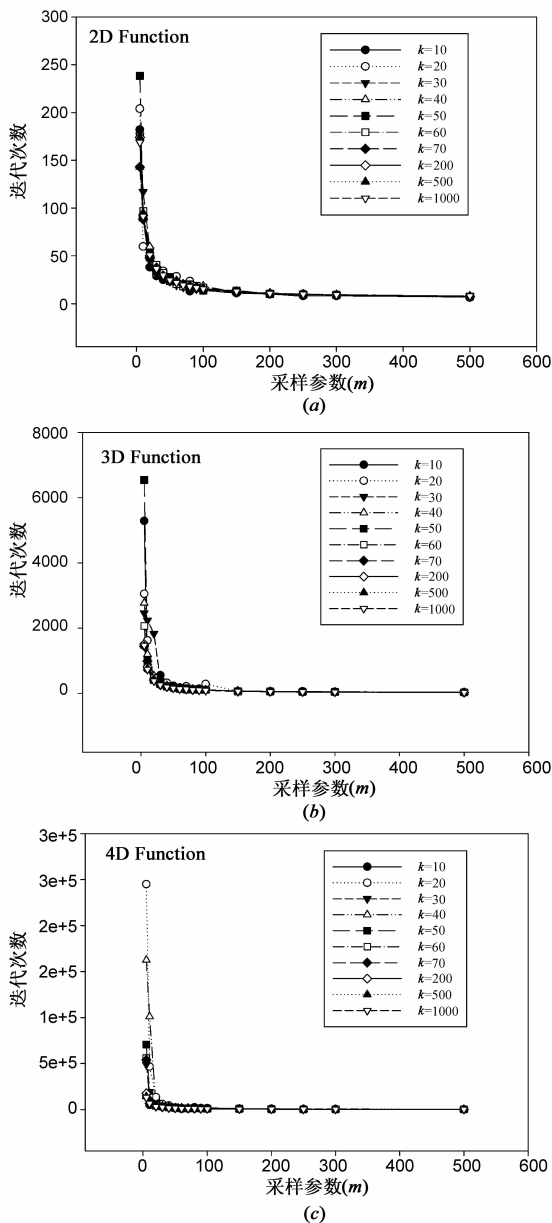


图1 MQHOA算法求解Levy函数和Griewank函数的收敛曲线

2.2 k 、 m 参数的选择对算法收敛性的影响

MQHOA 算法的控制参数非常少, 主要就是群体参数 k 和采样参数 m , 群体参数 k 是实验中算法每次迭代保留的高斯采样区域数量, 采样参数 m 是一个采样区域内按 $N(x_i, \sigma^2)$ 生成新的采样位置的个数, 适量的采样区域数量和采样区域内的采样密度是精确求解全局优化问题的前提, 作为 MQHOA 算法中的重要参数对算法的收敛特性有重要影响, 所以首先需要确定参数 k 、 m 的数值.

图 2(a)、(b)、(c) 所示为 2 维、3 维和 4 维 Griewank 函数在不同 k 、 m 组合下获得最优解时总的迭代次数变化曲线, 当 $m < 100$ 时, 随着 m 的增大, 每个采样区域采样密度逐渐增大, 算法迭代次数快速降低, 当 m 大于 100 后继续增大时, 迭代次数逐渐趋于稳定, $m > 100$ 后 m 的值对迭代次数的影响不大, 这说明对于一个高斯采样区域进行 100 次采样就能基本符合形成概率波函数的要求. 综合以上对 k 、 m 参数的收敛特征研究, 本文在实验中通常统一取 $k = 20$, $m = 100$. MQHOA 算法控

图2 不同 k, m 组合下算法的迭代次数

制参数少而且通常不需要人为进行调整正是由于算法具有简洁的数学结构。

3 MQHOA 算法的 QHO 收敛过程研究

3.1 QHO 收敛过程的收敛性分析

MQHOA 算法包含 QHO 和 M 两个收敛过程,但 M 收敛过程是确定的 2 倍收缩过程,因此只需证明 QHO 收敛过程在任意尺度 σ_s 下的收敛性即可。

QHO 收敛过程的收敛条件为 $\sigma_k \leq \sigma_s$,只需证明在 QHO 收敛过程中 k 个高斯邻域采样区域的中心点位置的标准差 σ_k 一定能满足收敛条件即可。

假设在 σ_s 尺度下 k 个高斯邻域采样区域的中心点

x_i 中当前最优解位置为 x_{\min} ,则根据高斯采样的定义, x_{\min} 所对应的采样区域在下一代迭代进行 m 个采样时,如果存在一个 ε 邻域,使在区间 $[x_{\min} - \varepsilon, x_{\min} + \varepsilon]$ 内的采样位置对应的目标函数值均小于其他 $k-1$ 个采样区域,根据采样函数的概率含义,则出现这一结果的概率可以用下式计算得到:

$$P = \int_{x_{\min}-\varepsilon}^{x_{\min}+\varepsilon} \frac{m}{\sqrt{\pi}\sigma_s} e^{-\frac{(x-x_{\min})^2}{\sigma_s^2}} dx \quad (1)$$

这一表达式表明如果存在这个 ε 邻域,根据算法对较优解的选择方法每次迭代时会按概率 P 使其它采样区域向以 x_{\min} 为中心位置的最优采样区域收敛,通过 QHO 收敛过程所有采样区域的中心位置 x_i 都将收敛到满足分布 $N(\bar{x}_i, \sigma_i^2)$ 的基态 (\bar{x}_i 为 x_i 的平均值),从而完成在尺度 σ_s 下的 QHO 收敛过程。

其中 ε 邻域不存在的情况为:被优化函数有多个全局最优位置,此时在某一尺度的 k 个采样中心有可能会向多个全局最优位置聚集,使在区间 $[x_{\min} - \varepsilon, x_{\min} + \varepsilon]$ 内的采样函数值均小于其他 $k-1$ 个采样区域的条件有可能无法满足,从而 $\sigma_k \leq \sigma_s$ 的 QHO 收敛条件也无法满足, QHO 收敛过程将无法退出并进入下一个尺度的迭代。

上面的分析表明 MQHOA 的基本算法在目标函数有多个全局最优解时是有可能不收敛的,但在一些应用场合我们反而需要算法能找到多个全局最优解,甚至是找到多个极值区域。如在聚类应用中就希望算法能找到多个可能的聚类区域。

3.2 QHO 收敛过程中的波函数收敛定理

在 QHO 收敛过程中我们把每次迭代时 k 个标准差为 σ 的高斯采样函数的叠加称为算法的波函数,归一化的算法波函数定义如下式:

$$\psi_{\text{QHO}}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma k} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{\sigma^2}} \quad (2)$$

算法波函数的概率分布 $\psi_{\text{QHO}}(x)$ 就是对目标函数在定义域上进行采样的概率分布,单尺度量子谐振子算法迭代过程中标准差 σ 的值保持不变,算法对最小值的搜索只能在一个尺度上进行,算法波函数在收敛过程中将呈现出与量子谐振子波函数相似的波函数能级图像。

在 QHO 迭代过程中算法波函数都扮演了重要的角色,算法的采样概率分布、算法向量子基态单一高斯分布的收敛、算法的量子隧道效应都是在波函数的作用下形成的,具有概率含义的算法波函数反映了量子谐振子算法的收敛过程与其物理模型是非常吻合的,波函数直观地描述了算法的运行状态。

定理 1 (波函数收敛定理) 算法在 σ_s 尺度 QHO 收敛时的基态波函数近似为高斯分布 $N(\bar{x}_i, \sigma_s^2)$ 。

证明 在 σ_s 尺度下算法的波函数为 $\psi_{\text{QHO}}(x)$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s k}} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_s^2}}, \text{QHO 收敛时满足条件 } \sigma_k \leq \sigma_s,$$

此时 k 个采样中心位置 x_i 的标准差小于等于 σ_s , 在尺度 σ_s 条件下表明 x_i 聚集在以 \bar{x}_i 为中心的较小区域, 可以近似地认为 $x_i \approx \bar{x}_i$.

因此在尺度 σ_s 下 QHO 过程收敛到基态, 满足 $\sigma_k \leq \sigma_s$ 时可以得出:

$$\psi_{\text{QHO}}^0(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s k}} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_s^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_s^2}}$$

上式就是高斯分布 $N(x_i, \sigma_s^2)$, 定理得证.

波函数收敛定理表明, 在尺度 σ_s 下 QHO 收敛到基态收敛时波函数将迭加为近似的单一高斯分布 $N(x_i, \sigma_s^2)$, 根据波函数收敛定理每一个尺度下的 QHO 收敛过程都会使搜索区域缩小一倍, 这一收敛状态与量子谐振子物理模型所描述的收敛过程是完全一致的, 波函数收敛定理描述了在尺度 σ_s 下 QHO 收敛时的基态波函数形态, 这一结果在后面的实验中也得到了证实.

3.3 QHO 收敛过程中的能量变化

算法的物理模型表明 QHO 收敛过程就是系统能级从高能态不断降低到基态的过程, 为了研究算法在 QHO 收敛过程中的能量变化情况, 可以对 QHO 迭代中的能量定义如下:

$$E_{\text{QHO}} = \sum_{i=1}^k \frac{f(x_{i1}^n, x_{i2}^n, \dots, x_{im}^n)}{k} - f_{\min} \quad (3)$$

其中 $f(*)$ 为目标函数, $(x_{i1}^n, x_{i2}^n, \dots, x_{im}^n)$ 为 m 维函数在第 n 次迭代中的高斯采样中心, m 为目标函数的维度, f_{\min} 为目标函数的理论最小值, 简单地讲能量 E_{QHO} 就是当前 k 个最优采样位置所对应目标函数值的平均值与理论最优值的差. 图 3 为尺度 $\sigma_s = 0.625$ 时, 对 Griewank, Levy 和 Beale 三种测试函数进行 QHO 迭代时的能量与迭代次数的关系, 图中描述了三种函数的能量在 QHO 收敛过程中由高能态向基态的变化过程.

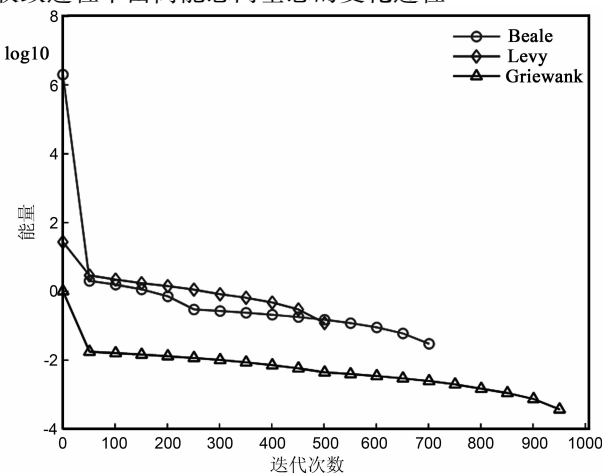


图 3 能量 E_{QHO} 与迭代次数的关系

从图 3 中可以看到随着 QHO 迭代的进行, 三种测试函数的能量都呈现出逐步减少的趋势, 这与算法物理模型所描述的从高能态向基态变化的过程一致. 在图中三种测试函数的能量变化曲线都有一个共同的特点, 在基态时能量都不等于零. 量子力学证明谐振子在基态时的能量确实是不等于 0 的, 量子系统中存在零点能, 如谐振子的零点能为 $\frac{\hbar\omega}{2}$, 零点能的存在是海森堡测不准关系所导致的必然结果, 算法的物理模型预言了算法零点能的存在. QHO 收敛到基态时能量不为零正好与算法的物理模型是符合的. 零点能用 E_{QHO}^0 来表示, 可以对算法 QHO 收敛过程中的零点能定义如下:

定义 算法的零点能 E_{QHO}^0 为 QHO 在某一尺度收敛到基态时的能量 E_{QHO} .

E_{QHO}^0 的大小与当前的尺度 σ_s 有关, 随着尺度的减小零点能的大小也随着减小.

根据零点能的定义在尺度 σ_s 下 QHO 收敛到基态时零点能的理论值可以由下式计算:

$$E_{\text{QHO}}^0 = \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_s^2}} dx - f_{\min} \quad (4)$$

零点能的理论值其实就是基态时采样区域内目标函数的高斯加权平均值与目标函数最小值的差, 通常来讲 σ_s 越大 E_{QHO}^0 越大.

3.4 QHO 收敛过程的波函数特性

MQHOA 算法的物理模型认为在同一尺度的 QHO 收敛过程中可以观察到与量子谐振子相似的不同能级的波函数图像. 图 4 中所示为对 2 维 Griewank 函数在尺度 $\sigma_s = 0.625$ 进行 QHO 迭代时 x 方向的波函数投影.

图 4 中算法不同能级的波函数与物理模型中所预言的波函数图像非常相似, 图 4 中最下面的曲线 $\psi_{\text{QHO}}^0(x)$ 是 QHO 收敛过程的基态, 此时零点能 $E_{\text{QHO}}^0 = 0.000371$, $\psi_{\text{QHO}}^0(x)$ 曲线近似等于高斯分布 N

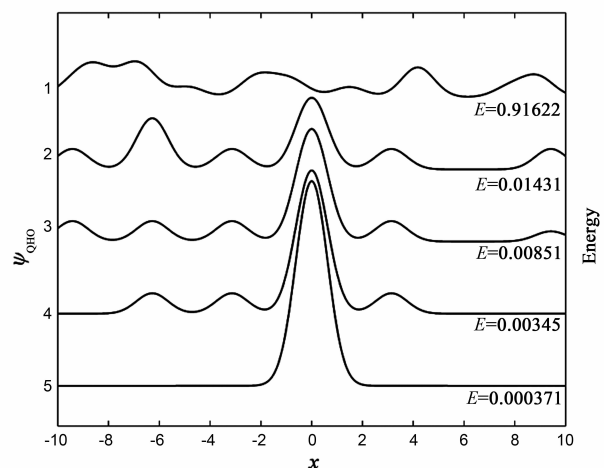


图 4 QHO 过程中不同能级的波函数 $\psi_{\text{QHO}}(x)$

(0, 0.625²), 这一结果从实验上证明了算法的波函数收敛定理. 基态时最优解将以较大的概率出现在基态波函数 $\psi_{QHO}^0(x)$ 采样中心点附近, 此时解的搜索区域收缩到基态波函数 $\psi_{QHO}^0(x)$ 分布的采样区域.

4 MQHOA 算法的 M 收敛过程研究

4.1 M 收敛过程分析

MQHOA 算法的测不准关系认为只有采用多尺度下的 QHO 迭代过程才能实现对最优解的精确搜索, M 收敛过程就是多尺度收敛过程, 当算法在上一个尺度收敛到基态后, 根据波函数收敛定理, 算法的采样搜索区域将被收缩到 $N(\bar{x}_i, \sigma_i^2)$ 的高斯采样邻域, 此时算法需要对该高斯邻域进行更为精确的采样. 这一迭代过程与小波中的多尺度分析非常相似, 同时高斯函数已被证明可以在小波分析中作为尺度函数, 小波分析中的双尺度方程如下:

$$\varphi(x) = \sum_n c_n \varphi(2x - n) \tag{5}$$

双尺度方程提示我们在 M 收敛过程中为了更精确地进行采样并保证信息的完整可以在每次尺度 M 迭代时将采样概率函数收缩 1 倍. 由于 MQHOA 算法所使用的采样概率函数为高斯函数, 可以得到以下定理.

定理 2 (尺度变换定理): 高斯函数收缩 1 倍与标准差 σ 减小 1 倍是等效的.

证明 根据双尺度方程当 $\varphi(x)$ 为高斯函数时, $\varphi(2x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{(2x)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{x^2}{2(\frac{\sigma}{2})^2}}$, 与 $N(0, (\frac{\sigma}{2})^2)$

相等, 这说明高斯函数尺度收缩一倍等效于 σ 减小

一倍.

根据这一定理在算法设计时可以通过改变高斯函数的 σ 参数来实现采样函数尺度的变化, 从而实现对目标函数更为精确的采样和探查.

M 迭代的基本操作为: 在尺度 σ_s 下 QHO 收敛到基态时, 根据波函数收敛定理对目标函数采样的概率波函数由于相互迭加, 近似为高斯分布 $N(\bar{x}_i, \sigma_s^2)$, 在进行尺度变化时用 k 个满足 $N(x_i, (\frac{\sigma_s}{2})^2)$ 分布的高斯采样区域来替代当前尺度的基态波函数, 从而实现在更高分辨率下对目标函数的搜索. 以此类推每降低一个尺度 σ_s 的值除以 2, 直到 σ_s 的值小于指定精度 σ_{\min} 时停止, 并输出目标函数当前最优解的位置.

在 M 收敛过程中上一个尺度 σ_s 的基态通过尺度的变化成为尺度 $\frac{\sigma_s}{2}$ 的高能态, 这一变化是由于采样精度的提高使在大尺度下无法分辨的能级在小尺度下被提取出来, 随着尺度的减小相应基态的零点能也随之减小, 这一过程也是量子力学中测不准关系的结果.

4.2 M 收敛过程实验

MQHOA 算法的 M 收敛过程是 QHO 收敛过程的外层迭代, M 收敛过程在 QHO 收敛过程结束时实现了搜索区域的收缩和改变采样函数的尺度, 从而实现在更小区域内更高的搜索精度.

图 5 为二维 Griewank 函数在 $\sigma_s = 5$ 和 $\sigma_s = 2.5$ 两个尺度间的 M 收敛过程波函数图, 图中第一排为波函数在搜索空间中的波函数图像, 第二排为波函数搜索空间中的等高投影, 各维变量位置的的定义域都取 $[-10, 10]$.

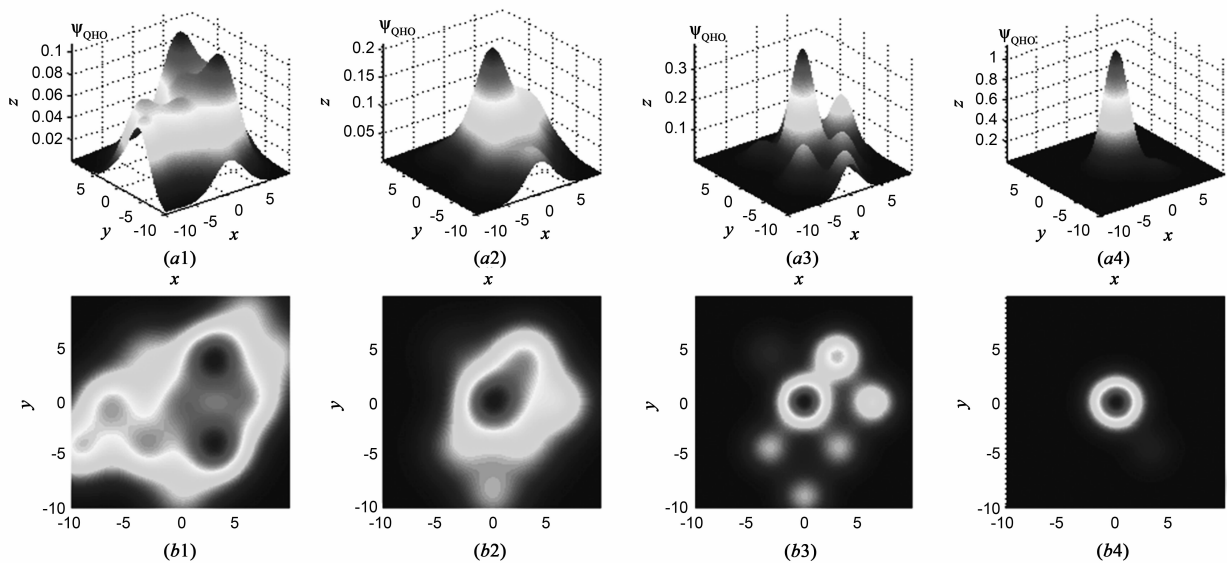


图 5 MQHOA 算法 M 收敛过程

图 5(a1), (b1) 为尺度 $\sigma_s = 5$, QHO 迭代开始时高

能态波函数图像, 此时量子谐振子波函数处于高能态,

图 5(a2), (b2) 为尺度 $\sigma_s = 5$ 时 QHO 迭代在基态收敛时的波函数图, 由于此时 σ_s 较大收敛时部分细节信息被混迭, 通过将 σ_s 减小为 $\sigma_s/2$ 的 M 迭代操作, 使算法进入尺度为 $\sigma_s/2$ 的 QHO 收敛过程, 图 5(a3), (b3) 就是尺度 $\sigma_s/2$ 的高能态, 此时可以看到在大尺度下被混迭的搜索空间细节情况. 图 5(a4), (b4) 为尺度 $\sigma_s/2$ 收敛过程的基态波函数, 对比图 5(a2), (b2) 可以看到在尺度 $\sigma_s/2$ 下收敛后采样区域明显缩小, 只出现了较少的细节混迭现象. MQHOA 算法的 M 收敛过程会一直持续到 $\sigma_s < \sigma_{\min}$ 时停止, 采样精度逐步提高, 搜索区域逐步缩小, 此时获得的最优解即是满足精度 σ_{\min} 要求的全局最优解.

5 总结

本文以 MQHOA 算法的收敛特性为研究对象, 分别对 MQHOA 算法的 QHO 收敛和 M 收敛两个重要嵌套收敛过程进行了研究. QHO 收敛实现了对搜索区域的逐步收缩, M 收敛实现了采样精度的逐步提高, 因此 MQHOA 算法的整个收敛过程就是由 QHO 收敛过程和 M 收敛过程相互嵌套, 逐步实现对最优解位置的精确定位. MQHOA 算法收敛过程的理论和实验结果表明 MQHOA 具有精巧的数学结构并与物理模型符合较好.

参考文献

- [1] 王鹏. 云计算的关键技术与应用实例[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010: 168 - 194.
- [2] 王鹏, 黄焱, 任超, 郭又铭. 多尺度量子谐振子高维函数全局优化算法[J]. 电子学报, 2013, 41(12): 2468 - 2473.
Wang P, Huang Y, Ren C, Guo YM. Multi-scale quantum harmonic oscillator for high-dimensional function global optimization algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(12): 2468 - 2473. (in Chinese)
- [3] 王培崇, 钱旭. 模拟谐振子算法及其全局收敛性分析[J]. 计算机工程, 2013, 39(3): 209 - 212.
Wang PC, Qian X. Simulated harmonic oscillator algorithm and its global convergence analysis[J]. Computer Engineering, 2013, 39(3): 209 - 212. (in Chinese)
- [4] 倪霖, 段超, 钟辉. 基于模拟谐振子算法的多项目调度[J]. 计算机应用, 2011, 31(9): 2559 - 2562.
Ni L, Duan C, Zhong H. Multi-project scheduling based on simulated harmonic oscillator algorithm[J]. Journal of Computer Applications, 2011, 31(9): 2559 - 2562. (in Chinese)
- [5] 姚明. 模拟谐振子算法在求解整数规划问题中的应用[J]. 微型机与应用, 2013, 32(7): 77 - 79.
Yao M. Application of simulated harmonic oscillator algo-

- rithm in integer programming[J]. Microcomputer & Application, 2013, 32(7): 77 - 79. (in Chinese)
- [6] 于海涛, 王慧强, 李梓, 韩立娟. 基于模拟谐振子的优化 K-means 聚类算法[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(30): 122 - 127.
Yu HT, Wang HQ, Li Z, et al. Optimized k-means clustering algorithm based on simulated harmonic oscillator[J]. Computer Engineering and Application, 2012, 48(30): 122 - 127. (in Chinese)
- [7] 程勛, 李文辉, 刘裕斌. 基于模拟谐振子算法的服务调度技术[J]. 大连海事大学学报(自然科学版), 2013, 39(2): 78 - 81.
Cheng X, Li WH, Liu YB. Service scheduling technique based on simulated harmonic oscillator algorithm[J]. Journal of Dalian Maritime University, 2013, 39(2): 78 - 81. (in Chinese)
- [8] Feng B, Sun J, Xu WB. A global search strategy of quantum-behaved particle swarm optimization[A]. IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems[C]. Singapore: IEEE, 2004. 111 - 116.
- [9] Sun J, Wu XJ, Vasile Palade, et al. Convergence Analysis and improvements of quantum-behaved particle swarm optimization[J]. Information Sciences, 2012, 193(15): 81 - 103.
- [10] Sun J, Fang W, Wu XJ, et al. Quantum-behaved particle swarm optimization: analysis of the individual particle behavior and parameter selection[J]. Evolutionary Computation, 2012, 20(3): 349 - 393.

作者简介



王 鹏(通信作者) 男, 1975 年 8 月出生
于四川省犍为县. 现为西南民族大学教授、博士生
生导师, 研究方向为智能算法、云计算、并行
计算.
E-mail: wp002005@163.com

黄 焱 男, 1982 年 7 月出生于江苏省泗阳县. 博士研究生. 主
要研究方向为智能算法、云计算、并行计算.
E-mail: 16481339@qq.com