

球型机器人状态方程直接积分解法

曹少中, 赵 伟

(北京印刷学院高端印刷装备信号与信息处理北京市重点实验室, 北京 102600)

摘 要: 非线性系统分析的核心归结为系统状态方程的求解问题, 对于一般非线性控制系统, 通过引入由状态量、控制量与自变量时间坐标构成的“广义状态空间”, 在广义状态空间一点将方程的右端展开为时间的 Taylor 级数, 进一步直接积分获得非线性控制系统状态方程关于自变量时间的级数解. 以球型机器人这种存在耦合的非线性系统为例, 设计一种自适应滑模控制器, 利用本文提出的解法得出了控制量与输出量的解析解, 并仿真验证了方法的正确性.

关键词: 球型机器人; 滑膜控制; 非线性控制系统; 状态方程; 直接积分

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)12-3020-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.12.029

Direct-Integrating Approach for Solving State Equation of the Mechanics Model of Spherical Robot

CAO Shao-zhong, ZHAO Wei

(Beijing Key Laboratory of Signal and Information Processing for High-end Printing Equipment,
Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China)

Abstract: The kernel of nonlinear system analysis is the solving of system state equation. Therefore, for a general nonlinear control system, the concept of general time-state space comprising of state variables, control variable, and time t is introduced. In order to solve the state equation of nonlinear control systems, at the operation point of general time-state space, the right side of the state equation can be expanded as Taylor series about time. Then the series solution of the nonlinear control state equation, for which the solution is expressed in time series, can be obtained by using direct-integrating approach. Sliding mode controller is established to control the typical coupling nonlinear system model of the spherical robot. Then we obtain the analytical solution of control and controlled variable by the direct-integrating method. The validity of this method is verified by experiment.

Key words: spherical robot; sliding mode control; nonlinear control systems; state equation; direct-integrating

1 引言

系统分析是非线性系统理论研究的一个基本课题. 从数学角度看, 系统分析的实质是求解系统的状态方程^[1-4]. 对于连续时间非线性系统, 系统分析归结为相对于给定初始状态和输入向量求解非线性状态方程. 对于一般的非线性系统状态方程, 至今难以求得一般解析解. 非线性系统状态方程由于其非线性的特点增加了一阶微分方程右端对于自变量的隐含性, 一般不可积, 给求解带来了巨大困难^[5-9]. 本文通过引入由状态量 $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 控制变量 $u_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 及自变量 (一般为时间 t) 为坐标构成的广义状态空间概念, 在广义状态空间 $(t_k, x(k), u(k))$ 处将方程的右端展开为 $(t - t_k)$ 的 Taylor 级数, 使之变为 $(t - t_k)$ 的显函数, 从而通过直接积分获得了非线性控制系

统关于自变量时间 $\tau = (t - t_k)$ 的无穷级数解析解. 系统状态方程关于 τ 的级数解中, 具有不同精度的各级近似公式可以表示为 τ 的分段解析函数, 便于研究非线性控制系统的动力学行为与其物理参数的依赖关系. 同时, 相邻两级近似式之间只相差一个增量, 其余部分不变, 通过按精度要求选取不同近似式的途径, 容易编制出相应的定步长自适应算法. 本文针对球型机器人这一典型的非线性系统, 提出了一种滑模控制方法, 并应用直接积分法计算出了控制量和输出量的解析解.

2 非线性控制系统状态方程的级数解析解

一般非线性控制系统状态方程描述为

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), u(t), t), \\ x(t_k) &= x(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 为 N 维状态向

量; $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$ 为控制向量; $m \leq N$;

$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = (f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \dots, f_N(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t))^T$ 为 N 维实值函数向量. 为了研究问题的方便, 引入广义状态空间的概念.

定义 1 对于非线性控制系统, 由系统的状态量 $x_i(t) (i=1, 2, \dots, N)$ 和控制变量 $u_j(t) (j=1, 2, \dots, m)$ 及自变量时间 t 为坐标组成的空间称为广义状态空间.

根据广义状态空间概念, 显然, 系统状态方程式 (1) 的求解是一个初值问题.

引理 1 设初值问题为

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt &= f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ x_i(t_k) &= x_i(k), i=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

$f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 在区域 R 中连续, 且在区间 I 中具有任意多次导数, $\mathbf{u}(t)$ 在该区间也存在任意多次导数, 并存在正数 H 和自然数 N , 使得

$$|f_i^{(n)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)| \leq H, \forall t \in I, n > N.$$

其中

$$\begin{aligned} R: |t - t_k| &\leq a, |x_i(t) - x_i(k)| \leq b_i, \\ |u_j(t) - u_j(k)| &\leq c_j, j=1, 2, \dots, m; \\ I &= [t_k - h, t_k + h], h = \min\{a, d/M\}, \\ M &> |f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)|, d = \min\{b_i, c_j\}. \end{aligned}$$

则 $f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 在区间 I 上可以展开成如下收敛的自变量的 Taylor 级数:

$$f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l, \quad (3)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

定理 1 初值问题式 (2) 的 $f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 在区域 R 中的区间 I 上可以展为自变量 t 收敛的 Taylor 级数, 则初值问题式 (2) 在 t_k 点的邻域 $|t - t_k| < \rho (\rho = a(1 - e^{-d/(2aM)}))$ 内有一个且仅有一个级数解为

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} (t - t_k)^{l+1},$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

只要知道非线性控制系统的状态方程, 且 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 的各阶导数均存在, 就可以根据上述公式求出状态向量的逐次近似解, 并且无穷级数解的极限函数即为非线性控制系统状态方程的精确解.

引入相对于该段起始时刻 t_k 的时间坐标 $\tau = t - t_k$ 上式可改写为:

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} \tau^{l+1} \quad (4)$$

在实际计算时, 级数只取有限项. 当 Taylor 多项式的次数为 $0, 1, 2, \dots$ 时, 相应近似公式分别称为一级近似式、二级近似式和三级近似式等, 具体如下:

一级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k) \tau \quad (5)$$

二级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k) \tau + \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k) \tau^2 \quad (6)$$

三级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k) \tau + \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k) \tau^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(2)}(t_k) \tau^3 \quad (7)$$

当 τ 取步长 Δt 时, 由初值 $x(0)$ 可根据需要选用相应的 $j+1 (j=0, 1, \dots)$ 次近似式

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{l=0}^j \frac{1}{(l+1)!} f_i^{(l)}(k) \Delta t^{l+1} \quad (8)$$

若令起始时刻 $t_k = 0$, 微分方程的解变为:

$$x_i(t) = x_i(0) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(0)}{(l+1)!} t^{l+1} \quad (9)$$

3 算例分析

图 1 所示球型机器人是一种以球形外壳为运动机构的移动机器人. 其驱动机构和控制部件都包含在球形外壳内部, 具有结构紧凑, 可全向运动和抗翻倒的优点. 大多数球形机器人都是靠重摆改变重心进行全向滚动, 由于重摆转角与球壳转角之间存在耦合, 因此球型机器人是一种典型的非线性耦合系统.



图1 BYQ-X型球型机器人

3.1 直线运动动力学建模

机器人动力学模型是对机器人进行精确控制的基础^[10-12]. 针对球壳质量分布不均的情况进行讨论. 如图 2 所示, 设球壳的质量为 m_s , 框架的质量为 m_f , 重摆的质量为 m_p , 重摆距长轴的距离为 l , 球壳半径为 R , 球壳沿水平面无滑动滚动, 重摆与竖直线间的角度为 θ , 转动惯量为 I_f , 滚过的距离为 x , 滚过的角度为 φ .

系统动能分为三部分, 球壳动能, 重摆动能, 框架动能, 它们分别为

$$T_s = \frac{1}{2} m_s (\dot{x}^2 + R^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2) = m_s \dot{x}^2$$

$$T_p = \frac{1}{2} m_p [(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos\theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta]$$

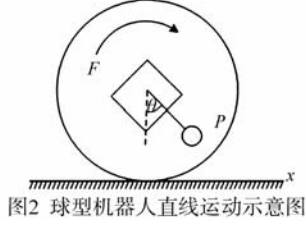


图2 球型机器人直线运动示意图

$$= \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \dot{x}^2 + I_f \dot{\theta}^2 \quad (10)$$

所以系统总动能为

$$T = m_s \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2} m_f \dot{x}^2 + I_f \dot{\theta}^2 \quad (11)$$

系统总势能为

$$U = -m_p g l \cos\theta \quad (12)$$

则系统的拉格朗日函数为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m_s \dot{x} + m_p (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) + m_f \dot{x}$$

$$L = T - U$$

$$L = m_s \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2} m_f \dot{x}^2 + I_f \dot{\theta}^2 + m_p g l \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m_s \ddot{x}$$

$$+ m_p (\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \sin\theta) + m_f \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

由拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 2m_s \ddot{x} + m_d (\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \sin\theta) + m_f \ddot{x} \quad (13)$$

同理:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_p (l^2 \dot{\theta} + \dot{x}l\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_p (l^2 \ddot{\theta} + \ddot{x}l\cos\theta - \dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta) \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m_p (l^2 \ddot{\theta} + \ddot{x}l\cos\theta - \dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$+ m_p \dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta + m_p g l \sin\theta = m_p (l^2 \ddot{\theta} + \ddot{x}l\cos\theta) + m_p g l \sin\theta \quad (15)$$

综上可得跳跃球型机器人地面滚动的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{x} + m_p (\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \sin\theta) + m_f \ddot{x} = T/R \\ m_p (l^2 \ddot{\theta} + \ddot{x}l\cos\theta + g l \sin\theta) = T \end{cases} \quad (16)$$

整理得到

$$\begin{bmatrix} (m_s + m_p + m_f)R & m_p l \cos\theta \\ m_p R l \cos\theta & m_p l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_p l \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ m_p g l \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ R \\ 1 \end{bmatrix} T$$

将上面的动力学方程化为如下形式

$$\mathbf{H}(q)\ddot{q} + \mathbf{J}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{H}(q) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{J}(q, \dot{q}) = [J_1 \quad J_2]^T, \text{分别对应惯性}$$

矩阵和重力、离心力矩阵,为非线性微分方程,取状态变

量 $\mathbf{x} = [\varphi \quad \dot{\varphi} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T, u = \tau$,将式(17)化为如下的非线性状态空间形式

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_1(\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{x})u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= A_2(\mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$A_1(\mathbf{x}) = \frac{H_{21}J_2 - H_{22}J_1}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}},$$

$$B_1(\mathbf{x}) = \frac{H_{22} - H_{21}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}},$$

$$A_2(\mathbf{x}) = \frac{H_{12}J_1 - H_{11}J_2}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}},$$

$$B_2(\mathbf{x}) = \frac{H_{11} - H_{12}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}$$

3.2 球型机器人直线运动控制方法研究

两个控制目标,机器人的滚动角度 θ_d ,重摆摆角 φ_d ,重摆摆角速度 $\dot{\varphi}_d = 0 \text{ rad/s}$. 因此,针对系统的两个控制目标,对系统的两组状态变量分别设置一级滑模平面

$$s_1 = c_1 e_1 + e_2, s_2 = e_3 \quad (19)$$

其中, $e_1 = \theta, e_2 = \theta - \theta_d, e_3 = \varphi$,分别为状态变量当前值与目标值之间的差值. 滑模面 S_1 的斜率为 c_1 ,滑模面 S_2 的斜率为 1,为了同时实现对两组状态变量的控制,在此构造一级总滑模面如下式

$$S = \alpha s_1 + \beta s_2 \quad (20)$$

其中 α, β 为滑模面 S_2 的系数,也即总滑模面的斜率.

采用等效控制法分别求各个子系统在滑动平面上的等效控制量 u_{eq1}, u_{eq2}

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \dot{\varphi} \\ \dot{s}_1 &= c_1 \dot{\theta} + \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (21)$$

$$= c_1 \dot{\theta} + A_1(\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{x})u \quad (22)$$

$$\dot{S} = \alpha c_1 \dot{\theta} + \alpha A_1(\mathbf{x}) + \alpha B_1(\mathbf{x})u + \beta \dot{\varphi}$$

$$u_{\text{eq}} = \frac{-\alpha c_1 \dot{\theta} - \alpha A_1(\mathbf{x}) - \beta \dot{\varphi}}{\alpha B_1(\mathbf{x})} \quad (23)$$

为了构造切换控制量 u_{sw} , 取 Lyapunov 能量函数为 $V = S^2/2$. 滑膜运动包括趋近运动和滑模运动两个过程, 系统从任意初始状态趋向于切换面, 知道到达切换面的运动称为趋近运动, 即 u_{sw} 趋向于 0 的过程. 根据滑模变结构原理, 滑模可达性条件仅保证由状态空间任意位置运动点在有限时间内到达切换面的要求, 而对于趋近运动的具体轨迹未做任何限制, 采用趋近律的方法可以改善趋近运动的动态品质. 采用指数趋近律. 令:

$$\dot{S} = -\varepsilon \text{sgn}(S) - kS$$

其中 $\varepsilon > 0, k > 0$

式中, $-kS$ 是指数趋近项, 其解为 $\dot{S} = S(0)e^{-kt}$.

指数趋近中, 趋近速度从一较大值逐步减小到零, 不仅缩短了趋紧时间, 而且是运动点到达切换面的速度很小. 对单纯的指数趋近, 运动点逼近切换面是一个渐进的过程, 不能保证有限时间内到达, 切换面上也就不存在滑动模态了, 所以要增加一个等速趋近项 $\dot{S} = -\varepsilon \text{sgn}(s)$, 使当 s 接近于零时, 趋近速度是 ε 而不是零, 可以保证有限时间到达.

$$\dot{S} = \alpha \dot{S}_1 + \beta \dot{S}_2 = -\varepsilon \text{sgn}(S) - kS \quad (24)$$

解出

$$u_{\text{sw}} = \frac{-\varepsilon \text{sgn}(S) - kS}{\alpha B_1(\mathbf{x})} \quad (25)$$

$$u = \frac{-\varepsilon \text{sgn}(S) - kS - \alpha c_1 \dot{\theta} - \alpha A_1(\mathbf{x}) - \beta \dot{\varphi}}{\alpha B_1(\mathbf{x})} \quad (26)$$

可推导出

$$\dot{V} = \dot{S}S = -\eta |S| - kS^2 < 0 \quad (27)$$

对式(27)两侧同时积分, 可得

$$V(t) - V(0) = \int_0^t (-\eta |S| - kS^2) d\sigma \quad (28)$$

进而得到

$$V(t) = \frac{1}{2} S^2 \leq V(0) = \frac{1}{2} S^2(0) < \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\eta |S| + kS^2) d\sigma \leq V(0) < \infty \quad (29)$$

进而得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |S| d\sigma < \infty; \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S^2 d\sigma < \infty$$

因此 $S \in L_\infty, S \in L_1$ (S 可积分), $S \in L_2$ (S 平方可积分). 同时由式(27)有 $\dot{V} = \dot{S}S < \infty$, 进而有 $\dot{S} \in L_\infty$. 根据 Barbalat 引理, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0$, 即第二层滑动面 S 是渐进稳

定的. 对于两层滑动面, 控制量采用式(26)所示的形式, 如果 $s_2 \in L_\infty, \dot{s}_2 \in L_\infty$, 则第一层滑动面 s_1, s_2 也是渐进稳定的. 由前面的分析可知 α, β 的大小并不影响系统的稳定性, 因此可以构造两个不同的滑动面 S_1, S_2

$$S_1 = \alpha_1 s_1 + \beta s_2, S_2 = \alpha_2 s_1 + \beta s_2 \quad (30)$$

式中: α_1, α_2 为不相等的正常数.

因此有 $S_1 \neq S_2$, 不失一般性, 进一步假设

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S_2^2 d\sigma < \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S_1^2 d\sigma < \infty \quad (31)$$

从而可得

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (S_1^2 - S_2^2) d\sigma \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) s_1^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \beta s_1 s_2] d\sigma \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t 2(\alpha_1 - \alpha_2) s_1 S_1 d\sigma - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\alpha_1 - \alpha_2)^2 s_1^2 d\sigma > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

由式(32)进一步有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t s_1^2 d\sigma &< \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{2s_1 S_1}{\alpha_1 - \alpha_2} d\sigma \\ &\leq \frac{2}{|\alpha_1 - \alpha_2|} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|s_1\|_\infty |S_1| d\sigma \\ &= \frac{2}{|\alpha_1 - \alpha_2|} \|s_1\|_\infty \|S_1\|_1 < \infty \end{aligned} \quad (33)$$

因此 $s_1 \in L_2$, 并且已经证明 $s_1 \in L_\infty, \dot{s}_1 \in L_\infty$, 根据 Barbalat 引理, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} s_1 = 0$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} s_2 = 0$. 即第一层滑动面 s_1, s_2 也是渐进稳定的.

滑模控制器的参数 α, β, c 的最优值通过遗传算法寻找. 采用实数编码.

适应度函数 $F = 1/J$

$$J = W_1(\theta - \theta_d) + W_2 \dot{\theta} + W_3 \dot{\varphi}$$

W_1, W_2, W_3 为权值, 根据控制目标设定. 设定 $W_1 = \frac{1}{3}, W_2 = \frac{1}{3}, W_3 = \frac{1}{3}$.

设定变异率为 0.05, 交叉率 0.5, 遗传 15 代. 仿真程序运行结果如图 3 所示.

优化结果如下:

$$\alpha = 3.1410, \beta = 1.0009, c = 0.5704.$$

3.3 仿真验证

设球形机器人球壳的质量为 $m_s = 1\text{kg}$, 框架的质量为 $m_f = 1\text{kg}$, 重摆的质量为 $m_p = 1\text{kg}$, 重摆距长轴的距离为 $l = 0.2\text{m}$, 球壳半径为 $R = 0.3\text{m}$, 球壳沿水平面无滑动滚动. 球形机器人状态方程组如式(34)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_1(\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{x})u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= A_2(\mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (34)$$

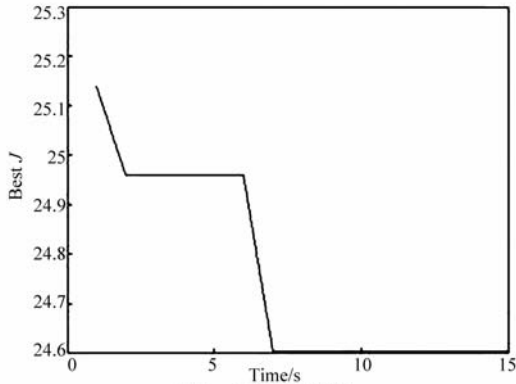


图3 参数优化曲线

控制量表达式为:

$$u = \frac{-\varepsilon \operatorname{sgn}(S) - kS - \alpha c_1 \dot{\theta} - \alpha A_1(\mathbf{x}) - \beta \dot{\varphi}}{\alpha B_1(\mathbf{x})}$$

初值 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, u = 0$, 步长取 0.1s. 利用直接积分法对方程组求解, 取三级近似, 状态方程可以改写为如下形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{f}(k) \Delta t + \frac{1}{2!} \mathbf{f}^{(1)}(k) \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{f}^{(2)}(k) \Delta t^3$$

其中:

$$\mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} x_2 \\ A_1(\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{x})u \\ x_4 \\ A_2(\mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x})u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(1)}(k) = \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} (A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial A_1}{\partial x_4} (A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial B_1 u}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial B_1 u}{\partial x_2} (A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial B_1 u}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial B_1 u}{\partial x_4} (A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u) \\ A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} (A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial A_2}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial A_2}{\partial x_4} (A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial B_2 u}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial B_2 u}{\partial x_2} (A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial B_2 u}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial B_2 u}{\partial x_4} (A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M \\ N \\ O \\ P \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{(2)}(k) = \left(\frac{d\mathbf{f}^{(1)}(k)}{dt} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} N \\ \frac{\partial N}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial N}{\partial x_2} (A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial N}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial N}{\partial x_4} (A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u) \\ P \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial P}{\partial x_2} (A_1(\mathbf{x}(k)) + B_1(\mathbf{x}(k))u) + \frac{\partial P}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial P}{\partial x_4} (A_2(\mathbf{x}(k)) + B_2(\mathbf{x}(k))u) \end{bmatrix}$$

在 Matlab 软件中用直接积分法对状态方程进行计算. 设定控制目标让机器人匀速运动. Matlab 仿真结果如图 4 和图 5. 可看出, 控制方法是能够让速度迅速达到要求值, 证明了控制方法的有效性. 并验证了直接积分法的正确性.

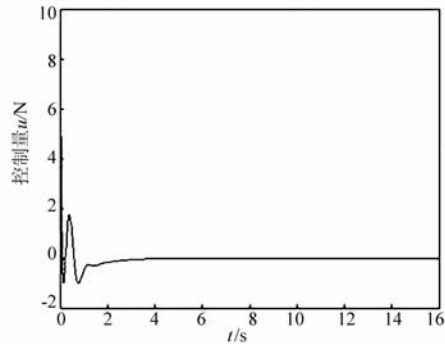


图4 球型机器人控制量变化仿真曲线

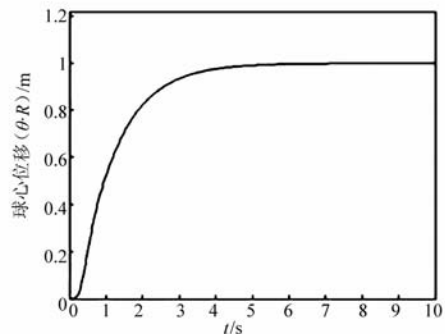


图5 球型机器人球心位移变化仿真曲线

3.4 样机试验

对样机进行实验, 实验分为几步, 给机器人上电, 之后控制机器人匀速运动. 物理参数与动力学建模参数相同, 机器人状态变量实时数据由编码器、陀螺仪及角

加速度计等传感器检测. 得到机器人位移结果如图 6 所示:

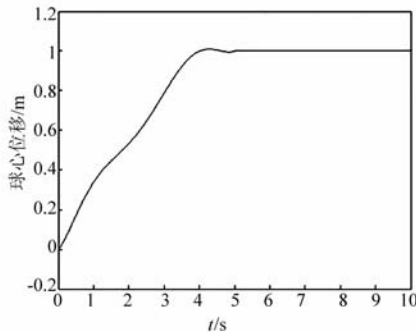


图6 球型机器人球心位移变化曲线

由图 6 可见, 分级滑模控制算法能够实现对机器人的有效控制. 证明了控制方法的有效性. 并验证了直接积分法的正确性.

4 结语

通过引入广义状态空间的概念, 将非线性系统状态方程进行直接积分求得方程关于时间的无穷级数解. 求解过程中除了被积分函数用 Taylor 级数展开之外没有用其他任何近似, 所得结果十分简洁, 可以对其精确解进行任意严格逼近. 对球形机器人这一典型的耦合性非线性系统的状态方程进行了直接求解, 得到了各状态量和控制量的解析解, 证明了该方法适合于一般的非线性系统.

参考文献

- [1] 杜贞斌, 宋宜斌. 基于模糊逼近的非线性多时延系统的自适应跟踪控制[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 897 - 900.
DU Zhen-bin, SONG Yi-bin. fuzzy approximation-based adaptive tracking control for nonlinear systems with multiple time delays[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(5): 897 - 900. (in Chinese)
- [2] 曹少中, 涂序彦. 非线性控制系统状态方程直接积分解法[J]. 控制与决策, 2011, 26(10): 1591 - 1595.
CAO Shao-zhong, TU Xu-yan. Direct-integrating approach for solving state equation of nonlinear control systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(10): 1591 - 1595. (in Chinese)
- [3] 洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2005. 167 - 185.
- [4] Douglas A Lawrence. Input-output pseudolinearization on controlled invariant submanifolds[J]. Automatica, 2005, 41(1): 163 - 166.
- [5] Srivastava H M, Niukkanen A W. Some clebsch-gordan type linearization relations and associated families of Dirichlet integrals[J]. Mathematical and Computer Model-

ling, 2003, 37(3 - 4): 245 - 250.

- [6] Doyle F J, Allgower F, Morari M. Normal form approach to approximate input-output linearization for maximum phase nonlinear SISO systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(2): 305 - 309.
- [7] Albeverio S, Bozhok R, Koshmanenko V. The rigged hilbert spaces approach in singular perturbation theory[J]. Mathematical Physics, 2006, 58(2): 227 - 246.
- [8] Lin T C, David H Schultz, Zhang W Q. Numerical solutions of linear and nonlinear singular perturbation problems[J]. Computer and Mathematics Applications, 2008, 55(11): 2574 - 2592.
- [9] Stephen Schecter. Traveling-wave solutions of convection-diffusion systems by center manifold reduction[J]. Nonlinear Analysis, 2002, 49(1): 35 - 59.
- [10] Chemel B, Mutschler E, Schempf H. Cyclops: Miniature robotic reconnaissance system [A]. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics & Automation [C]. Detroit, Michigan; IEEE, 1999. 2298 - 2302
- [11] Bhattacharya S, Agrawal S K. Spherical rolling robot: A design and motion planning studies[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2000, 16(6): 834 - 839
- [12] Javadi A A H, Mojabi P. Introducing august: a novel strategy for an omnidirectional spherical rolling robot [A]. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation [C]. Washington, DC: IEEE, 2002. 3526 - 3533.

作者简介



曹少中 男, 1965 年 2 月生于河北保定, 博士, 2005 年毕业于北京理工大学信息工程学院, 现为北京印刷学院信息工程学院教授. 主要研究方向为非线性系统理论, 机器人控制理论.
E-mail: caoshaozhong@bigc.edu.cn



赵伟 男, 1983 年 9 月出生, 山东泰安人, 博士, 2015 年于北京邮电大学自动化学院获得工学博士学位. 现为北京印刷学院信息工程学院讲师. 主要研究方向为机器人技术.
E-mail: zhaoweihu@163.com