

基于调控参数建模的混合模糊系统的逼近分析

董文强, 王贵君

(天津师范大学数学科学学院, 天津 300387)

摘要: 模糊系统是通过规则来描述人类语言信息,它是处理不确定信息的一种重要工具. 常见的模糊系统为 Mamdani 模糊系统和 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊系统. 本文首先通过引入调控参数统一两类系统并建立广义的混合模糊系统. 其次,利用多元函数带皮亚诺余项的泰勒展式证明混合模糊系统在无穷范数下对连续可微函数具有逼近性,进而借助拉格朗日型余项的 Hessian 矩阵证得该系统具有二阶逼近精度. 最后,通过选取样本点分析说明基于调控参数建模的混合模糊系统的逼近效果优于单独的 Mamdani 或 T-S 模糊系统.

关键词: Mamdani 模糊系统; T-S 模糊系统; 混合模糊系统; 调控参数; 连续可微函数; 逼近性

中图分类号: TP183; O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)05-1158-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.05.019

Approximation Analysis of the Hybrid Fuzzy System Based on the Modeling of a Control Parameter

DONG Wen-qiang, WANG Gui-jun

(College of Mathematics Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: A fuzzy system describes human language information by fuzzy rules, it is an important tool to deal with the uncertain information. Mamdani fuzzy system and Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy system are two kinds of common systems. Firstly, the two types of systems are unified by introducing a control parameter so as to establish a generalized hybrid fuzzy system in this paper. Secondly, the hybrid fuzzy system can approximate to a continuous differentiable function with respect to infinite norm through Taylor formula with Peano remainder term of multivariate function, and certify that this system also has the second order approximation accuracy by means of Hessian matrix in Lagrange remainder term. Finally, the results show that the approximation effect of the hybrid fuzzy system based on the modeling of control parameters is better than the separate Mamdani or T-S fuzzy system by choosing sample points analysis.

Key words: Mamdani fuzzy system; T-S fuzzy system; hybrid fuzzy system; control parameter; continuously differentiable function; approximation

1 引言

1985年,日本学者 Takagi-Sugeno^[1] 基于非线性系统控制中的输入输出数据对首次提出所谓 T-S 模糊系统模型,由于该系统后件线性部分具有诸多随机调节参数,故 T-S 模糊系统比一般模糊系统具有更好的逼近性能. 1992年,王立新教授^[2] 率先引用 Stone-Weierstrass 定理证明了 Mamdani 模糊系统的逼近性,进而通过对多变量的大系统实施叠代分层来简化系统内部的规则数^[3]. 这些重要结果为进一步研究和应用 Mamdani 和 T-S 模糊系统奠定了理论基础. 1994年, Zeng^[4] 通过适当选取模糊基函数方

式把 Mamdani 模糊系统表成输入变量的线性组合形式,并在无穷范数意义下讨论该系统的逼近性.

此后,随之而来大量文献针对连续或连续可微函数讨论了两类模糊系统构成逼近器的充分条件,例如文献^[5-7]. 1998年,文[8]采用线性函数作为规则后件成功将 T-S 模糊系统应用于系统建模和系统控制器设计等问题. 这些结果对进一步探究模糊系统的逼近性和稳定性提供了有益帮助. 2000年,刘普寅教授通过剖分输入空间率先引入分片线性函数概念^[9],并依据分片线性函数为桥梁证明了 Mamdani 和 T-S 模糊系统对连续或 Lebesgue-可积函数具有泛逼近性. 近年来,文[10,11]基于参数单

点模糊化方法和特殊蕴涵算子讨论了模糊推理及模糊系统的建模和逼近问题,但所给方法仅局限于单输入单输出情况.文[12,13]虽将 Mamdani 和 T-S 模糊系统统一起来建立了广义混合模糊系统,但本质上并没有真正体现调控参数的混合作用.文[14]研究了一类 ELM 模糊系统对某种光滑函数的逼近性.文[15,16]基于拟算子引入新的积分模,并以此为度量研究了 Mamdani 模糊系统的逼近性.这些结果对进一步探究模糊系统的逼近性及应用具有重要理论意义.

然而,上述工作基本是针对单独 Mamdani 或 T-S 模糊系统的讨论.文[12,13]虽涉及系统的混合,但其主要目的是通过分层系统来减少规则数,其中参数的选取也过于特殊,从而导致调控参数对系统影响不大.本文基于混合模糊系统通过调控参数重新选取系统参数,进而证明该系统对一阶连续可微或二阶连续可微函数仍具有逼近性能.

2 两类模糊系统

事实上,设计模糊系统并不需要详细而精确的数学模型,而仅需若干 IF-THEN 模糊规则就可把自然语言或专家知识转化成输入输出的非线性映射.因此,模糊系统在自动控制、信息处理和系统工程等诸多领域得到了广泛应用.此外,模糊系统也是一种基于知识或规则的系统,它的核心是 IF-THEN 模糊规则.下面,我们首先给出两种常见 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统的推理规则模型如下:

Mamdani 型模糊推理规则为:

$R^{i_1 i_2 \dots i_n}$: IF x_1 is $C_1^{i_1}, x_2$ is $C_2^{i_2}, \dots, x_n$ is $C_n^{i_n}$,

THEN y is $B^{i_1 i_2 \dots i_n}$.

其中 $i_1 = 1, 2, \dots, N_1; i_2 = 1, 2, \dots, N_2; \dots, i_n = 1, 2, \dots, N_n$, 每个 $C_j^{i_j}$ 是输入分量论域 $U_j \subset \mathbf{R}$ 上前件模糊集, $j = 1, 2, \dots, n$; 而 $B^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 是第 i_j 个规则在输出论域 $V \subset \mathbf{R}$ 上的后件模糊集.

基于上述推理规则, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbf{R}^n$ 若采用单值模糊器、乘积推理机和中心平均解模糊器可建立 Mamdani 模糊系统的输入输出解析表达式为

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \bar{y}^{i_1 i_2 \dots i_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)} \quad (1)$$

其中 $\bar{y}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 是第 i_j 个规则输出的后件模糊集 $B^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 的中心, $R(x) \in V \subset \mathbf{R}$ 是输出变量.

T-S 型模糊推理规则为:

$T^{i_1 i_2 \dots i_n}$: IF x_1 is $C_1^{i_1}, x_2$ is $C_2^{i_2}, \dots$, and x_n is $C_n^{i_n}$,

THEN $y^{i_1 i_2 \dots i_n} = c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{j=1}^n c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} x_j$.

其中 IF 部分与 Mamdani 型规则相同,而 THEN 部分是输入变量的线性函数, $c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} (j = 1, 2, \dots, n)$ 为一组待定系数.按上述规则采用单值模糊器、乘积推理机和中心平均解模糊器得 T-S 模糊系统模型为

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)} \times \left(c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{j=1}^n c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} x_j \right) \quad (2)$$

其中 $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbf{R}^n$ 和 $T(x) \in V \subset \mathbf{R}$ 分别是 T-S 模糊系统的输入和输出变量.

注 1 如果系数 $c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} \neq 0, c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv 0, j = 1, 2, \dots, n$ 则称式(2)为简单 T-S 模糊系统;如果 $c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$, 但 $c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} (j = 1, 2, \dots, n)$ 不全为零,则称式(2)为齐次线性 T-S 模糊系统;如果 $c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} \neq 0$, 且 $c_j^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 不全为零,则称式(2)为非齐次线性 T-S 模糊系统.特别地,若 $c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv 0$, 且 $c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} = \bar{y}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 时,则 T-S 模糊系统退化为 Mamdani 模糊系统,故 Mamdani 模糊系统是 T-S 模糊系统的特例.

3 混合模糊系统的建模

众所周知,单独的 Mamdani 模糊系统或 T-S 模糊系统具有逼近性,但若将两个系统混合起来是否具有更好的逼近性能却很少有人提及.为此,对任意调控参数 $\lambda \in [0, 1]$, 首先给出 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统的混合推理规则如下:

$F_\lambda^{i_1 i_2 \dots i_n}$: IF x_1 is $C_1^{i_1}, x_2$ is $C_2^{i_2}, \dots, x_n$ is $C_n^{i_n}$,

THEN $y_\lambda^{i_1 i_2 \dots i_n} = (1 - \lambda) B^{i_1 i_2 \dots i_n}$.

$+ \lambda (c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{j=1}^n c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} x_j)$.

其中指标变量 $i_1 = 1, 2, \dots, N_1; i_2 = 1, 2, \dots, N_2; \dots, i_n = 1, 2, \dots, N_n$, 且 IF 部分中前件模糊集 $C_j^{i_j}$ 同上, $j = 1, 2, \dots, n, B^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 为 Mamdani 模糊系统第 i_j 个规则的输出后件模糊集, $c_j^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 为 T-S 型推理规则中 THEN 部分所对应的系数, $\lambda \in [0, 1]$ 为调控参数.

实际上,混合推理规则是通过调控参数 $\lambda \in [0, 1]$ 将两种模糊系统的 THEN 部分直接统一,而 λ 是决定混合推理规则乃至混合模糊系统的一个关键参数.现对任意调控参数 $\lambda \in [0, 1]$, 依据上述混合推理规则、单值模糊器、乘积推理机和中心平均解模糊器建立混合模糊系统的模型如下:

$$F_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)} \times \left((1 - \lambda) \bar{y}^{i_1 i_2 \dots i_n} + \lambda (c_0^{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{j=1}^n c_j^{i_1 i_2 \dots i_n} x_j) \right) \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_1, \dots, x_1) \in U_1 \times U_2 \times U_n \subset \mathbf{R}^n$ 是混合模糊系统的输入变量, $\bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ 是 Mamdani 模糊系统中第 i_j 个规则输出后件模糊集 B^{i_1, i_2, \dots, i_n} 的中心, $c_j^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ 为 T-S 模糊系统线性输出的一组系数, $F_\lambda(x)$ 是混合模糊系统的输出变量.

特别地, 当 $\lambda = 0$ 时, 混合模糊系统 (3) 退化为 Mamdani 模糊系统; 当 $\lambda = 1$ 时, 式 (3) 退化为 T-S 模糊系统. 而当 $\lambda \in (0, 1)$ 时, 正是我们所渴求的两类模糊系统的混合模型.

此外, 为了后文处理问题简单起见, 任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, 若令

$$D^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n C_j^{i_j}(x_j)},$$

则混合模糊系统式 (3) 可以简化写成

$$F_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) \times \left((1-\lambda)\bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n} + \lambda \left(c_0^{i_1, i_2, \dots, i_n} + \sum_{j=1}^n c_j^{i_1, i_2, \dots, i_n} x_j \right) \right) \quad (4)$$

其中 $\{D^{i_1, i_2, \dots, i_n}\}$ 称为混合模糊系统的模糊基函数. 实际上, 按上述变换不难获得一个重要等式如下:

$$\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) = 1 \quad (5)$$

式 (5) 为后面证明混合模糊系统的逼近性提供了较大方便. 另外, 从混合模糊系统式 (3) 或 (4) 不难看出调控参数 λ 的变化会对该系统 F_λ 产生一定影响.

4 混合模糊系统的逼近性

由于一般线性函数对乘法不具有封闭性, 故依传统 Stone-Weierstrass 定理证明该系统具有逼近性可能失效. 为此, 本节在提高逼近函数限制条件下, 采用多元函数泰勒公式证明混合模糊系统依无穷范数对连续可微函数具有逼近性, 参见文献 [17].

定义 1 设 f 是紧集 $U \subset \mathbf{R}^n$ 上的连续函数. 若令 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(\mathbf{x})|$, 则称 $\|\cdot\|_\infty$ 为无穷范数. 显然, 若 g 也是紧集 $U \subset \mathbf{R}^n$ 上连续函数, 则必有 $\|f-g\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|$.

定理 1 设 $\lambda \in (0, 1)$ 为混合模糊系统 (4) 的调控参数, g 是 \mathbf{R}^n 上连续可微函数, $U \subset \mathbf{R}^n$ 是任意紧集. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在剖分数 $m_\lambda^0 \in \mathbf{R}$ 及形如式 (4) 混合模糊系统 F_λ , 使 $m > m_\lambda^0$ 时, 恒有 $\|F_\lambda - g\|_\infty < \varepsilon$.

证明 因 U 为 \mathbf{R}^n 中紧集, 故 U 为有界闭集, 亦即, 必存在 $a > 0$, 使 $U \subset [-a, a]^n$.

此时, 若在广义正方体 $[-a, a]^n$ 的每个坐标轴上均做 $2m -$ 等距剖分, 故每个相邻分点间距离为 $\frac{a}{m}$, 即,

所得每个剖分小正多面体 Δ_{ij} 边长均为 $\frac{a}{m}$. 按文献 [10] 在每个坐标轴论域上构造前件模糊 C_j^i .

显然, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-a, a]^n$ 必落在某个剖分小多面体 Δ_{ij} 内, 不妨设 $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ 为该小正多面体 Δ_{ij} 的某个顶点坐标, 当然满足 $C_j^i(x_{0j}) = 1, j=1, 2, \dots, n; i_j=1, 2, \dots, N_j$. 此外, 在小正多面体 Δ_{ij} 内每个动点分量 x_j 与所属顶点分量 x_{0j} 必满足 $|x_j - x_{0j}| \leq \frac{a}{m}, j=1, 2, \dots, n$.

另外, 因函数 g 在 $[-a, a]^n$ 上连续可微, 故 g 在顶点 \mathbf{x}_0 处可展成带皮亚诺型余项的泰勒公式为

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} (x_j - x_{0j}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) = \left(g(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} x_{0j} + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} x_j + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \right) \quad (6)$$

下面, $\forall \lambda \in (0, 1)$, 将通过适当选取式 (4) 中待定系数来确定具体的混合模糊系统 F_λ . 事实上, 系统 (4) 中待定系数 $\bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n}, c_0^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ 和 $c_j^{i_1, i_2, \dots, i_n} (j=1, 2, \dots, n)$ 发生任何变化都会引起整个系统 F_λ 的变化. 为此, 按注 1 约定特例, 若令 $c_0^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$, 则有

$$(1-\lambda)\bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n} + \lambda \left(c_0^{i_1, i_2, \dots, i_n} + \sum_{j=1}^n c_j^{i_1, i_2, \dots, i_n} x_j \right) = \bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n} + \lambda \sum_{j=1}^n c_j^{i_1, i_2, \dots, i_n} x_j. \quad (7)$$

参见文 [17], 进而基于式 (6) ~ (7) 针对系统 (4) 选取一组待定系数如下:

$$\begin{cases} c_j^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0}, j=1, 2, \dots, n \\ c_0^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \bar{y}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = g(\mathbf{x}_0) - \lambda \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} x_{0j} \end{cases} \quad (8)$$

注 2 实际上, $j=1$ 表示 $c_1^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ 在 i_1 轴上确定 \mathbf{x}_0 点偏导数值, $j=2$ 表示 $c_2^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ 在 i_2 轴上确定 \mathbf{x}_0 点偏导数值, 以此类推. 因此, 式 (8) 中每个偏导数 $\left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0}$ 均与坐标轴指标 i_1, i_2, \dots, i_n 相关.

此时, $\forall \lambda \in (0, 1)$ 和 $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-a, a]^n$ 将式 (8) 代入式 (4) 得混合模糊系统 F_λ 表达式为:

$$F_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) \left(g(\mathbf{x}_0) + \lambda \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} (x_j - x_{0j}) \right) \quad (9)$$

依式 (5) 也可将 g 表成 $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x})$, 再结合式 (6) 和式 (9) 可得:

$$|F_\lambda(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| \leq \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1 i_2 \cdots i_n}(\mathbf{x}) \cdot \left((1-\lambda) \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \right| |x_j - x_{0j}| + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \right) \quad (10)$$

又由于 $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]^n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x \in [a, b]^n} \right| \geq \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \right|$, 且 $|x_j - x_{0j}| \leq \frac{a}{m}, j=1, 2, \dots, n$. 故当 $m \rightarrow +\infty$ 时, 必有 $x_j \rightarrow x_{0j} (j=1, 2, \dots, n)$, 从而 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$, 亦即, $\lim_{m \rightarrow +\infty} o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) = 0$. 此外, $\forall \varepsilon > 0$, 若使 $(1-\lambda) \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \right| \cdot |x_j - x_{0j}| < \frac{(1-\lambda)a}{m} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty < \varepsilon$, 解之得 $m > \frac{(1-\lambda)a}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty$.

令 $m_\lambda^0 = \left\lceil \frac{(1-\lambda)a}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty \right\rceil \in \mathbf{N}$, 故 $m > m_\lambda^0$ 时, 换言之, $m \rightarrow +\infty$, 依式(10)和(5), 必有

$$|F_\lambda(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| < \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1 i_2 \cdots i_n}(\mathbf{x}) \cdot (\varepsilon + 0) = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

因此, 对任意调控参数 $\lambda \in (0, 1)$ 更有

$$\|F_\lambda - g\|_\infty = \sup_{x \in [-a, a]^n} |F_\lambda(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

定理 1 表明混合模糊系统对连续可微函数具有逼近性. 然而, 证明过程中 $g(\mathbf{x})$ 应用了带有皮亚诺型余项的泰勒展开式(参见式(6)), 而皮亚诺余项 $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ 不能定量刻画, 只能粗略描述无穷小量, 且剖分数 m_λ^0 是在忽略皮亚诺余项所选取. 故有必要通过提高条件继续讨论系统的二阶逼近精度.

定理 2 设 $\lambda \in (0, 1)$ 为系统(4)的调控参数, g 是 \mathbf{R}^n 上二阶连续可微函数, $U \subset \mathbf{R}^n$ 是任意紧集. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在剖分数 $m_\lambda^0 \in \mathbf{N}$ 及形如式(4)混合模糊系统 F_λ , 使 $m > m_\lambda^0$ 时, 恒有 $\|F_\lambda - g\|_\infty < \varepsilon$.

证明 因多元函数 g 二阶连续可微, 故 g 在顶点 x_0 处带有拉格朗日余项的泰勒展开式为

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} (x_j - x_{0j}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla^2 g \Big|_{x=h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T. \quad (11)$$

其中 $\nabla^2 g$ 是 g 的海赛(Hessian)矩阵, 动点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与顶点 $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ 如同定理 1 的选取, 而 $\mathbf{h} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 是介于 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}_0 之间闭球内, 亦即, 满足 $\|\mathbf{x} - \mathbf{h}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$.

现取定 $\lambda \in (0, 1)$, 依据式(8)选取混合模糊系统式(4)一组待定系数, 再按式(4)与(11)得

$$\begin{aligned} |F_\lambda(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| &= \left| \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1 i_2 \cdots i_n}(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. \left((1-\lambda) \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} (x_j - x_{0j}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla^2 g \Big|_{x=h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \right) \right| \end{aligned} \quad (12)$$

下面, 首先依二次型的矩阵乘法简化计算拉格朗日余项部分:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla^2 g \Big|_{x=h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T &= \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix}^T \\ &\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \Big|_{x=h} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x=h} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} \Big|_{x=h} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x=h} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \Big|_{x=h} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_n} \Big|_{x=h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} \Big|_{x=h} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_2} \Big|_{x=h} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \Big|_{x=h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_j} \Big|_{x=h} (x_j - x_{0j}) \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_j} \Big|_{x=h} (x_j - x_{0j}) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_j} \Big|_{x=h} (x_j - x_{0j}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=h} (x_j - x_{0j}) (x_i - x_{0i}). \end{aligned} \quad (13)$$

故 $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-a, a]^n$ 和调控参数 $\lambda \in (0, 1)$ 按照式(12)和(13)可立刻获得

$$\begin{aligned} |F_\lambda(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| &\leq \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1 i_2 \cdots i_n}(\mathbf{x}) \\ &\quad \left((1-\lambda) \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \right| \cdot |x_j - x_{0j}| + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=h} \right| \cdot |x_j - x_{0j}| \cdot |x_i - x_{0i}| \right) \\ &\leq \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} D^{i_1 i_2 \cdots i_n}(\mathbf{x}) \left(\frac{(1-\lambda)a}{m} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty + \right. \\ &\quad \left. \frac{a^2}{2m^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty \right) \\ &\leq \frac{a}{m} \left((1-\lambda) \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty \right) \times 1. \end{aligned}$$

因此, $\forall \varepsilon > 0$, 若令:

$$m_\lambda^0 = \left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \left((1-\lambda) \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty \right) \right\rceil \in \mathbf{N}$$

则对任意调控参数 $\lambda \in (0, 1)$, 总存在剖分数 $m_\lambda^0 \in \mathbf{N}$ 和混合模糊系统 F_λ , 且当 $m > m_\lambda^0$ 时, 恒有 $\|F_\lambda - g\|_\infty = \sup_{x \in [-a, a]^+} |F_\lambda(x) - g(x)| < \varepsilon$.

至此, 在限定被逼近函数 $g(x)$ 二阶连续可微条件下利用带有拉格朗日余项的泰勒公式获得混合模糊系统逼近的充分条件. 实际上, 定理 2 给出混合模糊系统的剖分数 m_λ^0 选取范围恰好比定理 1 多出一项, 这是因证明中拉格朗日余项参与运算所致. 而定理 1 虽说假设条件较弱, 但证明过程中忽略了皮亚诺余项 (无法定量运算), 从而导致系统的逼近精度下降. 从理论上说定理 1 具有逼近性, 但逼近精度较差; 而定理 2 虽说条件稍强, 但更具有实用性.

5 实例分析

下面, 依据定理 2 来分析形如式 (9) 的混合模糊系统确实具有较好的逼近性能. 为简单起见, 我们仅在二维空间中选取一个实例, 并通过选取若干样本点来考证该混合系统的逼近精度.

设实数 $a = 2$, 空间维数 $n = 2$, 调控参数 $\lambda = 0.3$, 给定待逼近函数 $g(x, y) = \frac{1}{4} \sin^2(x + y)$, $\forall (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbf{R}^2$, 参看图 1. 显然, $g(x, y)$ 二阶连续可微, 且 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{4} \sin(2x + 2y)$, 并有

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_\infty = \frac{1}{4},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

若给定精度 $\varepsilon = 0.4$, 依定理 2 算出剖分数 $m_{0.3}^0$ 满足

$$m_{0.3}^0 > \frac{a}{\varepsilon} \left((1 - 0.3) \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_\infty + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty \right) = \frac{2}{0.4} \left(0.7 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \times 2 \right) = 11.75.$$

不妨取 $m_{0.3}^0 = 12$, 该剖分数是经放大不等式所得, 也许不是最佳取值. 依定理 2 满足 $\|F_{0.3} - g\|_\infty < 0.4$.

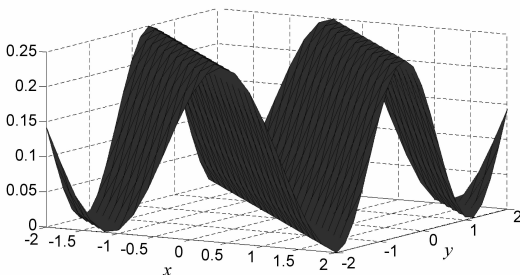


图1 所给被逼近函数 $g(x, y)$ 的曲面图

此时, 若在 x 轴 $[-2, 2]$ 上实施 24 - 等距剖分, 并先以闭区间 $[-2, 2]$ 的中心和两端点为峰值点分别构造三角形前件模糊集 C_1^0 和两端模糊集 C_1^{12} 及 C_1^{12} , 其

隶属函数依次如下:

$$C_1^0(x) = \begin{cases} 1 + 6x, & -1/6 \leq x < 0 \\ 1 - 6x, & 0 \leq x < 1/6 \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

$$C_1^{-12}(x) = \begin{cases} -6x - 11, & -2 \leq x < -11/6 \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

$$C_1^{12}(x) = \begin{cases} 6x - 11, & 11/6 \leq x < 2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}.$$

现将模糊集 C_1^0 在 $[-2, 2]$ 上逐次左右平移 $\frac{1}{6}$ 个单位长度, 即, 平移后所得 22 个模糊集隶属函数为

$$C_1^j(x) = C_1^0(x - j/6), j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 11.$$

同理, 在 y 轴 $[-2, 2]$ 上若令 $C_2^j = C_1^j, (j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 11)$, 也可获得 y 轴上一串前件模糊集. 为简单起见, 我们仅以第一象限 $[0, 2] \times [0, 2]$ 上剖分图及前件模糊集为例, 参见图 2.

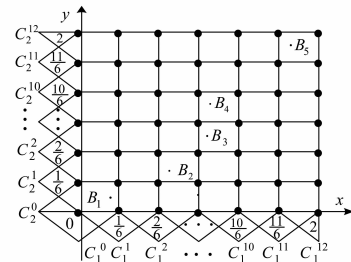


图2 $[0, 2] \times [0, 2]$ 上等距剖分图与前件模糊集

现约记图 2 中顶点 (黑点) 坐标 $z_{i_1 i_2} = (x^{i_1}, y^{i_2}) \in [0, 2] \times [0, 2], i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots, 12$. 则在所给整体论域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 上, 依据式 (9) 可得混合模糊系统的解析表达式为

$$F_\lambda(x, y) = \frac{\sum_{i_1=-12}^{12} \sum_{i_2=-12}^{12} C_1^{i_1}(x) C_2^{i_2}(y)}{\sum_{i_1=-12}^{12} \sum_{i_2=-12}^{12} C_1^{i_1}(x) C_2^{i_2}(y)} \times \left[g(z_{i_1 i_2}) + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{z_{i_1 i_2}} (x - x^{i_1}) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{z_{i_1 i_2}} (y - y^{i_2}) \right) \right].$$

应用 MATLAB 软件编程, 我们针对调节参数 $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 0.3$ 可在整体论域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 上获得三类模糊系统的空间曲面图和误差曲面图如图 3 ~ 图 8.

从图 4、6 和 8 中不难看出 Mamdani 模糊系统与函数的逼近误差在刻度 -0.05 到 0.05 上下浮动, 而 T-S 模糊系统和混合模糊系统与函数的逼近误差分别在刻度 -0.01 到 0.01 和 -0.005 到 0.005 上下浮动, 亦即, T-S 模糊系统的逼近效果好于 Mamdani 模糊系统, 而混合模糊系统 F_λ 比 T-S 模糊系统具有更好的逼近能力. 特别注意: 这里误差曲面图的纵向刻度不同. 下面, 通过选取样本点来验证这个事实.

为方便起见, 仅在 $[0, 2] \times [0, 2]$ 上随机选取 5 个

样本点: $B_1(1/8, 1/24), B_2(3/8, 1/4), B_3(13/12, 11/12), B_4(19/12, 7/4)$ 和 $B_5(23/12, 47/24)$, 再将这 5 个

样本点分别代入式(1), (2) 和(9) 所对应的三类模糊系统中, 可分别计算出它们的输出值和误差值如表 1.

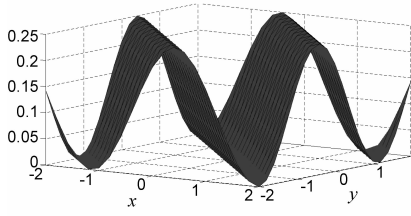


图3 Mamdani模糊系统 $R(x,y)$ 的曲面图($\lambda=0$)

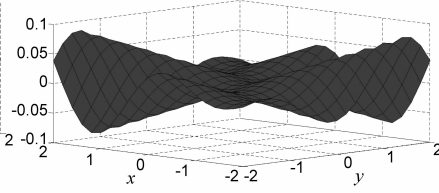


图4 $R(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 的误差曲面图

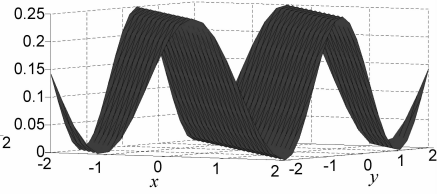


图5 T-S模糊系统 $T(x,y)$ 曲面图($\lambda=1$)

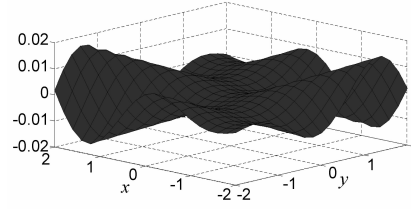


图6 $T(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 的误差曲面图

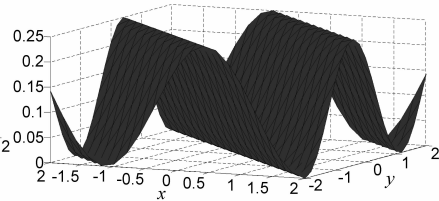


图7 混合模糊系统 $F_\lambda(x,y)$ 的曲面图($\lambda=0.3$)

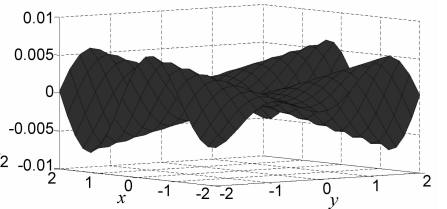


图8 $F_\lambda(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的误差曲面图

表 1 $m=12$ 时 5 个样本点对应三类系统输出及误差值

样本点	$B_1(\frac{1}{8}, \frac{1}{24})$	$B_2(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$	$B_3(\frac{13}{12}, \frac{11}{12})$	$B_4(\frac{19}{12}, \frac{7}{4})$	$B_5(\frac{23}{12}, \frac{47}{24})$
$g(x,y)$	0.006880382	0.08558471	0.20670540	0.009079040	0.112025702
$R(x,y) = X_i$	0.003418506	0.076466666	0.20145682	0.004269360	0.107408927
$T(x,y) = Y_i$	0.004487494	0.08078495	0.20351241	0.004947905	0.108579874
$F_\lambda(x,y) = Z_i$	0.007869202	0.08596215	0.20579348	0.008169202	0.112160205
$D_1(i) = Z_i - X_i$	0.004450696	0.00949549	0.00433666	0.003599842	0.004751278
$D_2(i) = Z_i - Y_i$	0.003381708	0.00517720	0.00228107	0.003221297	0.003580331

下面,我们利用统计推断的 t -假设检验来说明混合模糊系统均比 Mamdani 和 T-S 模糊系统的逼近效果好. 假设表 1 中数据 $D_1(i) = Z_i - X_i$ 和 $D_2(i) = Z_i - Y_i$ ($i=1,2,3,4,5$) 均是来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$, 其中均值 μ_D 和方差 σ_D^2 均未知. 则平均值 F_λ 和方差 s_{D_j} ($j=1, 2$) 可分别计算如下:

$$\begin{cases} \bar{D}_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 D_1(i) \approx \frac{2.66 \times 10^{-2}}{5} \approx 5.33 \times 10^{-3} \\ s_{D_1} = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (D_1(i) - \bar{D}_1)^2} \approx \sqrt{\frac{2.24 \times 10^{-5}}{4}} \approx 2.37 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \bar{D}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 D_2(i) \approx \frac{1.76 \times 10^{-2}}{5} \approx 3.53 \times 10^{-3} \\ s_{D_2} = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (D_2(i) - \bar{D}_2)^2} \approx \sqrt{\frac{8.28 \times 10^{-6}}{4}} \approx 1.43 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (15)$$

现针对表 1 中数据 $\{D_1(i)\}$, 我们在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 $\{H_0, H_1\}$, 其中

$$H_0: \mu_{D_1} \leq 0, H_1: \mu_{D_1} > 0.$$

采用 t -检验, 选取检验统计量 $t = \frac{\bar{D}_1 - 0}{\frac{s_{D_1}}{\sqrt{n}}}$, 令 $n=5$, 查表

得 $t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(5) = 2.0150$. 故有

$$t = \frac{\bar{D}_1 - 0}{\frac{s_{D_1}}{\sqrt{5}}} = \frac{0.0053267932}{\frac{0.0023685227}{\sqrt{5}}} \approx 5.0289 > 2.0150$$

由于 t 的观察值落在拒绝域 H_1 内, 故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 . 因此, 依据 t -假设检验及数据 $\{D_1(i)\}$ 的含义知混合模糊系统 F_λ 比 Mamdani 模糊系统 R 逼近性能好.

同理方法, 针对数据 $\{D_2(i)\}$ 也可获得

$$t = \frac{\bar{D}_2 - 0}{\frac{s_{D_2}}{\sqrt{5}}} \approx \frac{0.00353}{\frac{0.00143}{\sqrt{5}}} \approx 5.5198 > 2.0150.$$

根据统计学的 t -假设检验知混合模糊系统 F_λ 也比 T-S 模糊系统 T 逼近性能好. 综合上述两种情况, 我们认为混合模糊系统 F_λ 均比 Mamdani 和 T-S 模糊系统的逼近性能好.

6 结论

本文提出的混合模糊系统是基于 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统的共同优点所建立, 故调控参数 λ 的取值变化对混合模糊系统的逼近性具有重要影响. 从定理 1-2 结果可明显看出, 调控参数 λ 值越大, 剖分数 m_λ^0

值就越小,从而导致模糊规则数和前件模糊集个数减少,固然模糊系统的结构就越简单,但其逼近性能就越差;相反,当 λ 变小时,剖分数 m_λ^0 值增大,规则数和前件模糊集个数也增大,相应的模糊系统就变得越复杂,但其逼近效果就越好。特别地,当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 和 $\lambda \rightarrow 1^-$ 时,混合模糊系统分别趋于独立的 Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统。然而,为了使混合模糊系统达到最佳逼近效果究竟该如何优化 λ 取值是不可回避的问题,例如,调控参数 $\lambda = 0.5$ 是最佳选择吗?若在 0.5 附近取值会怎样?这个问题正是接下来要重点考虑的问题。

参考文献

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of system and its applications to modeling and control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybern, 1985, 15(1): 116–132.
- [2] Wang Li-xin, Mendel J. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning [J]. IEEE Transactions Neural Networks, 1992, 3(5): 807–814.
- [3] Wang Li-xin. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems [J]. Fuzzy Set and Systems, 1998, 93(1): 223–230.
- [4] Zeng Xiao-jun, Singh M G. Approximation theory of fuzzy systems-SISO case [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1994, 2(2): 162–176.
- [5] Ying Hao. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximators [J]. Acta Automatica Sinica, 1994, 30(3): 521–525.
- [6] Zeng Ke, Zhang Nai-yao, Xu Wen-li. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773–780.
- [7] 刘晓华,冯恩民,陈卫田,等.一类模糊系统的逼近问题[J].控制与决策,2002,17(4):415–418.
- [8] Ying Hao. General Takagi-Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters [J]. Information Sciences, 1998, 108(1-4): 91–107.
- [9] 刘普寅,李洪兴.广义模糊系统对于可积函数的逼近性[J].中国科学(E辑),2000,30(5):413–423.
Liu Pu-yin, Li Hong-xing. Approximation of generalized fuzzy systems to integrable functions [J]. Science in China, Series E, 2000, 30(5): 413–423. (in Chinese)
- [10] 袁学海,李洪兴,孙凯彪.基于参数单点模糊化方法的模糊系统及逼近能力[J].电子学报,2011,39(10): 2372–2377.
Yuan Xue-hai, Li Hong-xing, Sun Kai-biao. Fuzzy Systems and their approximation capability based on parameter singleton fuzzifier methods [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2372–2377. (in Chinese)
- [11] 袁学海,李洪兴,杨雪.基于模糊变换的模糊系统和模糊推理建模法[J].电子学报,2013,41(4):674–680.
Yuan Xue-hai, Li Hong-xing, Yang Xue. Fuzzy system and fuzzy inference modeling method based on Fuzzy transformation [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4): 674–680. (in Chinese)
- [12] 王贵君,段晨霞.广义分层混合模糊系统及其泛逼近性[J].控制理论与应用,2012,29(5):673–680.
- [13] 王贵君,宋巍巍,韩权杰.基于后件直联型分层的广义混合模糊系统及其积分模逼近[J].控制与决策,2015,30(10):1742–1750.
- [14] Wang De-gang, Song Wen-yan, Li Hong-xing. Approximation properties of ELM-fuzzy systems for smooth functions and their derivatives [J]. Neurocomputing, 2015, 149: 265–274.
- [15] 王贵君,李晓萍,隋晓琳.广义 Mamdani 模糊系统依 K-积分模的泛逼近性及其实现过程[J].自动化学报,2014,40(1):143–148.
Wang Gui-jun, Li Xiao-ping, Sui Xiao-lin. Universal approximation and its realize process of generalized Mamdani fuzzy system in K-integral norms [J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(1): 143–148. (in Chinese)
- [16] 陶玉杰,王宏志,王贵君. Kp-积分模意义下广义 Mamdani 模糊系统的逼近性能及其实现[J].电子学报,2015,43(11):2284–2291.
Tao Yu-jie, Wang Hong-zhi, Wang Gui-jun. Approximation ability and its realization of the generalized Mamdani fuzzy system in the sense of Kp-integral norm [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(11): 2284–2291. (in Chinese)
- [17] 李永明.模糊系统分析[M].北京:科学出版社,2005.

作者简介



董文强 男,1990年出生,硕士研究生,主要研究方向:模糊神经网络与模糊系统。
E-mail: 745844043@qq.com



王贵君(通信作者) 男,1962年出生,教授,吉林集安人。1987年毕业于东北师范大学数学系,1994年获该校理学硕士学位。现任中国模糊系统与模糊数学学会常务理事,天津市数学会理事,天津市工业与应用数学学会理事。研究方向:模糊神经网络、模糊系统分析、模糊测度与积分。
E-mail: tjwgj@126.com