

频谱互质重排亚奈奎斯特率采样方法

钱慧, 杨超

(福州大学物理与信息工程学院, 福建福州 350108)

摘要: 本文提出了一种基于频谱互质重排的超低速率信号采样方法. 该方法将稀疏傅里叶变换从离散时间域拓展到连续时间域, 首先通过互质结构傅里叶展开采样对频域稀疏信号的频谱分量进行重排和压缩, 然后通过基于中国余数定理的亚线性算法对信号进行了重构. 实验结果表明, 本文所提的采样方法可进一步降低频域稀疏信号的采样速率.

关键词: 频域稀疏信号; 亚奈奎斯特率采样; 稀疏傅里叶变换; 中国余数定理; 亚线性算法

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)10-2506-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.10.027

Sub-Nyquist Sampling on Spectrum Co-prime Permutation

QIAN Hui, YANG Chao

(College of Physics and Information Engineering, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China)

Abstract: In this paper, a spectrum co-prime rearrangement based sampling scheme at very low rate is presented. This scheme extends SFT from discrete time domain to continuous time domain. Firstly, the spectrum of sparse signal at the frequency domain is rearranged and compressed by co-prime Fourier sampling expansion. Then it is reconstructed by sub-linear algorithm on Chinese Remainder Theorem. The simulation results show that the proposed sampling scheme can further reduce the sampling rate of spectral sparse signal.

Key words: spectral sparse signal; sub-Nyquist sampling; sparse Fourier transform; Chinese Remainder Theorem; sub-linear algorithm

1 引言

亚奈奎斯特率采样 (Sub-Nyquist Sampling, SNS) 是指采样速率远低于信号两倍带宽 (即, Nyquist 率) 的采样方法^[1]. 近年来, 随着压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 及其相关信号处理理论^[2,3] 的发展, 依据信号的稀疏性, 而不是带宽采集信息的思想逐渐成为研究领域的共识. 目前, 各种不同形式的 SNS 采样方法层出不穷^[4], 主要包括有限新息率采样 (Finite Rate of Innovation, FRI)^[5,6]、随机解调采样 (Random Demodulation, RD)^[7,8] 和调制宽带转换采样 (Modulated Wideband Converter, MWC)^[9,10] 三类. FRI 在信号波形结构已知的前提下, 利用类似于超分辨率谱估计的方式从部分频带信息中重构样本. RD 和 MWC 都根据典型的 CS 原理从频域稀疏信号中提取信号所携带的信息. RD 和 MWC 的不同之处在于, RD 以有限维频域稀疏信号为基础,

而 MWC 则可以处理无限维频域稀疏信号. 这些 SNS 方法都在线性时不变子空间中处理信号的采样问题, 最低采样速率为信号稀疏度的两倍以上. 本文将研究一种频谱重排的 SNS 互质采样模式, 以一倍以上的稀疏度采集信号所携带的信息.

频谱重排是离散傅立叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT) 的主要特性. 在离散时间域中, 时域下采样会导致其频域样本序号重排. 对于频谱稀疏的离散时间信号来说, 频谱重排可有效地压缩邻近频率分量之间的频率间隔, 从而可以以部分 DFT 获得信号所有的频域信息. Anna C Gilbert 等研究学者首次提出利用频谱重排可以减少频域稀疏信号的快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 处理点数^[11]. 之后, MIT 的研究团队对频域稀疏信号的 FFT 进行了广泛而深入地研究, 提出了亚线性 (Sub-linear) 稀疏傅立叶变换 (Sparse Fourier Transform, SFT)^[12], 其研究成果表明

SFT 比传统 FFT 计算速度快 10 至 100 倍^[13-15].

目前, 频谱重排及其相关研究成果的主要应用对象为离散时间信号. 本文首次将频谱重排的方法应用于信号的模数转换中. 首先, 我们确定连续时间时限信号的等效离散模型及频谱重排方法. 之后, 将讨论多通道结构的频谱重排 SNS 采样样本的频域特性, 并结合经典的谱估计理论和 CRT 对样本进行解压, 依据压缩信号处理方法 (Compressive Signal Processing, CSP)^[16] 提取样本的频率位置及系数, 重构信号的 Nyquist 样本.

2 信号模型

考虑一个 L_2 空间内的连续时间实信号 $x(t)$, 该信号是 K 个波形信号的线性组合:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi(t - \tau_k) \quad (1)$$

式中幅度参数 $a_k \in [-1, 1)$, 而 $\varphi(t)$ 为脉冲成形信号, τ_k 为时延参数. 当 $\sum_{k=1}^K \tau_k \ll 1$ 时, 该信号具有典型时域稀疏特性. 该信号的持续时间有限, 当且仅当 $t \in [0, 1)$ 范围内, $x(t)$ 不为零, 其间断点有限可数, 且最高频率不高于 W Hz. 设时延参数为 $\tau_k = \gamma_k t_0$, γ_k 为任意正整数, t_0 为小于 1 的正小数, 表示信号脉冲之间的最小时间间隔. 信号 $x(t)$ 的傅立叶展开系数 (Fourier Series, FS) c_l 为:

$$c[l] = \sum_{k=1}^K a_k e^{-j2\pi\gamma_k t_0} \Phi[l] \quad (2)$$

式中 $\Phi[l]$ 为 $\varphi(t)$ 的傅立叶变换. 显然, $c[l]$ 包含了 $x(t)$ 所有的参数信息, 是本文主要讨论的信号. 假设 $\varphi(t)$ 频域为理想的低通矩形信号, 此时 $c[l]$ 是多个谐波信号的线性组合. 当 $K \ll L$, FRI 等经典 SNS 采样理论认为 $4K+1$ 个样点可以有效地重构 $x(t)$ 的 Nyquist 样本. 而在离散时间域中, SFS 认为对于长度为 L 的样本, 当信号仅包含 K 个复指数信号时, 系统可以通过少于 $2K$ 的离散样本获取信号所携带的信息^[11]. 因此, 本文考虑利用 SFS 实现信号的 SNS 采样.

3 互质频谱重排亚奈奎斯特率采样

3.1 频域展开采样样本的周期延拓分析

根据频域采样基本原理^[17], 在单位时间内, 信号 $x(t)$ 输入 $L = W + 1$ 通道中, 与频域展开核函数 $e^{j2\pi lt}$ ($l = -L/2, \dots, 0, \dots, L/2 - 1$) 进行混频及积分, 系统输出 x_l 就是 $c[l]$. 本文考虑通过分析离散时间域信号频谱重排的特性, 获得面向频域展开采样样本的频谱重排.

考虑对信号 FS 系数 $c[l]$ 以 L 为周期进行周期延拓, 然后以 σ 为下采样因子进行周期拓展:

$$y[l] = c([cl])_L, \quad -L/2 \leq l < L/2 - 1 \quad (3)$$

式中 σ 为任意小于 L 的正整数. 根据 DFT 定义, 序列 $y[l]$ 的 L 点 DFT 可以表示为:

$$Y_L = \sum_{l=-L/2}^{L/2-1} c([cl])_L e^{-\frac{2\pi jml}{L}} \quad (4)$$

其中 $m = -L/2, \dots, L/2 - 1$. 根据 σl 的取值范围, 将表达式 (4) 的右边分割为两个部分:

$$\sum_{l=-L/2}^{\zeta-1} c[\sigma l] e^{-\frac{2\pi jml}{L}} + \sum_{l=\zeta}^{L/2-1} c[\sigma l] e^{-\frac{2\pi jml}{L}} \quad (5)$$

其中 $\zeta = \lceil L/\sigma \rceil$, $\lceil \cdot \rceil$ 为上取整函数. 由于 $c([cl])_L = c[\sigma l - L]$, 从而有

$$\begin{aligned} \sum_{l=\zeta}^{L/2-1} c[\sigma l] e^{-\frac{2\pi jml}{L}} &= \sum_{l=\zeta}^{L/2-1} c[\sigma l - L] e^{-\frac{2\pi jml}{L}} \\ &= \sum_{i=\sigma}^{L/2-1} c[i] e^{-\frac{2\pi jim}{\sigma L}} \end{aligned} \quad (6)$$

同样可以得到

$$\sum_{l=-L}^{\zeta-1} c[\sigma l] e^{-\frac{2\pi jml}{L}} = \sum_{i=-L/2}^{L/2-1-\sigma} c[i] e^{-\frac{2\pi jim}{\sigma L}} \quad (7)$$

将式 (6) 和 (7) 代入 (4), 有

$$Y_L = \sum_{i=-L/2}^{L/2-1} c[i] e^{-\frac{2\pi jim}{\sigma L}} = C(\sigma^{-1} m) \quad (8)$$

式中 $C(m)$ 为原序列 $c[l]$ 的 L 点 DFT 变换, 且有 $\sigma \cdot \sigma^{-1} = 1 \pmod L$. 由以上分析可知, 在连续时间域中, 可以将频域展开核函数 $e^{j2\pi mt}$ 变换为 $e^{j2\pi \sigma l t}$, 从而获得信号周期延拓的下采样样本 $x_l = c[\sigma l]$.

为了获得循环下采样所需要两个部分的采样样本, 定义 $\sigma_1 \sigma_2 = L, \text{lcd}(\sigma_1, \sigma_2) = 1$, 考虑以 σ_1 为因子对傅里叶级数展开采样样本 x_l 进行周期循环下采样变换, 其下采样样本 $x_{\sigma_1 l}$ 的 DFT 为:

$$X_L^{\sigma_1 l} = X_L^{\sigma_1 l} \Big|_{l=0}^{\lceil L/\sigma_1 \rceil - 1} + X_{L/l=\frac{L}{\sigma_1}}^{\sigma_1 l, l-1} = 2X_L^{\sigma_1 l} \Big|_{l=0}^{\sigma_2} \quad (9)$$

显然当下采样因子为采样通道数 L 的分因子时, 两个部分的取值样点完全一致. 对比式 (8) 和 (9) 可知, 采样系统只要选取合适的下采样因子就可以直接获取信号的周期循环下采样样本, 实现连续时间信号 FS 的频谱重排.

3.2 基于频谱重排的亚奈奎斯特率采样

如图 1 所示, 本文将频域展开采样系统分成 N 组, 分别以 σ_1 到 σ_N 为因子进行频域展开下采样处理. 在第 p 个采样时间里, 采样系统可以获得 N 组样本 \hat{X}_η ($\eta = 1, \dots, N$), 每组 \hat{X}_η 包含 L_η 个样本 \hat{x}_{η, l_η} , 且 $L_1 \times \dots \times L_N = L$. 考虑将输出样本表示为向量的形式 $\hat{X} = [\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N]^T$, 此时

$$\hat{X} = \mathbf{I} \mathbf{V}(t) \mathbf{A} \quad (10)$$

式中 \mathbf{A} 为长度为 K 的向量, 第 k 个元素为 a_k , $\mathbf{V}(t)$ 为 $L \times K$ 矩阵, 第 l, k 个元素为 $e^{-j2\pi l \gamma_k t_0}$, \mathbf{I} 是一个 $(L_1 + \dots + L_N) \times L$ 维下采样矩阵, 其第 l, m 个元素为

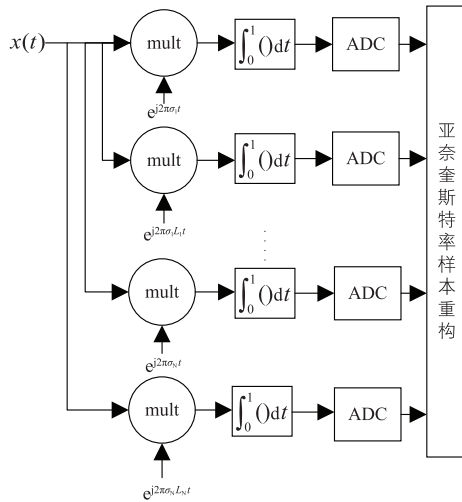


图1 N个采样因子互质的亚奈奎斯特采样

$$v_{l,\eta} = \begin{cases} 1, & \text{if } l/L_\eta = \text{整数} (L_\eta L'_\eta = 1 \pmod L) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

3.3 基于中国余数定理的频谱重构

式(10)显示,基于频谱重排的 SNS 采样系统输出也是一个包含多个谐波频率的线性组合. 考虑第 η 组样本 $\{\hat{x}_{\eta,l}\}_{l=1}^{L_\eta}$, 其 L_η 点 DFT 为 $\delta(m - \hat{q}_{\eta,k})$, 式中 $\hat{q}_{\eta,k}$ 是需估计的频率参数 γ_k 关于 L_η 的余数. 由于采样系统包含了 N 组样本, 通过对每组样本分别求取 DFT 可以获得参数 γ_k 关于 N 组 L_η 的余, 根据经典的 CRT 基本原理, 参数 γ_k 可以获得唯一解. 具体算法实现过程如下 (以双通道为例):

输入参数: 两组采样样本 $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2\}$, 下采样因子 L_1, L_2 , 参数个数 K , 输出参数集合 $\{\tau_k, a_k\}_{k=1}^K$.

初始化: 定义频率参数集合 $\Omega = \{\gamma_1, \dots, \gamma_K\}$.

时延估计: 求取采样样本的 DFT $\{y_{m_1}\}_{m_1=1}^{L_1}$ 和 $\{y_{m_2}\}_{m_2=1}^{L_2}$. 迭代过程: 获得第 1 组样本 DFT 的第 k ($k = 1, \dots, K$) 个样值的位置 $\hat{q}_{1,k}$, 作为参数 γ_k 关于 L_1 的余. 根据 CRT 的基本原理, 参数 γ_k 关于 L_2 上的位置可能为 $\rho_l = (\hat{q}_{1,k} + l \cdot L_1) \pmod{L_2}$ ($l = 1, \dots, L_2$). 取出第 2 组样本 DFT 中相对应位置的 L_2 个幅值 $\{y_{m_2, \rho_l}\}$, 将这些幅值与第 1 组样本中位置 $\hat{q}_{1,k}$ 所对应的幅值 $y_{m_1, \hat{q}_{1,k}}$ 进行比较, 把幅值差距最小的位置定为参数 γ_k 关于 L_2 的余 $\hat{q}_{2,k}$. 计算 $\gamma_k = \hat{q}_{1,k} t_1 M_1 + \hat{q}_{2,k} t_2 M_2$ 和 $\tau_k = \gamma_k / (L_1 \cdot L_2)$.

幅度估计: 依次将 k 个参数 γ_k 和两组采样样本 $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2\}$ 分别代入下列表达式中

$$c_{l_\eta}(k) = M_\eta e^{-j2\pi\gamma_k/(L_1 \cdot L_2)} \sum_{k=1}^K \hat{x}_l e^{j2\pi\gamma_k/M_\eta} \quad (12)$$

取 $c_{l_\eta}(k)$, $l_\eta = 0, \dots, L_\eta, \eta = 1, 2$ 的中值即为预估计的幅度参数 a_k .

4 仿真分析

我们固定采样通道分组数为 2, 对幅度参数以及时延参数在规定的范围内进行随机取值 1000 次构建原始信号模型. 固定 Nyquist 率 $L = 1024\text{Hz}$, 信号的可压缩特性表示为参数个数 K 与 L 的比值.

首先, 我们分析本文方法获得 90% 平均重构概率时, 系统采样点数和稀疏参数个数之间的关系. 在图 2 (a) 的仿真结果显示, 本文方法在采样样点为稀疏参数个数 3 倍以上时可以获得 90% 平均重构概率. 图 2 (b) 显示, 当信噪比为 10dB 时, 采样点数需为稀疏参数个数的 6 倍. 图 2 (c) 显示, 随着信噪比的提升, 成功重构原始信号所需要的采样点数迅速下降, 约为稀疏参数个数的 3.2 倍.

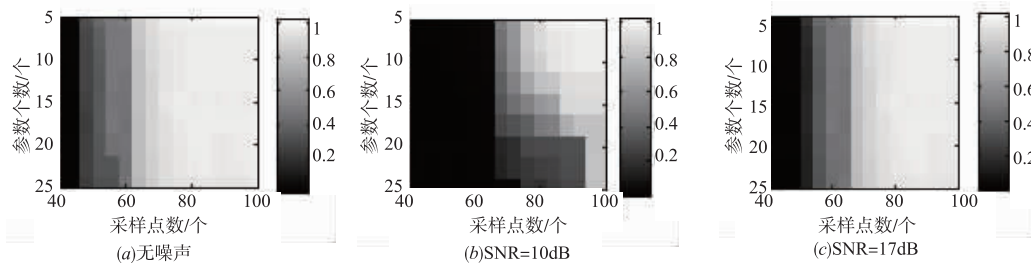


图2 无噪声以及有噪声情况下平均重构率, SNR, 稀疏度以及采样点数之间关系

其次, 我们将本文的算法与经典的 FRI 算法进行了对比分析. 图 3 显示了参数个数固定为 16 时, 两种方法获得 90% 平均重构概率所需的采样点数与 SNR 的关系. 在低信噪比情况下, 本文方法所需的样点也会受到参数个数的影响, 但总体性能优于 FRI 方法. 图 4 和图 5 的实验结果表明经典 FRI 所需的采样点数由参数个数决定, 而本文方法与下采样通道数的选取及其相关

下采样因子有关. 当采样系统重构信号所需的参数个数越多, 本文的方法重构优势越显著.

5 结论

本文根据信号时域下采样等价频域频谱重排的基本思想, 首次将稀疏傅里叶变换应用于模拟信号的低速率采样中, 提出了一种新的低速率亚奈奎斯特率信

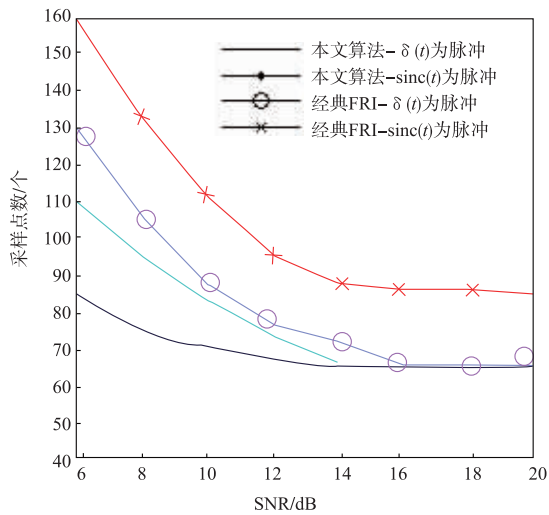
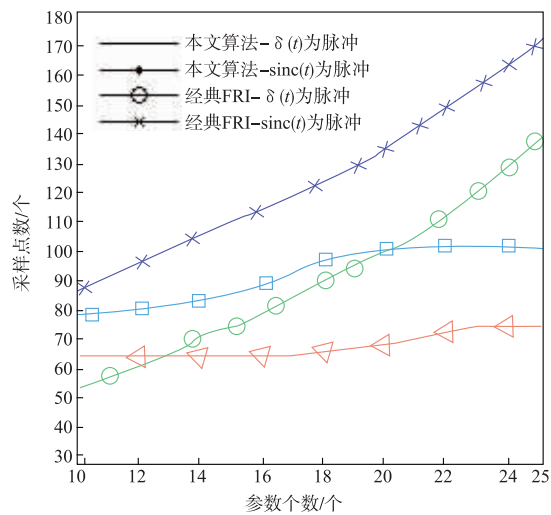
图3 SNR与采样点之间关系, $k=16$ 

图4 参数个数与采样点数关系, SNR=10dB

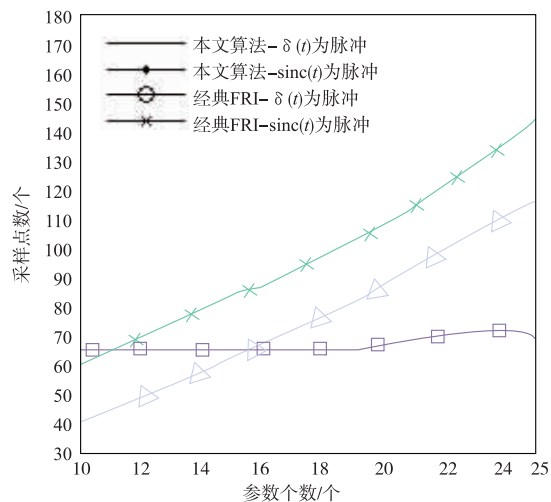


图5 参数个数与采样点数关系, SNR=17dB

号采样方法. 上述一系列实验结果表明, 该算法能在信号波形结构已知的前提下, 以极低的速率重构连续时间信号. 与现有的亚奈奎斯特采样方法不同, 本文采样方法中采样样点的个数是决定信号重构性能的重要参数. 在样本点数以及参数个数较少的情况下, 本文所提出方法的重构性能低于经典 FRI 等亚奈奎斯特采样方法. 但是随着样本点数的以及参数个数的增加, 本文方法的重构性能会明显更为稳定, 成功重构原始信号所需的采样样点数相较其他算法有显著的降低.

参考文献

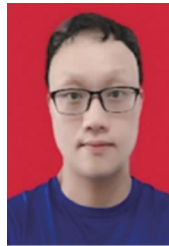
- [1] Mishali M, Eldar Y C. Sub-Nyquist sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2011, 28(6): 98 - 124.
- [2] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [3] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070 - 1081.
SHI Guang-ming, LIU Dan-hua, GAO Da-hua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070 - 1081. (in Chinese)
- [4] 张弓, 文方青, 陶宇, 等. 模拟-信息转换器研究进展 [J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(2): 229 - 238.
ZHANG Gong, WEN Fang-qing, TAO Yu, et al. Advances in analog-to-information converter [J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(2): 229 - 238. (in Chinese)
- [5] Blu T, Dragotti P L, Vetterli M, et al. Sparse sampling of signal innovations [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 31 - 40.
- [6] Dogan Z, Gilliam C, Blu T, et al. Reconstruction of finite rate of innovation signals with model-fitting approach [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(22): 6024 - 6036.
- [7] Tropp J A, Laska J N, Duarte M F, et al. Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse bandlimited signals [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(1): 520 - 544.
- [8] Pillai A K M, Johansson H. Efficient recovery of sub-Nyquist sampled sparse multi-band signals using reconfigurable multi-channel analysis and modulated synthesis filter banks [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(19): 5238 - 5249.
- [9] Mishali M, Eldar Y C. From theory to practice: Sub-nyquist sampling of sparse wideband analog signals [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 375 - 391.
- [10] Guo Q, Liang Y, Chen M, et al. Time-interleaved 20 - GHz modulated wideband converter based on random op-

- tical sampling [J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2015, 27(9): 1022 – 1025.
- [11] Gilbert A C, Strauss M J, Tropp J A. A tutorial on fast Fourier sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 57 – 66.
- [12] M A Iwen. A deterministic sub-linear time sparse Fourier algorithm via non-adaptive compressed sensing methods [A]. Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms [C]. SIAM, 2008. 20 – 29.
- [13] Hassanieh H, Indyk P, Katabi D, et al. Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform [A]. Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms [C]. SIAM, 2012. 1183 – 1194.
- [14] Akavia A. Deterministic sparse Fourier approximation via approximating arithmetic progressions [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(3): 1733 – 1741.
- [15] López-Parrado A, Velasco-Medina J. Cooperative wide-band spectrum sensing based on sub-Nyquist sparse fast Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2016, 63(1): 39 – 43.
- [16] Davenport M A, Boufounos P T, Wakin M B, et al. Signal processing with compressive measurements [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 445 – 460.
- [17] Hoyos S, Sadler B M. Ultra-wideband analog-to-digital conversion via signal expansion [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2005, 54(5): 1609 – 1622.

作者简介



钱 慧(通信作者) 女, 1977 年生于湖北监利, 博士, 讲师, 研究方向为通信信号处理、压缩彩样等。
E-mail: qianhui@fzu.edu.cn



杨 超 男, 1992 年 9 月生于湖南长沙, 现为福州大学物理与信息工程学院硕士研究生, 研究方向为通信信号处理、图像处理等。
E-mail: 2595292470@qq.com