

规则 RC 分形分抗逼近电路的零极点分布

袁子¹, 袁晓²

(1. 清华大学物理系, 北京 100084; 2. 四川大学电子信息学院, 四川成都 610064)

摘要: 从电路结构特性与数学表示特征两方面, 考察与探讨经典的规则 RC 分形分抗逼近电路的阻抗函数之零极点解析求解与数值求解理论与方法. 首先简要介绍经典分形分抗逼近电路并引入迭代电路、迭代函数、迭代矩阵等新概念. 通过特征值分解或 Hamilton-Cayley 展开, 求出迭代矩阵幂而获得某些经典(比如 Oldham 分形链、Carlson 分形格、B 型、2h 型等)分形分抗的阻抗函数之简洁数学解析表达式. 最后给出分抗逼近电路零极点的解析求解法与有效数值求解法及其解结果并进行理论与实践验证.

关键词: 分数阶电路与系统; 分抗; 迭代电路; 迭代矩阵; 多项式的根

中图分类号: **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)10-2511-11

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.10.028

On Zero-Pole Distribution of Regular RC Fractal Fractance Approximation Circuits

YUAN Zi¹, YUAN Xiao²

(1. Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. College of Electronic and Information, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract: The principal purpose of this paper is to investigate and probe the theories and methods of analytical solution and valid numerical solution for the zero-poles of the classical regular RC fractal fractance approximation circuits considering both the circuit structure specialities and mathematic representation characteristics. A brief survey and review on fractal fractance approximation circuits is given and new concepts of iterating circuit, iterating function, and iterating matrix etc are introduced. Finding the iterating matrix power by means of eigenvalue decomposition method or Hamilton-Cayley expansion, a simple expression of the analytical solution is derived for the normalized impedance function of some classical (such as the Oldham fractal chain, the Carlson fractal lattice, H-type, 2h-type etc) fractal fractance approximation circuits. An analytical solution and a valid numerical solution for the zeros and poles of some classical fractal fractance approximation circuit are presented. The solutions are tested in both theory and simulation experiments.

Key words: fractional-order circuits and systems; fractance; iterating circuit; iterating matrix; polynomial roots

1 引言

分抗(fractance)是分数阶阻抗的简称. 它是分数阶元件在电磁学、电气电子学、信号与信息处理、控制理论等领域的称谓. 分抗是设计与构造具有分数阶微积分运算功能的(线性、非线性)电路与系统——分数阶电路与系统^[1-6]的基本元器件!

理想分抗元(fractor)是一个无源二端元件, 其阻抗为

$$Z^{(\mu)}(s) = F^{(\mu)} s^\mu \quad (1)$$

式中 s 是拉普拉斯变量, 通常称为复频率, 在运算微积分中叫做运算变量(operational variable); $\mu \in [-1, +1]$ 称为运算阶; $F^{(\mu)}$ 是表征分抗(元)的集总特征量, SI 单位是

$$[F^{(\mu)}] = \Omega s^\mu = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3+\mu} \text{A}^{-2}. \quad (2)$$

显然有 $F^{(-1)} = 1/C$, $F^{(0)} = R$, $F^{(1)} = L$. 分抗元在蔡氏公理化元件系中是连接基本整数阶电路元件(R, C, L 等)的桥梁^[7-9]. 当 $-1 < \mu < 0$ 时, 算子 s^μ 实现分数阶积分运算, 对应元件——容性分抗元的电学特性介于电容与电阻之间, 用图 1(a) 所示电路符号表示. 当 $0 < \mu < 1$

时,算子 s^μ 实现分数阶微分运算,对应元件——感性分抗元(图 1(b))的电学特性介于电阻与电感之间.可用图 1(a)所示电路符号表示一般意义下的分抗元器件.

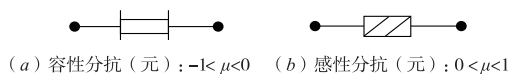


图1 分抗元电路符号

理想分抗元现今是不存在的,因此人们提出各种各样的分抗逼近电路来近似实现分抗的分数阶运算性能^[1-6,9-29].从物理上来说,就是利用可实现的无源二端电路网络(特别是 RC 网络)来逼近理想分抗的运算性能.从数学上来说,就是构造一有理的阻抗函数 $Z_k(s)$ 序列逼近无理的理想分数 μ 阶微积分算子:

$$Z_k(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} \beta_{ki} s^i}{\sum_{i=1}^{d_k} \alpha_{ki} s^i} = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \xrightarrow{\text{附加条件}} Z^{(\mu)}(s), \quad 0 < |\mu| < 1. \quad (3)$$

式中多项式 $N_k(s)$ 、 $D_k(s)$ 的根,也即阻抗函数 $Z_k(s)$ 的零点 z_{ki} 、极点 p_{ki} 完全确定了分抗逼近电路的基本性质(频域特征与运算特征等)^[9].

对于多数经典分抗逼近电路, $N_k(s)$ 、 $D_k(s)$ 都是极高次的大差异系数无缺项多项式,对应的友矩阵^[30-34]条件数很大,是病态矩阵^[33,34].因此用友矩阵特征值法进行数值求解(比如在 MATLAB、Maple 中)是困难的事情.大系数表示的摄动、计算精度与舍入所引起的误差不断积累将会得到错误的结果^[30,33].因此准确求解(特别是解析求解) $N_k(s)$ 与 $D_k(s)$ 的所有根(即零极点)在 s 运算平面内分布,对于分抗、分抗逼近电路、分数阶系统等等的研究是一个重要课题!

本文目的在于从电路与数学两个方面,考察与探讨某些经典的 RC 分形分抗逼近电路阻抗函数序列 $Z_k(s)$ 的零极点解析与数值求解理论与方法.

2 分抗逼近电路与迭代电路概念

分抗逼近问题可追溯到上世纪五六十年代一些先驱者的开拓性研究^[10-13].推动分抗逼近电路研究的原始力量,很可能源自于电磁理论、粘弹动力学、分数阶控制系统理论、电解析化学、生物化学、生物医学,以及分形理论等诸多领域中的分数阶行为与现象、分形分维结构物质与材料、凝聚态物理与无序随机过程等等的分数阶特性的理论描述与数学建模.^[1-5,9,16-22]理清分抗逼近电路研究的历史脉络是一件不容易的事情!研究分抗逼近电路问题是一项具有挑战性的探索课题.^[9]

为了本文目的,下面简要介绍经典的规则 RC 分形分抗逼近电路,与此同时引进迭代电路、迭代函数、迭代

方程等新概念建立分形分抗逼近电路研究的数学基础.

• **Oldham RC 分形链分抗** Oldham 等^[14,15]根据电解析化学过程中所发现新异极谱——半积分电解现象与过程,引进如图 2.1(a)所示 RC 电路——Oldham I 型分形链分抗逼近电路(简称分形链分抗).图中正整数 k 表示电路的级数或节数.根据该电路自相似分形结构特点,其输入阻抗函数可由迭代公式

$$Z_k(s) = R + \frac{Z_{k-1}(s)}{\frac{Cs}{1 + Z_{k-1}(s)}}, \quad k \in N^+ \quad (4a)$$

计算,对应的简化电路(图 2(a))称为 Oldham I 型迭代电路.

令 $Z_k(s) = x_k$, $R = a$, $1/(Cs) = b$,则式(4a)简写为

$$x_k = a + \frac{bx_{k-1}}{b + x_{k-1}} = F(x_{k-1}), \quad k \in N^+. \quad (4b)$$

式中代数函数 $F(x)$ 称为 Oldham I 型分形链分抗的迭代函数.容易证明,迭代式(4b)收敛于代数迭代方程

$$x = F(x) = a + \frac{bx}{b + x} \quad (a \neq b, x \in R^+) \quad (5a)$$

的正实根——Oldham I 型分形链分抗的极限阻抗

$$Z_F(s) = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a}} \right), \quad a \neq b. \quad (5b)$$

这意味着 Oldham I 型分形链分抗的阻抗函数序列收敛:

$$Z_k(s) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Z_F(s) \xrightarrow{4b \gg a} \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2}. \quad (6)$$

由 Oldham I 型分形链分抗逼近电路出发,根据对偶原理^[9],可构造出三种新型分形链分抗逼近电路(图 2(b)、(c)、(d)),对应的迭代函数罗列于附录表之中.

• **Liu 分抗** Liu^[16]就规则 Cantor 分形棒电极建立了自相似结构的等价电路模型——Liu 分形树分抗逼近电路.它由两个标度特征参量 α 与 β 所完全确定($\alpha\beta = \sigma$ 称为标度因子)^[9,16-18].

Kaplan 等^[17,18]提出用标度迭代公式

$$Z_k \left(\frac{s}{\sigma} \right) = R + \frac{\alpha Z_{k-1}(s)}{Cs Z_{k-1}(s) + 1} \quad (k \in N^+) \quad (7)$$

求解 Liu 分形树分抗的阻抗函数序列.由式(7)绘出 Liu-Kaplan 分形链分抗的迭代电路如图 3(a)所示,对应于一个代数迭代方程——Liu-Kaplan 标度方程

$$x(s) = a + \frac{\alpha x(\sigma s)}{1 + \alpha b^{-1} x(\sigma s)}. \quad (8a)$$

这是一个非正则标度方程!它表征了一大类分数阶现象与过程.该方程所描述的分抗逼近电路之运算阶——Liu 氏运算阶

$$\mu_{\text{Liu}} = -\lg \alpha / \lg \sigma. \quad (8b)$$

• **Haba 分形线分抗**^[20,21]其迭代电路如图 3(b)

所示.^[9]

• **N-S 树分抗与 H 型分抗** Nakagawa 和 Sorimachi^[19] 提出并证明自相似二分树分形结构 RC 电路——N-S 分形树分抗(图 3(c)),在极限情况下具有负半阶运算特性.文[24]中提出一种迭代电路如图 3(d)所示的 H 型分抗.这两种分形分抗的结构具有对偶性质^[9],它们的极限阻抗都是 $Z_p(s) = \sqrt{ab} = \sqrt{R/C} s^{-1/2}$.

• **Carlson 分形格分抗** Carlson 和 Halijiak^[11,12] 证明分形格网络具有负半阶运算性能,其迭代电路如图 3(e)所示.

• **B 型与 2h 型分抗** 迭代电路如图 3(f)、(g)所示.^[24-27]

上面简要介绍了一些经典的规则 RC 分形分抗逼近电路,迭代电路是它们的简化等价表示.它们在数学上完全由各自的迭代函数 $F(x)$ (见附录表)所表征与刻画.

从数学理论上来说,由分形分抗的迭代函数,通过数值迭代运算就能获得阻抗函数序列 $Z_k(s)$ 的数值表示,从而进行分抗逼近电路的频域特征、运算特征、逼近性能等各种各样的考察与分析.但随着迭代次数 k 的增加,由于计算精度与舍入所引起的误差不断积累而使得分析失效.另一方面,数值分析不便于从理论上全面考察与分析分抗逼近电路的各种特性.

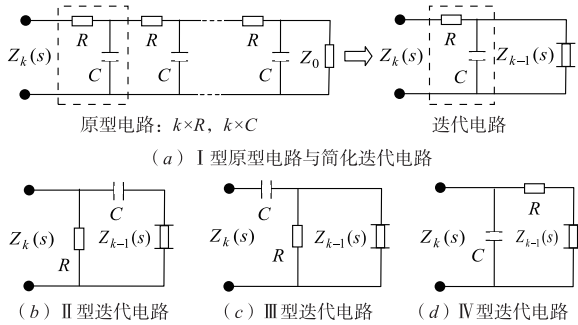


图2 Oldham分形链类分抗逼近电路

从电路理论方面来看,如果求出阻抗 $Z_k(s)$ 的系数矢量

$\beta_k = [\beta_{k0}, \beta_{k1}, \dots, \beta_{kn_k}]$ 、 $\alpha_k = [\alpha_{k0}, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kd_k}]$ (9) 进而解出它们的根,不但可以减少计算代价,而且便于数值与理论两方面对分抗逼近电路的各种性能进行考察与分析.

如何准确求解,特别是解析求解分形分抗逼近电路阻抗函数 $Z_k(s)$ 序列的零极点就是本文的主要研究内容.

3 分形分抗的迭代函数与阻抗函数序列

系数矢量 β_k 与 α_k , 由迭代函数 $F(x)$ 与初始阻抗

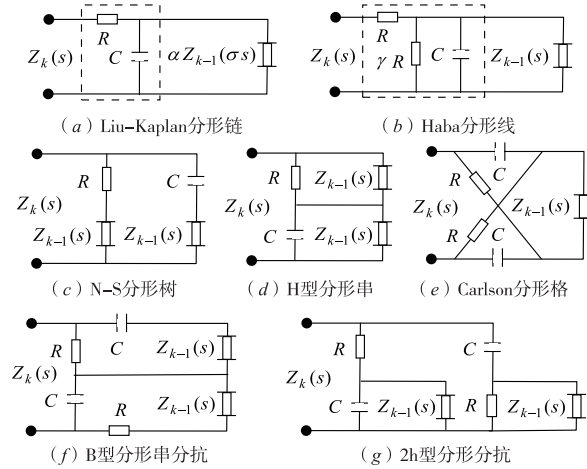


图3 部分规则RC分形分抗逼近电路的迭代电路图

$Z_0(s)$ 确定.

3.1 归一化迭代函数与系数矢量 β_k 、 α_k 的迭代算法

考虑式(4)所描述分抗逼近电路(图 2(a)). 用该电路的特征频率 $\Omega_0 = 1/(RC) = 1/\tau$ 除运算变量 s 得到归一化运算变量

$$w = \frac{s}{\Omega_0} = RCs = \tau s. \quad (10a)$$

取初始阻抗函数

$$Z_0(s) = Z_0\left(\frac{w}{\tau}\right) = R \cdot \frac{N_0(w)}{D_0(w)} = R \cdot Y_0(w), \quad (10b)$$

则由迭代公式(4)递推得到

$$Z_k(s) = Z_k\left(\frac{w}{\tau}\right) = R \cdot \frac{N_k(w)}{D_k(w)} = R \cdot Y_k(w), k \in N^+ \quad (11a)$$

$$Y_k(w) = \frac{N_k(w)}{D_k(w)} = \bar{F}(Y_{k-1}(w)) = \frac{D_{k-1}(w) + (w+1)N_{k-1}(w)}{D_{k-1}(w) + wN_{k-1}(w)} \quad (11b)$$

式中 $Y_k(w)$ 是归一化阻抗函数,而代数迭代函数

$$\bar{F}(y) = 1 + \frac{y}{1+wy} \quad (11c)$$

称为 Oldham I 型分形链分抗的归一化迭代函数.

由式(11)得到计算系数矢量 α_k 、 β_k 的迭代公式

$$\beta_k = [\beta_{k-1}, 0] + [\alpha_{k-1}, 0] + [0, \beta_{k-1}], \quad (12)$$

$$\alpha_k = [\alpha_{k-1}, 0] + [0, \beta_{k-1}]$$

由式(11)、(12)看出,系数矢量与电路元件的取值 R 、 C 无关.系数矢量由其归一化迭代函数——迭代电路结构特性和归一化初始阻抗(或初始系数矢量 β_0 、 α_0) 确定! 通过逐一验证,这一结论对附录表中所有分形分抗逼近电路成立.

考察附录表中罗列的所有系数矢量对应的多项式

发现,它们都是大差异系数且无缺项多项式. 无论从电路理论还是数学上判定,无源分形分抗逼近电路之阻抗函数序列 $Z_k(s)$ 或 $Y_k(w)$ 的零极点都分布在 s 或 w 运算平面的负实轴上!

给定系数矢量,理论上求解友矩阵特征值就能得到对应多项式的全部根! 在 MATLAB 中由函数 roots 实现. 当多项式次数(更准确地说多项式的非零系数个数)超过两位数时,根集中出现大量共轭复根且部分位于右半运算平面! 通过实验发现,非零系数个数超过 19 时,roots 解出的根,随着次数或非零系数个数增加会越来越偏离根的真值而使求解失效. 在文献[30]中,考察了八个不同的无缺项 19 次多项式方程数值求解的相对误差问题. 为论述方便,本文将 19 作为低次、高次分界数.

对于大多数分形分抗逼近电路,需要求解的多项式 $N_k(w)$ 、 $D_k(w)$ 次数会超过三位数甚至更高. 因此,从数值上准确求解阻抗函数序列 $Y_k(w)$ 的所有零极点是极其困难的事情. 这样一来,很自然引出问题:对于给定分形分抗逼近电路,能否直接解析求解超高次、大差异系数、无缺项多项式的所有根——在数学上准确求出零极点的解析表达式?

3.2 迭代矩阵、迭代矩阵幂与归一化阻抗函数

为了解析求解与有效地数值求解阻抗 $Y_k(w)$ 的所有零极点,必须利用电路结构特性、数学表示特征等,通过简化或变换等数学技巧,将 $N_k(w)$ 、 $D_k(w)$ 转化成易解的良态多项式(特别是大缺项多项式、对称多项式、倒数多项式等).

A、归一化迭代函数与分抗的迭代矩阵

考虑图 2(a) 所示分形链电路. 式(11b)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} N_k(w) \\ D_k(w) \end{bmatrix} = \Gamma(w) \begin{bmatrix} N_{k-1}(w) \\ D_{k-1}(w) \end{bmatrix}, \Gamma(w) = \begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix}, k \in N^+ \quad (13)$$

式中幺模方阵 $\Gamma(w)$ 称为 Oldham I 型分抗的迭代矩阵.

迭代矩阵 Γ 是归一化迭代函数 $\bar{F}(y)$ 等价的矩阵表示. 但由 $\bar{F}(y)$ 不一定就能获得等价的 $\Gamma(w)$. 比如,对于 N-S 树、H 型分形分抗, $\bar{F}(y)$ 中存在自变量 y 的二次项而使得我们不知道如何获得它们的迭代矩阵!

对于 Liu-Kaplan 分形链分抗,有

$$\begin{bmatrix} N_k(w) \\ D_k(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma + \sigma w & V \\ \sigma w & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{k-1}(\sigma w) \\ D_{k-1}(\sigma w) \end{bmatrix}, k \in N^+. \quad (14)$$

式中标度因子 σ 的存在使得问题的求解变得困难.

B、迭代矩阵幂、初始阻抗与归一化阻抗函数序列

由式(13)得

$$\begin{bmatrix} N_k(w) \\ D_k(w) \end{bmatrix} = \Gamma^k \begin{bmatrix} N_0(w) \\ D_0(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_k(w) & \delta_k(w) \\ \varepsilon_k(w) & \zeta_k(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(w) \\ D_0(w) \end{bmatrix}, k \in N^+, \quad (15a)$$

或等价为

$$Y_k(w) = \frac{N_k(w)}{D_k(w)} = \frac{\gamma_k(w)N_0(w) + \delta_k(w)D_0(w)}{\varepsilon_k(w)N_0(w) + \zeta_k(w)D_0(w)}, k \in N^+. \quad (15b)$$

初始阻抗 $Z_0(s) = RY_0(w)$ 、 $Y_0(w) = \frac{N_0(w)}{D_0(w)}$ 可以取如图 4 所示的几种简单情形(当然也可考虑 RC 一阶网络). 图中实数 κ 称为初始阻抗参数.

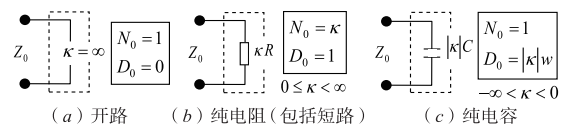


图4 初始阻抗的简单取值情形

纯电阻(包括开路 $\kappa = \infty$ 、短路 $\kappa = 0$)情形时,

$$Y_k(w) = \frac{\kappa\gamma_k(w) + \delta_k(w)}{\kappa\varepsilon_k(w) + \zeta_k(w)}, k \in N^+, 0 \leq \kappa \leq \infty. \quad (16a)$$

对于纯电容阻初始阻抗情形(图 4(c)),有

$$Y_k(w) = \frac{\gamma_k(w) - \kappa w \delta_k(w)}{\varepsilon_k(w) - \kappa w \zeta_k(w)}, k \in N^+, -\infty < \kappa < 0. \quad (16b)$$

C、迭代矩阵幂的计算

直接计算高次迭代矩阵幂 Γ^k 十分繁琐,并将给解析求解或数值求解阻抗函数的零极点带来极大的难度. 幸运的是,现在所面对的迭代矩阵 Γ 是 2 阶非奇异矩阵,可以采用特征值分解与 Hamilton-Cayley 展开两种方法计算 Γ^k .

特征值分解法 如果 $\Gamma = U\Lambda U^{-1}$, 则 $\Gamma^k = U\Lambda^k U^{-1}$.

式(13)所定义函数方阵 $\Gamma(w)$ 的特征方程

$$p_\Gamma(\lambda) = \det(\Gamma - \lambda I) = \lambda^2 - (w+2)\lambda + 1 = 0, \quad (17a)$$

存在两个互为倒数的特征值,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{w+2 + \sqrt{w^2+4w}}{2}, \quad (17b)$$

对应着两个相异特征矢量

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{1+\frac{4}{w}}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sqrt{1+\frac{4}{w}}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (17c)$$

由式(17a)得到运算变量 w 与特征值 λ 的内在关系

$$w+2 = \lambda + \lambda^{-1} \Leftrightarrow w = (\lambda - 1)^2 / 2, \quad (18)$$

从而有(使用特征值变量 λ 表示)

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\lambda-1} & \frac{-\lambda}{\lambda-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

最后得到迭代矩阵幂(使用 λ 表示)

$$\Gamma^k(\lambda) = UA^kU^{-1} = \frac{1}{g_k(\lambda)} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_k(\lambda) & \hat{\delta}_k(\lambda) \\ \hat{\varepsilon}_k(\lambda) & \hat{\zeta}_k(\lambda) \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$= \frac{1}{(\lambda+1)\lambda^k} \begin{bmatrix} \lambda^{2k+1} + 1 & \frac{\lambda(\lambda^{2k} - 1)}{\lambda - 1} \\ (\lambda - 1)(\lambda^{2k} - 1) & \lambda^{2k} + \lambda \end{bmatrix}. \quad (20b)$$

使用 Hamilton-Cayley 展开法也能获得同样结论.

Oldham 分形链的其他类型都可按照 I 型情形处理. 它们的迭代矩阵幂(用 λ 表示)也具有简洁解析表达式(表 1).

D、归一化阻抗函数的解析表达式

将式(20)代入式(15), 超高次无缺项归一化阻抗函数 $Y_k(w) = N_k(w)/D_k(w)$ 被转化成一种简洁的解析式

$$\hat{Y}_k(\lambda) = \frac{\hat{N}_k(\lambda)}{\hat{D}_k(\lambda)} = \frac{\hat{\gamma}_k(\lambda)\hat{N}_0(\lambda) + \hat{\delta}_k(\lambda)\hat{D}_0(\lambda)}{\hat{\varepsilon}_k(\lambda)\hat{N}_0(\lambda) + \hat{\zeta}_k(\lambda)\hat{D}_0(\lambda)}, k \in N^+. \quad (21)$$

从而由式(15)与式(20), 得到 Oldham I 型分形链分抗的输出开路($\kappa = \infty$)、短路($\kappa = 0$)时, 输入阻抗函数可分别表示为

$$\hat{Y}_{ok}(\lambda) = \frac{\lambda^{2k+1} + 1}{(\lambda - 1)(\lambda^{2k} - 1)}, \hat{Y}_{sk}(\lambda) = \frac{\lambda^{2k} + 1}{(\lambda - 1)(\lambda^{2k-1} + 1)}. \quad (22)$$

这一组有理函数的零极点数目增加一倍, 但它们对应着容易解析求解的高次二项方程!

考察 Carlson 格型、B 型、2h 型分抗情形. 它们的迭代矩阵幂可以统一写成

$$\Gamma^k = \begin{bmatrix} \gamma_k & \delta_k \\ \varepsilon_k & \zeta_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^k + \lambda_2^k & d(\lambda_1^k - \lambda_2^k)/\sqrt{w} \\ \sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k)/d & \lambda_1^k + \lambda_2^k \end{bmatrix}. \quad (23)$$

式中 d 是类型标示常数(其取值参见附录表), $\lambda_1 = \lambda_1(w)$ 、 $\lambda_2 = \lambda_2(w)$ 是迭代矩阵的特征值函数. 根据式(15b), 对于纯电阻(包括开路与短路)初始阻抗情形($0 \leq \kappa < \infty$),

$$Y_k(w) = d \cdot \frac{(\kappa\sqrt{w} + d)\lambda_1^k(w) + (\kappa\sqrt{w} - d)\lambda_2^k(w)}{(\kappa\sqrt{w} + d)\lambda_1^k(w) - (\kappa\sqrt{w} - d)\lambda_2^k(w)} \quad (24a)$$

对于纯电容初始阻抗情形($-\infty < \kappa < 0$)有

$$Y_k(w) = d \cdot \frac{(1 - d\kappa\sqrt{w})\lambda_1^k(w) + (1 + d\kappa\sqrt{w})\lambda_2^k(w)}{(1 - d\kappa\sqrt{w})\lambda_1^k(w) - (1 + d\kappa\sqrt{w})\lambda_2^k(w)}. \quad (24b)$$

4 归一化阻抗函数的零极点求解与分析

求出迭代矩阵幂 Γ^k 的简洁数学表达式, 为求解归一化阻抗函数的零极点打下了坚实的数学基础.

4.1 Oldham 分形链分抗逼近电路的零极点求解

式(17)说明, 式(21)中多项式 $\hat{N}_k(\lambda)$ 与 $\hat{D}_k(\lambda)$ 的一对互为倒数的共轭复根(由表 1 知, 它们是 $\lambda^{2k \pm 1} + 1 = 0$ 、 $\lambda^{2k} - 1 = 0$ 的根)共同确定式(15)中多项式 $N_k(w)$ 、 $D_k(\lambda)$ 的一个实根!

表 1 Oldham RC 链分抗的迭代矩阵幂(使用 λ 表示)

| 类型 | I 型 | II 型 | III 型 | IV 型 |
|--------------------------------|---|---|--------------------------|---|
| $\hat{\gamma}_k(\lambda)$ | $\lambda^{2k+1} + 1$ | $\lambda^{2k} + \lambda$ | $\lambda^{2k+1} + 1$ | $\lambda^{2k} + \lambda$ |
| $\hat{\delta}_k(\lambda)$ | $\frac{\lambda(\lambda^{2k} - 1)}{(\lambda - 1)}$ | $(\lambda - 1)(\lambda^{2k} - 1)$ | | $\frac{\lambda(\lambda^{2k} - 1)}{(\lambda - 1)}$ |
| $\hat{\varepsilon}_k(\lambda)$ | $\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda^{2k} - 1)}$ | $\frac{\lambda(\lambda^{2k} - 1)}{(\lambda - 1)}$ | | $(\lambda - 1)(\lambda^{2k} - 1)$ |
| $\hat{\zeta}_k(\lambda)$ | $\lambda(\lambda^{2k-1} + 1)$ | $\lambda^{2k+1} + 1$ | $\lambda^{2k} + \lambda$ | $\lambda^{2k+1} + 1$ |
| $g_k(\lambda)$ | $(\lambda + 1)\lambda^k$ | $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^{2k}$ | | $(\lambda + 1)\lambda^k$ |

A、开路、短路归一化阻抗函数的零极点之解析求解

Oldham I 型链分抗的开路归一化阻抗函数, 由式(22)有

$$\hat{Y}_{ok}(\lambda) = \frac{(\lambda + 1) \prod_{i=0}^{k-1} [\lambda^2 - 2\cos\left(\frac{2i+1}{2k+1}\pi\right)\lambda + 1]}{(\lambda + 1) \prod_{i=0}^{k-1} [\lambda^2 - 2\cos\left(\frac{i}{k}\pi\right)\lambda + 1]}, \quad k \in N^+. \quad (25a)$$

与特征方程(17a) $\lambda^2 - (w+2)\lambda + 1 = 0$ 相对照, 得到

$$z_{ki} = -4\sin^2\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}\right), p_{ki} = -4\sin^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right), 0 \leq i < k. \quad (25b)$$

同理, 可求出 $\hat{Y}_{sk}(\lambda)$ 以及其他 Oldham 分形链分抗的(归一化)开路、短路输入阻抗之零极点解析表达式(表 2).

B、简单初始阻抗时归一化阻抗函数的零极点之求解

根据式(21), 对于纯电阻初始阻抗情形,

$$\begin{cases} \hat{N}_k(\lambda) = \kappa\bar{\gamma}_k(\lambda) + \bar{\delta}_k(\lambda) \\ \hat{D}_k(\lambda) = \kappa\bar{\varepsilon}_k(\lambda) + \bar{\zeta}_k(\lambda) \end{cases}, 0 < \kappa < +\infty, \quad (26a)$$

对于纯电容初始阻抗情形则有

表 2 Oldham RC 链分抗的开路、短路归一化阻抗函数零极点解析表达式

| 类型 | 开路归一化阻抗函数 $Y_{Ok}(w)$ | | 短路归一化阻抗函数 $Y_{Sk}(w)$ | |
|-------|--|--|--|--|
| | 零点: $-z_{ki}$ | 极点: $-p_{ki}$ | 零点: $-z_{ki}$ | 极点: $-p_{ki}$ |
| I 型 | $4\sin^2\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-1)$ | $4\sin^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-1)$ | $4\sin^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ | $4\sin^2\left(\frac{2i+1}{2k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-2)$ |
| II 型 | $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{2i+1}{2k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-2)$ | $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ | $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ | $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-1)$ |
| III 型 | $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-1)$ | $p_{k0}=0$ $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ | $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ | $p_{k0}=0$ $\frac{1}{4}\csc^2\left(\frac{2i-1}{2k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ |
| IV 型 | $4\sin^2\left(\frac{2i+1}{2k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-2)$ | $4\sin^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-1)$ | $4\sin^2\left(\frac{i}{k}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=1 \sim (k-1)$ | $4\sin^2\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}\right)$ $i=0 \sim (k-1)$ |

$$\begin{cases} \hat{N}_k(\lambda) = \bar{\gamma}_k(\lambda) - \kappa w(\lambda) \bar{\delta}_k(\lambda) \\ \hat{D}_k(\lambda) = \bar{\varepsilon}_k(\lambda) - \kappa w(\lambda) \bar{\zeta}_k(\lambda) \end{cases}, -\infty < \kappa < 0. \quad (26b)$$

式中 $w(\lambda)$ 表示 $w-\lambda$ 关系. 表 3 列出了 Oldham 分形链类分抗存在初始阻抗时, 多项式 $\hat{N}_k(\lambda)$ 、 $\hat{D}_k(\lambda)$ 的解析表达式.

表 3 中给定的 16 个方程都是易解方程 (除去因式 λ 或 $\lambda-1$ 之外), 只有四项的倒数方程^[32-34], 可归并成如下两类形式.

表 3 Oldham RC 链分抗的归一化阻抗函数之解析表达式 (用 λ 表示)

| 类型 | κ | $\hat{N}_k(\lambda)$ | $\hat{D}_k(\lambda)$ | ρ | 备注 |
|-------|----------|--|---------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| I 型 | + | $p_3(\lambda)$ | $(\lambda-1)p_1(\lambda)$ | $(1-\kappa)/\kappa$ | $-1 \leq \rho \leq \infty$ |
| | - | $p_1(\lambda)$ | $(\lambda-1)p_2(\lambda)$ | $\kappa/(1-\kappa)$ | $-1 \leq \rho \leq 0$ |
| II 型 | + | $(\lambda-1)p_1(\lambda)$ | $p_3(\lambda)$ | $\kappa-1$ | $-1 \leq \rho \leq \infty$ |
| | - | $(\lambda-1)p_2(\lambda)$ | $p_1(\lambda)$ | $1/(\kappa-1)$ | $-1 \leq \rho \leq 0$ |
| III 型 | + | $(\lambda-1)p_1(\lambda)$ | $\lambda p_2(\lambda)$ | $-1/(\kappa+1)$ | $-1 \leq \rho \leq 0$ |
| | - | $(\lambda-1)p_3(\lambda)$ | $\lambda p_1(\lambda)$ | $-(\kappa+1)$ | $-1 \leq \rho \leq \infty$ |
| IV 型 | + | $\lambda p_2(\lambda)$ | $(\lambda-1)p_1(\lambda)$ | $-\kappa/(\kappa+1)$ | $-1 \leq \rho \leq 0$ |
| | - | $\lambda p_1(\lambda)$ | $(\lambda-1)p_3(\lambda)$ | $-(\kappa+1)/\kappa$ | $-1 \leq \rho \leq \infty$ |
| 说明 | | ① $p_1(\lambda) = \lambda^{2k+1} + \rho\lambda^{2k} + \rho\lambda + 1$ ② $p_2(\lambda) = \lambda^{2k} + \rho\lambda^{2k-1} - \rho\lambda - 1$ $p_3(\lambda) = \lambda^{2k+2} + \rho\lambda^{2k+1} - \rho\lambda - 1$ | | κ : 初始阻抗参数 $k \in N^+$ | |

① 第一类型奇次四项倒数方程

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \lambda^{2k+1} + \rho\lambda^{2k} + \rho\lambda + 1 = (\lambda+1)\bar{p}_1(\lambda) \\ &= (\lambda+1)\left[1 + (\rho-1)\lambda \sum_{i=0}^{2k-2} (-1)^i \lambda^i + \lambda^{2k}\right] \\ &= 0, -1 \leq \rho < \infty. \end{aligned} \quad (27a)$$

式中 $\bar{p}_1(\lambda)$ 是镜像对称多项式, ρ 是由初始阻抗参数 κ 确定的实常数 (参见表 3).

② 第二类型偶次四项倒数方程

$$\begin{aligned} p_2(\lambda) &= \lambda^{2k} + \rho\lambda^{2k-1} - \rho\lambda - 1 = (\lambda^2-1)\bar{p}_2(\lambda) \\ &= (\lambda^2-1)\left[(\rho\lambda+1) \sum_{i=0}^{k-2} \lambda^{2i} + \lambda^{2k-2}\right] = 0, \\ &-1 \leq \rho < \infty. \end{aligned} \quad (27b)$$

式中 $\bar{p}_2(\lambda)$ 是镜像对称多项式.

直接由四项倒数多项式 $p_1(\lambda)$ 、 $p_2(\lambda)$ 表达形式容易判定, 当 $|\rho| \neq 1$ 时, 存在两个互为倒数实根且有

$$r_{1,2k} = \frac{1}{r_{1,2k-1}} \xrightarrow{|\rho| \neq 1} -\frac{1}{\rho}, r_{2,2k-2} = \frac{1}{r_{2,3k-3}} \xrightarrow{|\rho| \neq 1} -\frac{1}{\rho}. \quad (28)$$

镜像对称多项式 $\bar{p}_1(\lambda)$ 与 $\bar{p}_2(\lambda)$ 的所有复根在单位圆上, 共轭互为倒数成对出现,

$$r_{1i} = \exp(\pm j\theta_{1i}), 0 < \theta_{1i} < \pi, i=1 \sim (k-1), \quad (29a)$$

$$r_{2i} = \exp(\pm j\theta_{2i}), 0 < \theta_{2i} < \pi, i=1 \sim (k-2), \quad (29b)$$

式中 θ_{1i} 、 θ_{2i} 分别满足方程 (将 $\lambda = \exp(j\theta)$ 代入方程 (27)),

$$\cos(k\theta + \frac{\theta}{2}) + \rho \cos(k\theta - \frac{\theta}{2}) = 0, 0 < \theta < \pi, \quad (30a)$$

$$\sin(k\theta) + \rho \sin(k\theta - \theta) = 0, 0 < \theta < \pi. \quad (30b)$$

由上述两个三角函数方程极其容易将四项倒数方程 (27) 的所有复根, 在单位圆上逐个隔离出来——获得单个 θ_{1i} 、 θ_{2i} 所在的小区间, 进而实现数值求解. 对于 ρ 的某些特殊值 (比如 $\rho = -1, 0, 1$ 等) 可求出 θ_{1i} 、 θ_{2i} 的解析表达式.

对于 Oldham I 型, 当 $Z_0 = R$, 即 $\kappa = 1 \Leftrightarrow \rho = 0$ 时有

$$\cos(k\theta + \frac{\theta}{2}) = 0, \sin(k\theta + \theta) = 0, 0 < \theta < \pi, \tag{31a}$$

解之,

$$\theta_{1i} = \frac{2\pi i}{2k+1}, i=1 \sim k; \theta_{2i} = \frac{2\pi i}{k+1}, i=1 \sim k. \tag{31b}$$

使用 $w - \lambda$ 关系 $w = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ 转换得到

$$z_{ki} = -4\sin^2\left(\frac{2\pi i}{2k+1}\right), p_{ki} = -4\sin^2\left(\frac{\pi i}{k+1}\right), i=1 \sim k. \tag{32}$$

对于一般的 ρ 取值,由于多项式 $p_1(\lambda), p_2(\lambda)$ 的非零系数只有四个,它们是良态多项式.由 Matlab 中 roots 函数就能获得十分精确的数值解!一旦求得超高次方程式(27)的根 r_{1i} 与 r_{2i} ,通过 $w - \lambda$ 关系获得 $N_k(w), D_k(w)$ 在负实轴上的根!

4.2 Carlson 格型、B 型、2h 型分抗的零极点求解

这三种分形分抗的零极点问题就是求解式(24)中多项式 $N_k(w)$ 与 $D_k(w)$ 之根,它们由零极点方程

$$\left(\frac{\lambda_1(w)}{\lambda_2(w)}\right)^k = \mp \frac{\kappa\sqrt{w-d}}{\kappa\sqrt{w+d}}, 0 \leq \kappa \leq \infty, \tag{33a}$$

$$\left(\frac{\lambda_1(w)}{\lambda_2(w)}\right)^k = \pm \frac{\kappa\sqrt{w+1/d}}{\kappa\sqrt{w-1/d}}, -\infty < \kappa < 0 \tag{33b}$$

表 4 格型、B 型、2h 型分抗逼近电路的零极点之解析表达式

| 类 型 | | Carlson 格型 | B 型、2h 型 |
|-------------------------|-----------------|---|--|
| 开路 $\kappa = \infty$ | 零点 $-z_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{2i+1}{2k}\frac{\pi}{2}\right), i=0 \sim (k-1)$ | $\frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right) + \sqrt{2 + \cot^2\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right)}\right]^2, i=0 \sim (k-1)$ |
| | $-p_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{\pi i}{2k}\right), i=0 \sim k$ | $\frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{\pi i}{k}\right) + \sqrt{2 + \cot^2\left(\frac{\pi i}{k}\right)}\right]^2, i=0 \sim k$ |
| | $-z_{ki}$ | | |
| 短路 $\kappa = 0$ | 极点 $-p_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{2i+1}{2k}\frac{\pi}{2}\right), i=0 \sim (k-1)$ | $\frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right) + \sqrt{2 + \cot^2\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right)}\right]^2, i=0 \sim (k-1)$ |
| $\kappa = d$ | 零点 $-z_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{w+1+\sqrt{2w}}{w+1-\sqrt{2w}}\right)^k = -\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}$ |
| | 极点 $-p_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{\pi i}{2k+1}\right)$ | $\left(\frac{w+1+\sqrt{2w}}{w+1-\sqrt{2w}}\right)^k = \frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}$ |
| $\kappa = -\frac{1}{d}$ | 零点 $-z_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{2i}{2k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{w+1+\sqrt{2w}}{w+1-\sqrt{2w}}\right)^{-k} = \frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}$ |
| | 极点 $-p_{ki}$ | $\cot^2\left(\frac{2i+1}{2k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{w+1+\sqrt{2w}}{w+1-\sqrt{2w}}\right)^{-k} = -\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1}}$ |

5 解结果的验证

对于本文所研究的多项式方程 $N_k(w) = 0, D_k(w) = 0$,由于超高次、无缺项、大差异系数这些因素的存在,必须谨慎认真对待解结果 (z_{ki}, p_{ki}) 正确性的验证

确定.对于 κ 的某些特殊值可获得解析解!开路($\kappa = \infty$)、短路($\kappa = 0$)归一化阻抗函数零极点方程分别是

$$\left[\frac{\lambda_1(w)}{\lambda_2(w)}\right]^k = \mp 1, \left[\frac{\lambda_1(w)}{\lambda_2(w)}\right]^k = \pm 1. \tag{34}$$

该组方程的解析解罗列于表 4 之中.

从电路角度考虑,无源电路的零极点必定是负实数.因此取 $w = -r = -10^v (r \in R^+, v \in R)$,方程组(33)变成

$$\psi^k(r) = \mp \varphi(\kappa, r) (r \in R^+, -\infty < \kappa \leq \infty), \tag{35a}$$

$$\psi(r) = \frac{\lambda_1(-r)}{\lambda_2(-r)} = e^{2\vartheta(r)}, \varphi(\kappa, r) = \zeta(\kappa) e^{2\varphi(\kappa, r)}. \tag{35b}$$

式中实函数 $\vartheta(r), \zeta(\kappa)$ 与 $\varphi(\kappa, r)$ (参见表 5),都是容易计算的基本函数或简单函数!方程组(33)的等价三角函数形式为

$$\begin{cases} \cos(2k\vartheta(r)) = \mp \zeta(\kappa) \cos(2\varphi(\kappa, r)) \\ \sin(2k\vartheta(r)) = \mp \zeta(\kappa) \sin(2\varphi(\kappa, r)) \end{cases} \begin{matrix} (k \in N^+, r \in R^+) \\ (-\infty < \kappa \leq \infty) \end{matrix}. \tag{36}$$

根据三角函数方程组(36),就能给出 Carlson 格型、B 型与 2h 型分形分抗逼近电路零极点的快速数值求解算法与程序.

问题.

5.1 直接验证

直接验证就是采用常规验根方法,验算

$$N_k(z_{k2i}) = 0, D_k(p_{ki}) = 0.$$

对于低次 ($k < 19$) 情形,可以直接使用 Matlab 中

表 5 零极点方程组(35)的解析表达式——格型、B型、2h型分抗

| 类 型 | Carlson 格型 | B 型 | 2h 型 | 备 注 |
|------------------------------|--|---|--------------|---|
| d | 1 | $\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | 类型标示常数 |
| $\lambda_1(w), \lambda_2(w)$ | $(\sqrt{w} \pm 1)^2$ | $w \pm \sqrt{2w} + 1$ | | 特征值函数 |
| $\psi(r)$ | $\left(\frac{\sqrt{ri}+1}{\sqrt{ri}-1}\right)^2$ | $\frac{1-r+\sqrt{2ri}}{1-r-\sqrt{2ri}}$ | | $ \psi(r) \equiv 1$ |
| $\vartheta(r)$ | $\arctan\left(\frac{\sqrt{4r}}{1-r}\right)$ | $\arctan\left(\frac{\sqrt{2r}}{1-r}\right)$ | | $0 < \vartheta(r) < \pi$ |
| $\varphi(\kappa, r)$ | $\zeta(\kappa)$ | $ \operatorname{sgn}(\kappa) - \operatorname{sgn}(\kappa) - 1$ | | $ \varphi(\kappa, r) \equiv 1$ $0 < \varphi(\kappa, r) < \frac{\pi}{2}$ |
| | $\varphi(\kappa, r)$ | $-\operatorname{sgn}(\kappa) \arctan\left(\frac{\kappa\sqrt{r}}{d^{\operatorname{sgn}(\kappa)}}\right)$ | | |
| 说 明 | $w = -r = -10^\nu, r \in R^+, v \in R, -\infty < \kappa \leq \infty$ | | | |

polyval 函数验证解结果的正确性. 但对于高次 ($k > 19$) 与超高次 ($k >> 19$) 情形, 在数值计算上由于(超)高次、无缺项、大差异系数这些因素的存在, 系数表示摄动与机器运算精度等所引起的累积误差, 将会使验根失效—— $N_k(z_{ki})$ 与 $D_k(p_{ki})$ 远远偏离 0.

不同分抗逼近电路, 验根的技巧各不一样. 但都可从理论与实践两方面验证解结果的正确性与(数值解的)精确度.

5.2 理论验证

理论验证包括解结果——零极点的分布区域确定、失根与增根判定等. 本文所考察的分抗逼近电路都是物理可实现无源网络. 由无源网络综合理论的真实性原理(positive reality principle, 因果与稳定的充要条件), 本文所研究的所有分子分母多项式, 肯定都是 Hurwitz 多项式. 因此它们的根分布于左半 w 复平面内. 零极点要么在负实轴上(负实根), 要么共轭成对(共轭复根)出现于左半 w 复平面内.

5.3 实践验证

由解结果——零极点可写出一个有理函数 $\bar{Y}_k(w)$. 给定一个相同的初始阻抗 $Y_0(w)$, 由迭代函数 $\bar{F}(y)$ 数值生成的阻抗函数 $Y_k(w)$ 序列应当有相同的零极点. 如果 $\bar{Y}_k(w) = Y_k(w)$ ($k \in N^+$), 那么零极点解结果的正确性得以验证.

文中给出的所有解结果都进行了仔细的理论与实践验证. 最后得出结论: 无源规则 RC 分形分抗逼近电路的阻抗函数之所有零极点全都分布于 w 平面的负实轴上!

6 结束语

本文解决了某些规则分形分抗逼近电路的阻抗函数之零极点求解问题, 并在一定条件下能够获得简洁的解析表达式. 虽然文中仅论述了少量分抗逼近电路的零极点问题, 但它却提供了值得借鉴的求解范例.

关于求解分形分抗逼近电路零极点的研究过程与结果表明, 细致考察与巧妙利用分抗逼近电路的电学结构特征与数学表示特征, 通过某种数学技巧与变换, 可以将难解的病态的(超)高次无缺项大差异系数多项式方程, 转化为易解的(解析求解与数值求解)良态的更高次大缺项多项式方程或简洁的易解三角函数方程!

参考文献

- [1] M D Ortigueira. An introduction to the fractional continuous-time linear systems; The 21st century systems [J]. IEEE Circuits Syst. Mag., Third Quarter 2008, vol. 8, pp. 19 - 26
- [2] A S Elwakil. Fractional-order circuits and systems: An emerging interdisciplinary research area [J]. IEEE Circuits Syst. Mag., Fourth Quarter 2010; 40 - 50
- [3] Ivo Petráš. Fractional-Order Nonlinear Systems; Modeling, Analysis and Simulation [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011
- [4] V E Tarasov. Fractional Dynamics; Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particle, Fields and Media [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010
- [5] Magin R, Ortigueira M D, Podlubny I, Juan Trujillo. On the fractional signals and systems [J]. Signal Processing, 91 (2011): 350 - 371
- [6] 袁晓, 张红雨, 虞厥邦. 分数导数与数字微分器设计 [J]. 电子学报, 2004, 32(10): 1658 - 1665
- [7] Chua L O. Memristor—The missing circuit element [J]. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, no. 5, pp. 507 - 519, Sep. 1971
- [8] Chua L O. The Fourth Element [J]. Proceedings of the IEEE, June, 2012, 100(6): 1920 - 1927
- [9] 袁晓. 著. 分抗逼近电路之数学原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2015

- [10] Morrison R. RC constant-argument driving-point admittances. IRE Trans on CT, 1959, 310 – 317
- [11] G E Carlson and C A Halijak. Approximation of fixed impedances[J]. IRE Transactions on Circuit Theory, 1962, CT – 9(3); 302 – 303
- [12] G E Carlson and C A Halijak. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton processes [J]. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1964, CT – 11 (2); 210 ~ 213
- [13] S C D Roy. On the realization of a constant-argument immittance or fractional operator. IEEE Trans on Circuit Theory, CT-14; 264 – 274, 1967
- [14] K B Oldham. Semiintegral electroanalysis: Analog implementation[J]. Anal. Chem. , 1973, 45(1) : 39 – 47
- [15] K B Oldham, J Spanier. The Fractional Calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. ACADEMIC PRESS, New York and London, 1974
- [16] S H Liu. Fractal model for the ac response of rough interface[J]. Phys Rev Lett 1985, 55; 529 – 532
- [17] T Kaplan, L J Gray. Effect of disorder on a fractal model for the ac response of a rough interface[J]. Phys. Rev. B32, 7360(1985).
- [18] T Kaplan, L. J. Gray, and S. H. Liu. Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface [J]. Phys. Rev. B35, 5379(1987).
- [19] Nakagawa, M. and Sorimachi, K. Basic characteristics of a fractance device [J]. IEICE Transactions Fundamentals E75-A, 1992, 1814 – 1818
- [20] T C Haba, Ablart G, Camps T. The frequency response of a fractal photolithographic structure[J]. IEEE, Trans Dielectrics Electric Insul 1997, 4(3) : 479 – 49
- [21] T C Haba, G Loum, T Zoueu, and G Ablart. Use of a component with fractional impedance in the realization of an analog regulator of order 1/2[J]. J. Appl. Sci. , 2008, 8; 59 – 67
- [22] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, et al. Frequency band complex noninteger differentiator; Character-ization and synthesis. IEEE Trans on CAS-I, 2000, 47(1) : 25 – 39
- [23] D Mondal and K Biswas. Performance study of fractional order integrator using single-component fractional order element[J]. IET Circuits Devices Syst. , 2011, 5(4) : 334 – 342
- [24] Pu Yifei, Yuan Xiao, Liao Ke, et al. Structuring Analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus. Proceedings of ASICON 2005, IEEE, Oct. 2005. p623 – 627
- [25] 廖科, 袁晓, 蒲亦非 等. 1/2 阶分数演算的模拟 OTA 电路实现[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2005, 37(6) : 150 – 154
- [26] 蒲亦非, 袁晓, 廖科等. 一种实现任意分数阶神经型脉冲振荡器的格型模拟分抗电路[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2006, 38(1) : 128 – 132
- [27] 周激流, 袁晓, 廖科, 蒲亦非. 一种可变阶次模拟分抗电路的实现方案. 四川大学学报(工程科学版), 2007, 39(3) : 141 – 144
- [28] 任毅, 袁晓. 二项展开法实现分数阶模拟分抗电路[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2008, 45(5) : 1100 – 1104
- [29] 邹道, 袁晓, 陶崇强, 杨全. 任意阶分抗的 Padé 有理逼近法[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2013, 50(2) : 293 – 298
- [30] Alan Edelman, H Murakami. Polynomial roots from companion matrix eigenvalues.
- [31] 张贤达 著. 矩阵分析与应用(第 2 版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2013
- [32] 《数学手册》编写组编. 数学手册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997
- [33] 《数学辞海》编辑委员会. 数学辞海 [M]. 山西教育出版社等, 2002
- [34] [美] 罗伯特 J. 奇林 (Robert J. Schilling), 桑德拉 L. 哈里斯 (Sandra L. Harris) 著. Applied Numerical Methods for Engineers Using MATLAB and C. 北京: 机械工业出版社, 2004

作者简介



袁 子 男, 1995 年生于四川成都, 毕业于成都七中, 现就学于清华大学物理系. 专业方向为凝聚态物理实验.
E-mail: yuanz14@ mails. tsinghua. edu. cn



袁 晓 男, 1964 年生于四川中江, 1998 年毕业于电子科技大学电路与系统专业, 工学博士. 目前主要从事现代信号处理理论和应用(特别是分数阶数字滤波器理论与设计、分数阶微积分应用于图像信号和光电信号的分析与处理)、分数阶电路与系统理论(特别是分抗逼近电路的数学原理、分数阶电路设计、测试与应用)等研究. 已公开发表学术论文一百余篇.
E-mail: 18608003303@ wo. com. cn

附录 部分规则 RC 分形分抗逼近电路的电路特征与数学特征

| 分抗类型 | 迭代函数 $F(x)$ | 极限阻抗 Z_F | 归一化迭代函数 $\bar{F}(y)$ | 系数矢量 $\alpha_k, \beta_k (k \in N)$ 迭代公式 | 迭代矩阵 Γ | $\det \Gamma$ | $w - \lambda$ 关系式 特征根 $\lambda_1(w), \lambda_2(w)$ | 备注 |
|---------------------|--|---|--|---|---|--|--|--------------------------|
| Oldham 分形链 分抗 | I 型 | $a + \frac{bx}{b+x}$ | $\frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a}} \right)$ | $1 + \frac{y}{1+wy}$ | $\alpha_{k+1} = [0, \beta_k] + [\alpha_k, 0]$ $\beta_{k+1} = [\beta_k, 0] + \alpha_{k+1}$ | $\begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix}$ | $w = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ $\frac{(w+2) \pm \sqrt{w^2+4w}}{2}$ | $\mu = -\frac{1}{2}$ |
| | II 型 | $\frac{a(b+x)}{a+b+x}$ | $\frac{b}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4a}{b}} - 1 \right)$ | $\frac{1+wy}{1+w+wy}$ | $\beta_{k+1} = [0, \beta_k] + [\alpha_k, 0]$ $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} + [0, \alpha_k]$ | $w \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{w} \\ 1 & 1 + \frac{1}{w} \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{w} = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ $\frac{\left(\frac{1}{w}+2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{w^2} + \frac{4}{w}}}{2}$ | |
| | III 型 | $b + \frac{ax}{a+x}$ | $\frac{b}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{b}} \right)$ | $\frac{1}{w} + \frac{y}{1+y}$ | $\beta_{k+1} = [\beta_k, 0] + [0, \beta_k] + [\alpha_k, 0]$ $\alpha_{k+1} = [0, \beta_k] + [0, \alpha_k]$ | $w \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{w} & \frac{1}{w} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $w = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ $\frac{(w+2) \pm \sqrt{w^2+4w}}{2}$ | |
| | IV 型 | $\frac{b(a+x)}{a+b+x}$ | $\frac{a}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4b}{a}} - 1 \right)$ | $\frac{1+y}{1+w+wy}$ | $\beta_{k+1} = [0, \alpha_k] + [0, \beta_k]$ $\alpha_{k+1} = [0, \beta_k] + [\alpha_k, 0] + [0, \alpha_k]$ | $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ w & 1+w \end{bmatrix}$ | $w = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ $\frac{(w+2) \pm \sqrt{w^2+4w}}{2}$ | |
| Haba 分形线 | $\frac{a + \frac{bx}{b + \left(1 + \frac{b}{\gamma a}\right)x}}$ | $\frac{a}{2} \left(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{4\gamma b}{\gamma a + b}} \right)$ | $\frac{1 + \frac{y}{1 + (\gamma^{-1} + w)y}}$ | $\alpha_{k+1} = [\beta_k, 0] + \gamma[0, \beta_k] + \gamma[\alpha_k, 0]$ $\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} + \gamma[\beta_k, 0]$ | $\gamma \begin{bmatrix} 1 + \bar{w} & 1 \\ \bar{w} & 1 \end{bmatrix}$ | $\bar{w} = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ $\frac{\bar{w} + 2 \pm \sqrt{\bar{w}^2 + 4\bar{w}}}{2}$ | $\bar{w} = w + \frac{1}{\gamma}$ $\gamma > 1$ | |
| Carlson 分形格 | $\frac{2ab + (a+b)x}{a+b+2x}$ | $d\sqrt{ab}$ | $\frac{2 + (1+w)y}{1+w+2wy}$ | $\beta_{k+1} = [\beta_k, 0] + [0, \beta_k] + 2[\alpha_k, 0]$ $\alpha_{k+1} = 2[0, \beta_k] + [\alpha_k, 0] + [0, \alpha_k]$ | $\begin{bmatrix} 1+w & 2 \\ 2w & 1+w \end{bmatrix}$ | $(w-1)^2$ | $\lambda^2 - 2(w+1)\lambda + (w-1)^2 = 0$ $= 0(\sqrt{w} \pm 1)^2$ | $d=1$ |
| B 型 | $\frac{2ab + (a+b)x}{a+b+x}$ | | $\frac{2 + (1+w)y}{1+w+wy}$ | $\beta_{k+1} = [\beta_k, 0] + [0, \beta_k] + 2[\alpha_k, 0]$ $\alpha_{k+1} = [0, \beta_k] + [\alpha_k, 0] + [0, \alpha_k]$ | $\begin{bmatrix} 1+w & 2 \\ w & 1+w \end{bmatrix}$ | w^2 | $\lambda^2 - 2(w+1)\lambda + w^2 + 1 = 0$ $= 0(w+1) \pm \sqrt{2w}$ | $d = \sqrt{2}$ |
| 2h 型 | $\frac{ab + (a+b)x}{a+b+2x}$ | | $\frac{1 + (1+w)y}{1+w+2wy}$ | $\beta_{k+1} = [\beta_k, 0] + [0, \beta_k] + [\alpha_k, 0]$ $\alpha_{k+1} = 2[0, \beta_k] + [\alpha_k, 0] + [0, \alpha_k]$ | $\begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ 2w & 1+w \end{bmatrix}$ | $+1$ | $\lambda^2 - 2(w+1)\lambda + w^2 + 1 = 0$ $= 0(w+1) \pm \sqrt{2w}$ | $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| Liu-Kaplan 分形链 | $a + \frac{b\alpha x(\sigma s)}{1 + b\alpha x(\sigma s)}$ | ? | $1 + \frac{\alpha y(\sigma w)}{1 + w\alpha y(\sigma w)}$ | $\alpha_{k+1} = \alpha[0, \sigma_k \beta_k] + [\sigma_k \alpha_k, 0]$ $\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} + \alpha[\sigma_k \beta_k, 0]$ $\sigma_k = [1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^k]$ | $\begin{bmatrix} N_k(w) \\ D_k(w) \end{bmatrix} = \Gamma_k \begin{bmatrix} N_0(\sigma^k w) \\ D_0(\sigma^k w) \end{bmatrix}$ $\Gamma_k = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_i, \gamma_i = \begin{bmatrix} \alpha(1 + \sigma^i w) & 1 \\ \alpha \sigma^i w & 1 \end{bmatrix}$ | | $k \in N$ $\mu_{Liu} = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma}$ | |
| N-S 分形树 | $\frac{(a+x)(b+x)}{a+b+2x}$ | \sqrt{ab} | $\frac{(1+y)(1+wy)}{1+w+2wy}$ | $\beta_{k+1} = [0, \beta_k * \beta_k] + [0, \alpha_k * \beta_k] + [\alpha_k * \beta_k, 0]$ $\alpha_{k+1} = 2[0, \alpha_k * \beta_k] + [\alpha_k * \alpha_k, 0] + [0, \alpha_k * \alpha_k]$ | | | ? | $\kappa \neq \infty$ |
| H 型 | $\frac{ax}{a+x} + \frac{bx}{b+x}$ | | $\frac{y}{1+y} + \frac{y}{1+wy}$ | $\beta_{k+1} = [\beta_k * \beta_k, 0] + 2[\alpha_k * \beta_k, 0] + [0, \beta_k * \beta_k]$ $\alpha_{k+1} = [0, \beta_k * \beta_k] + [0, \alpha_k * \beta_k] + [\alpha_k * \beta_k, 0]$ $+ [\alpha_k * \alpha_k, 0]$ | | | | ? |
| 说明 | $a = R,$ $b = \frac{1}{(Cs)},$ $a \neq b$ | d 类型标示常数 | 代数描述 $y = \frac{x}{a} = \frac{x}{R}$ | “ \circ ”: 两矢量的点积运算. “ $*$ ”: 两矢量的卷积运算. | 矩阵描述 | 特征方程 $p_\Gamma(\lambda) = 0$ 特征值 λ_1, λ_2 | 电学约束 | |
| | 电路结构特性 | | | 数学表示特征 | | | | |