第10期　　　　　　　　电　子　学　报　　　　　　　　Vol. 45　No. 10
2017年10月　　　　　ACTA ELECTRONICA SINICA　　　　　Oct.　2017

代数商空间的同余结构研究

孙　野，王加阳，张思同
（中南大学信息科学与工程学院，湖南长沙，410083）

摘　要： 商空间理论是粒计算最为重要的模型之一，现有的商空间模型的结构一般为拓扑结构. 当论域结构是代数结构时，拓扑结构中的等价关系已经不再适用，所以使用比等价关系约束更为严格的同余关系. 当给定关系是非同余等价关系时，则引入同余闭包和同余内核的概念来逼近非同余等价关系. 本文系统的论证了同余闭包和同余内核的求法以及一些相关性质与结论. 以此为基础，对代数商空间模型合成进行系统的研究，为使用商空间理论解决代数结构的复杂问题提供了理论基础.

关键词： 粒计算；商空间；代数商空间；同余闭包；同余内核
中图分类号： TP18　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112 (2017)10-2434-05
电子学报 URL： http://www.ejournal.org.cn　　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.10.017

A Study of Congruence Structure in Algebraic Quotient Space

SUN Ye, WANG Jia-yang, ZHANG Si-tong
(*School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha, Hunan* 410083, *China*)

Abstract: Quotient space theory is one of the most important models of granular computing. The structure in the existing quotient space model is usually a topology. If the domain structure is an algebraic structure, the equivalence relation in topological structure is no longer applicable. So the congruence relation in use is stricter than the equivalence relation. When a given relation is a non congruent equivalence relation, it introduces the concept of congruence closure and congruence interior to approximate the relation. The method, the properties and the conclusions are systematically demonstrated in the paper. On this basis, the algebraic quotient space model is systematically studied. The paper provides theoretical basis for solving complicated problems with the algebraic structure using quotient space theory.

Key words: granular computing; quotient space; algebraic quotient space; congruence closure; congruence interior

1　引言

T. Y. Lin 最早提出粒计算概念. 模糊集，粗糙集，商空间等理论均是粒计算的模型[1~5]. 目前，粒计算仍没有统一定义，一般认为粒计算是利用粒对复杂问题求解的一切理论、方法、技术和工具[6].

商空间理论是张钹院士和张铃教授提出的重要粒计算模型. 商空间理论引入结构来描述问题，当论域为拓扑结构时，以论域上的等价关系 R 为粒化规则[7,8]. 这是与其它粒计算模型最显著的区别，所以商空间理论对问题具有更强大的描述与求解能力[9,10]. 张钹院士和张铃教授已经对拓扑商空间模型进行了系统的研究，形成了相应的理论体系[11].

作者所在课题组是国内较早对代数商空间模型进行研究的，并获得了一定的成果. 文献[12]中对代数商空间模型和拓扑商空间模型进行了对比研究. 文献[13,14]在文献[12]的基础上对代数商空间模型进行了更加深入的研究. 以上研究中虽然均提到了同余闭包的概念，却没有对代数商空间模型中的同余结构进行研究，并且国外对此方向的研究较少.

2　同余闭包与同余内核定义及性质

本文只讨论代数商空间的论域与结构，即用二元组$(X,\circ)$描述问题，其中 X 表示问题的论域，$\circ$是论域的结构，即代数的运算，本文讨论二元运算的情况.

2.1　同余关系，同余闭包及同余内核

在介绍同余闭包和同余内核之前，先介绍同余关系的概念.

收稿日期：2016-07-07；修回日期：2016-12-07；责任编辑：马兰英
基金项目：国家自然科学基金(No. 61172031)；2017 年长沙市节能专项项目资助

定义 1　设 R 是代数$(X,\circ)$上的等价关系,其对应商集为 X/R,若$[a]=[b]\in X/R$,对于$\forall c\in X$,有$[a\circ c]=[b\circ c]$且$[c\circ a]=[c\circ b]$,则称 R 是关于运算$\circ$的同余关系.

同余关系又可有如下定义.

定义 2　设 R 为代数$(X,\circ)$上的等价关系,其对应商集为 X/R,对$\forall[a],[b]\in X/R$,满足$[a\circ b]=[c]\in X/R$,则称 R 为同余关系.

引理 1　代数$(X,\circ)$上的全等关系 E 和恒等关系 I 一定是同余关系.

引理 2[13]　代数$(X,\circ)$上任意个同余关系的交是同余关系.

下面给出同余闭包的定义.

定义 3　设 R 为代数$(X,\circ)$上的等价关系,$C(\mathscr{R})$为代数$(X,\circ)$上所有同余关系,$\exists c(R)\in C(\mathscr{R})$,且 $c(R)\supseteq R$,对于$\forall R'\in C(\mathscr{R})$,$R'\supseteq R$ 有 $c(R)\subseteq R'$,则称 $c(R)$为 R 的同余闭包.

可见,等价关系 R 的同余闭包就是包含 R 的最小同余关系.

为了结构的完整性,下面给出与同余闭包对应的同余内核的概念.

定义 4　设 R 为代数$(X,\circ)$上的等价关系,$C(\mathscr{R})$为代数$(X,\circ)$上所有同余关系,$\exists Int(R)\in C(\mathscr{R})$,且 $R\supseteq Int(R)$,对于$\forall R'\in C(\mathscr{R})$,$R'\subseteq R$ 有 $Int(R)\supseteq R'$,则称 $Int(R)$为 R 的同余内核.

可见,等价关系 R 的同余内核就是包含于 R 的最大同余关系.

引理 3[13]　代数$(X,\circ)$上任意非空等价关系都存在同余闭包.

根据引理 2,可得到以下命题.

命题 1　设 R 是$(X,\circ)$上任意非空等价关系,$C(\mathscr{R})$为代数$(X,\circ)$上的所有同余关系,则 $c(R)=\cap_{R\subseteq R_\alpha\in C(R)}R_\alpha$.

同样,可以对应得出同余内核的性质.

引理 4[13]设 R 是代数$(X,\circ)$上的等价关系,$a,b,c\in X$,(a,c),$(b,c)\in R$. 若对$\forall x\in X$,$(x\circ a,x\circ c)$,$(a\circ x,c\circ x)\in R$ 且$(x\circ c,x\circ b)$,$(c\circ x,b\circ x)\in R$,则$(x\circ a,x\circ b)$,$(a\circ x,b\circ x)\in R$.

由引理 4 可得出以下定理.

定理 1　代数$(X,\circ)$上任意个同余关系的并的传递闭包是同余关系.

证明　对于$\forall x_1,x_2\in t(\cup_\alpha R_\alpha)$是$\cup_\alpha R_\alpha$ 的传递闭包,若$(x_1,x_2)\in\cup_\alpha R_\alpha$,则$\exists R_{\alpha_0}\in\{R_\alpha\}_\alpha$ 使得$(x_1,x_2)\in R_{\alpha_0}$,由于 R_{α_0} 是同余关系,必满足对$\forall x\in X$,$(x\circ x_1,x\circ x_2)$,$(x_1\circ x,x_2\circ x)\in R_{\alpha_0}\subseteq t(\cup_\alpha R_\alpha)$;否则$(x_1,x_2)\notin\cup_\alpha R_\alpha$,由传递闭包定义可知,$\exists y_1=x_1,y_2,\cdots,y_m=x_2\in X$,使得$(y_i,y_{i+1})\in t(\cup_\alpha R_\alpha)$,$i=1,2,\cdots,m-1$,故对每个 i,$\exists R_i\in\{R_\alpha\}_\alpha$,使得对$\forall x\in X$,$(x\circ y_i,x\circ y_{i+1})$,$(y_i\circ x,y_{i+1}\circ x)\in t(\cup_\alpha R_\alpha)$,由引理 4 知,对$\forall x\in X$,$(x\circ x_1,x\circ x_2)$,$(x_1\circ x,x_2\circ x)\in t(\cup_\alpha R_\alpha)$. 因此 $t(\cup_\alpha R_\alpha)$为同余关系.

定理得证.

定理 2　代数$(X,\circ)$上任意非空等价关系都存在同余内核.

证明　设 R 是$(X,\circ)$上任意非空等价关系,令$\{R_\alpha\}_\alpha$ 为 X 上包含于 R 的全体同余关系. 设 $R^*=t(\cup_\alpha R_\alpha)$. 因为恒等关系 $I\subseteq R$ 且是同余关系,故$\{R_\alpha\}_\alpha\neq\phi$. 又$\forall\alpha$,$R_\alpha\subseteq R^*$,若要 $Int(R)=R^*$,只需证明 R^* 为同余关系. 由定理 1 可知 R^* 为同余关系,因此 $Int(R)=R^*$,命题得证.

根据定理 1 可得出以下命题.

命题 2　设 R 是$(X,\circ)$上任意非空等价关系,$C(\mathscr{R})$为代数$(X,\circ)$上的所有同余关系,则 $Int(R)=t(\cup_{R\supseteq R_\alpha\in C(R)}R_\alpha)$.

引理 5[13]　代数$(X,\circ)$上任意非空等价关系 R 是同余关系当且仅当 $c(R)=R$.

同余内核有相似的结论.

定理 3　代数$(X,\circ)$上任意非空等价关系 R 是同余关系当且仅当 $Int(R)=R$.

证明　若 $Int(R)=R$,显然 R 是同余关系. 另一方面,若 R 是同余关系,且令$\{R_\alpha\}_\alpha$ 为$(X,\circ)$上包含于 R 的全体同余关系,则 $R\in\{R_\alpha\}_\alpha$. 于是 $R\subseteq t(\cup_\alpha R_\alpha)=Int(R)$,根据同余内核定义 $R\supseteq Int(R)$,因此 $Int(R)=R$.

2.2　同余闭包和同余内核求法

拓扑商空间中,给定一个等价关系 R,就有一种商拓扑结构与原拓扑结构对应. 同样,在代数商空间中,新粒度世界上是否也存在一种商结构与原结构对应.

定义 5 设 R 是代数$(X,\circ)$上的等价关系,$p:X\to X/R$ 为投影. 若商空间 X/R 上存在运算$\circ'$,使得 p 是同态映射,即对$\forall x,y\in X$ 都有 $p(x\circ y)=p(x)\circ' p(y)$,则称$\circ'$为商空间 X/R 上的商运算.

提出商运算的定义之后,自然想到在何种条件下会得到商运算,所以有以下定理.

定理 4　设 R 是代数$(X,\circ)$上的非空等价关系,则商空间 X/R 存在商运算当且仅当 $c(R)=R$.

证明　由根据引理 5,原定理等价于商空间 X/R 存在商运算当且仅当 R 是同余关系. 下面证明命题成立.

(1)若 R 是同余关系,则可定义 X/R 上的二元运算$\circ'$,满足对$\forall x,y\in X$,$[x]\circ'[y]=[x\circ y]$. 上述定理是良定的,因为若$[x_1]=[x_2]$且$[y_1]=[y_2]$,由于 R 是同余关系,故$[x_1\circ y_1]=[x_2\circ y_2]$. 因此,$[x_1]\circ'[y_1]=[x_1\circ$

$y_1]=[x_2\circ y_2]=[x_2]\circ'[y_2]$. p 满足同态性,故$\circ'$是商运算.

(2)若商空间 X/R 上存在商运算$\circ'$,则对 $\forall x,y,w,z\in X$,当$[x]=[y]$,$[w]=[z]$时,有$[x\circ w]=[x]\circ'[w]=[y]\circ'[z]=[y\circ z]$,因此 R 是同余关系.

定理得证.

类似地,同余内核有相应结论.

定理 5 设 R 是代数$(X,\circ)$上的非空等价关系,则商空间 X/R 存在商运算当且仅当 $Int(R)=R$.

证明过程与定理 4 类似.

等价关系 R 不一定是同余关系,但等价关系 R 存在同余闭包和同余内核,所以求等价关系 R 的同余闭包 $c(R)$和同余内核 $Int(R)$是至关重要的.

定义 6 设 R 为代数$(X,\circ)$上的等价关系,其对应商集为 X/R,若$[a],[b]\in X/R$,定义$[a]\circ[b]=\{x\circ y|x\in[a],y\in[b]\}$,称之为等价类积.

下面介绍同余闭包求法.

定理 6 设 R 是代数$(X,\circ)$上的等价关系,其对应的商集为 $X/R=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,令 $P=X/R$,对于$\forall i,j$,等价类积 $B=A_i\circ A_j$,$M=\{A_i|B\cap A_i\neq\phi,A_i\in P\}$,若$|M|\geqslant 2$,则 $P=(P-M)\cup(\cup_{A_i\in M}A_i)$,否则 P 不变. 直至$\forall i,j,B\in P$,此时代数$(X,\circ)$上的等价关系 R 的同余闭包 $c(R)$所对应的划分是 P.

证明 由定理 6 易知 $c(R)\supseteq R$,先证 $c(R)$是同余关系. 由于终止条件是对于$\forall i,j,B\in P$,根据定义 2,$c(R)$是同余关系.

再证明 $c(R)$是 R 的同余闭包.

若 R 是同余关系,则 $c(R)=R$,此时 $c(R)$是 R 的同余闭包;若 R 不是同余关系,假设存在包含 R 的同余关系 $R'\subseteq c(R)$,又终止条件是对$\forall i,j,B\in P$,所以对于 R',$\exists A_i,A_j$ 使得 $A_i\circ A_j\notin X/R'$,所以 R'不是同余关系,即不存在同余关系 $R'\subseteq c(R)$,综上 $c(R)$是等价关系 R 的同余闭包.

定理得证.

例:设代数$(X,\circ)$,其中 $X=\{0,1,2,3,4,5\}$,$\circ=+_6$,给定等价关系 R 使得 $X/R=\{\{0\},\{1\},\{3\},\{4\},\{2,5\}\}$. 求等价关系 R 的同余闭包 $c(R)$.

$\{0\}+_6\{0\}=\{0\}$,此时$|M|=1$,P 不变;

$\{0\}+_6\{1\}=\{1\}$,此时$|M|=1$,P 不变;

…

$\{1\}+_6\{2,5\}=\{0,3\}$,此时$|M|=|\{\{0\},\{3\}\}|=2$,$P=(\{\{0\},\{1\},\{3\},\{4\},\{2,5\}\}-\{\{0\},\{3\}\})\cup\{0,3\}=\{\{0,3\},\{1\},\{4\},\{2,5\}\}$;

…

最后 $X/c(R)=\{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$.

对应地,同余内核的求法如下.

定理 7 设 R 是代数$(X,\circ)$上的等价关系,其对应的商集为 $X/R=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,令 $P=X/R$,对于$\forall i,j$,等价类积 $B=A_i\circ A_j$,$M=\{A_i|B\cap A_i\neq\phi,A_i\in P\}$,若$|M|\geqslant 2$,则 $P=(P-M)\cup\{A_i\cap B|A_i\in M\}\cup\{A_i-A_i\cap B|A_i\in M\}$,否则 P 不变. 直至$\forall i,j,B\in P$,此时代数$(X,\circ)$上的等价关系 R 的同余闭包 $Int(R)$对应的划分是 P.

证明过程与定理 6 类似.

例:设代数$(X,\circ)$,其中 $X=\{0,1,2,3,4,5\}$,$\circ=+_6$,给定等价关系 R 使得 $X/R=\{\{1,4\},\{0,2,3,5\}\}$. 求等价关系 R 的同余内核 $Int(R)$.

$\{1,4\}+_6\{1,4\}=\{2,5\}$,此时$|M|=1$,$P$ 不变;

$\{1,4\}+_6\{0,2,3,5\}=\{0,1,3,4\}$,此时$|M|=2$,$P=(\{\{1,4\},\{0,2,3,5\}\}-\{\{1,4\},\{0,2,3,5\}\})\cup\{\{1,4\}\}\cup\{\{0,3\}\}\cup\{\{2,5\}\}=\{\{1,4\},\{0,3\},\{2,5\}\}$.

最后 $X/Int(R)=\{\{1,4\},\{0,3\},\{2,5\}\}$.

目前,国内对代数商空间模型的同余结构研究很少,很难找到相似算法与定理 6 和定理 7 进行对比研究.

3 代数商空间合成

在商空间理论中把不同粒度世界综合成一个粒度世界的问题就是商空间合成问题. 下面分别利用同余闭包和同余内核在论域和结构合成方面进行分析.

3.1 论域合成

根据已有的拓扑商空间的论域合成方法,在代数商空间的论域合成时有如下命题.

命题 3 设 R_1,R_2 是问题$(X,\circ)$上的任意两个同余关系,则 $R_3=R_1\cap R_2$ 是 R_1,R_2 的合成,记作 $R_1\cdot R_2$.

对问题$(X,\circ)$求解时,若 R_1 和 R_2 为非同余等价关系,可以分别求得 R_1,R_2 的同余闭包(同余内核). 根据命题 3,$R_3=c(R_1)\cap c(R_2)$($R_3=Int(R_1)\cap Int(R_2)$),由引理 2 得,$R_3$ 为同余关系,根据定理 4,合成空间存在商运算. 也可先将两个等价关系合成,再在合成空间的论域上求同余闭包(同余内核),即 $R_3=c(R_1\cap R_2)$($R_3=Int(R_1\cap R_2)$).

下面介绍两种合成方法具有何种关系.

命题 4 设 R_1,R_2 是代数$(X,\circ)$上的两个等价关系,则

(1)$c(R_1\cap R_2)\subseteq c(R_1)\cap c(R_2)$.

(2)$Int(R_1\cap R_2)\supseteq Int(R_1)\cap Int(R_2)$.

证明 (1)由定义 3 可知,$c(R_1)\supseteq R_1$,$c(R_2)\supseteq R_2$,根据引理 2 和引理 5,$c(R_1\cap R_2)\subseteq c(c(R_1)\cap c(R_2))=c(R_1)\cap c(R_2)$.

(2)由定义 4 可知,$Int(R_1)\subseteq R_1$,$Int(R_2)\subseteq R_2$,根据引理 2 和定理 3,$Int(R_1\cap R_2)\supseteq Int(Int(R_1)\cap Int$

$(R_2)) = Int(R_1) \cap Int(R_2)$.

命题得证.

3.2 结构合成

对于问题$(X,\circ)$上的两个等价关系 R_1 和 R_2,可以分别求它们的同余闭包 $c(R_1)$和 $c(R_2)$,然后根据命题 3 对论域进行合成,在结构合成时有如下定理.

引理 6[12] 设$(X_1,\circ_1)$,$(X_2,\circ_2)$是$(X,\circ)$的两个商空间,$X_3 = X_1 \cdot X_2$,$\circ_3: X_3 \times X_3 \to X_3$ 满足,对$\forall [x]_3 \in X_3$,$[x]_3 \circ_3 [y]_3 = ([x]_1 \circ_1 [y]_1) \cap ([x]_2 \circ_2 [y]_2)$,则$\circ_3$ 可定义,且$\circ_3$ 是 X_3 上相对于$\circ$的商运算,同时$\circ_1$,$\circ_2$ 是在 X_1,X_2 上相对于$\circ_3$ 的商运算.

例:设问题为代数$(X,\circ)$,其中 $X = \{0,1,2,3,4,5\}$,$\circ = +_6$. 设$(X_1,\circ_1)$,$(X_2,\circ_2)$是$(X,\circ)$的两个商空间,给定$(X,\circ)$上的两个等价关系 R_1 和 R_2,$X/R_1 = \{\{0\},\{1\},\{3\},\{4\},\{2,5\}\}$,则根据定理 6,$X_1 = X/c(R_1) = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$,$\circ_1 = [+_6]_{c(R_1)}$;同理,$X/R_2 = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\}\}$,$X_2 = X/c(R_2) = \{0,1,2,3,4,5\}$,$\circ_2 = [+_6]_{c(R_2)}$. 那么 $R_3 = c(R_1) \cap c(R_2)$,$X_3 = X/R_3 = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$. 根据引理 6,商运算$\circ_3$ 的运算规则如下.

$\{0,3\} \circ_3 \{0,3\} = (\{0,3\} \circ_1 \{0,3\}) \cap (\{0,1,2,3,4,5\} \circ_2 \{0,1,2,3,4,5\}) = \{0,3\}$,

…

$\{2,5\} \circ_3 \{2,5\} = (\{2,5\} \circ_1 \{2,5\}) \cap (\{0,1,2,3,4,5\} \circ_2 \{0,1,2,3,4,5\}) = \{1,4\}$.

可将商运算$\circ_3$ 的运算规则总结成下表.

表 1 $\circ_3$ 运算规则表

$\circ_3$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$
$\{0,3\}$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$
$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$	$\{0,3\}$
$\{2,5\}$	$\{2,5\}$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$

在上例中,若论域合成时,合成方法为 $R_3' = c(R_1 \cap R_2)$,求解过程如下.

$X/(R_1 \cap R_2) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,此时 $R_1 \cap R_2 = I$,则 $c(R_1 \cap R_2) = I$,$X_3' = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,根据定义 5,求得合成空间商运算$\circ_3' = +_6$.

根据命题 4,二者虽然可能得到的结果相同,但不论在论域合成,还是求商运算,二者使用的方法完全不同.

下面介绍利用同余内核对代数问题进行合成.

根据上例,$X/Int(R_1) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,$X/Int(R_2) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,$R_3 = Int(R_1) \cap Int(R_2)$,$X/R_3 = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,根据引理 6 可得$\circ_3$ 运算规则如下表.

表 2 $\circ_3$ 运算规则表

$\circ_3$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

如果在论域合成时,若合成方法为 $R_3' = Int(R_1 \cap R_2)$,此时 $Int(R_1 \cap R_2)$与 $Int(R_1) \cap Int(R_2)$相等,合成结果相同.

3.3 同余闭包和同余内核的一致性研究与意义

本节将会研究命题 4 中两个结论的一致性,并讨论其应用意义.

3.3.1 同余闭包和同余内核的一致性

(1) $c(R_1 \cap R_2)$和 $c(R_1) \cap c(R_2)$的一致性

首先,当 R_1 和 R_2 都是同余关系时,$R_1 \cap R_2$ 是同余关系,此时 $c(R_1 \cap R_2) = R_1 \cap R_2 = c(R_1) \cap c(R_2)$;其次,当 $c(R_1) \cap c(R_2)$为恒等关系时,由命题 4 得,$c(R_1 \cap R_2)$也为恒等关系,所以 $c(R_1 \cap R_2) = c(R_1) \cap c(R_2)$;再次,当 $c(R_1 \cap R_2)$为全等关系时,由命题 4 得,$c(R_1) \cap c(R_2)$也为全等关系,所以 $c(R_1 \cap R_2) = c(R_1) \cap c(R_2)$;最后,当 $c(R_1 \cap R_2) = c(R_1)$时,此时 $c(R_1) = c(R_1 \cap R_2) \subseteq c(R_1) \cap c(R_2) \subseteq c(R_1)$,所以 $c(R_1 \cap R_2) = c(R_1) \cap c(R_2)$,当 $c(R_1 \cap R_2) = c(R_2)$时,同理可证.

除上述情况,$c(R_1 \cap R_2) \subset c(R_1) \cap c(R_2)$.

(2) $Int(R_1 \cap R_2)$和 $Int(R_1) \cap Int(R_2)$的一致性.

首先,当 R_1 和 R_2 都是同余关系时,$R_1 \cap R_2$ 是同余关系,此时 $Int(R_1 \cap R_2) = R_1 \cap R_2 = Int(R_1) \cap Int(R_2)$;其次,当 $Int(R_1 \cap R_2)$为恒等关系时,由命题 4 得,$Int(R_1) \cap Int(R_2)$也为恒等关系,所以 $Int(R_1) \cap Int(R_2) = Int(R_1 \cap R_2)$. 再次,当 $Int(R_1) \cap Int(R_2)$为全等关系时,由命题 4 得,$Int(R_1 \cap R_2)$也为全等关系,所以 $Int(R_1 \cap R_2) = Int(R_1) \cap Int(R_2)$;最后,当 $Int(R_1) \cap Int(R_2) = Int(R_1)$时,此时 $Int(R_1) = Int(R_1) \cap Int(R_2) \subseteq Int(R_1 \cap R_2) \subseteq Int(R_1)$,所以 $Int(R_1) \cap Int(R_2) = Int(R_1 \cap R_2)$,当 $Int(R_1) \cap Int(R_2) = Int(R_2)$时,同理可证.

除上述情况,$Int(R_1 \cap R_2) \Leftrightarrow Int(R_1) \cap Int(R_2)$.

3.3.2 同余闭包和同余内核的应用意义

代数商空间合成时,设 R_1,R_2 是代数$(X,\circ)$上的两个等价关系,使用 $c(R_1) \cap c(R_2)$进行合成时,若分别知道 $c(R_1)$和 $c(R_2)$,可按引理 6 对商运算进行合成,但这种方法需要分别求得 R_1 和 R_2 的同余闭包. 当使用$c(R_1 \cap R_2)$进行合成时,此时仅需要求解一次同余闭包,从而减少了同余闭包的求解过程,但需要根据定义 5 求解合成空间的商运算. 对于同余内核结论相同.

例如在文献[13]中,研究了代数商空间在网络安

全传输过程中的应用，在分层时，需要以特定属性的同余关系来划分同余类，但这种方法是理想化的. 在庞大的网络下，获得特定属性的同余关系极为困难，而获得等价关系较为容易，再根据定理 6 或定理 7 来近似得到特定属性的同余关系，以便使用代数商空间理论进行分层.

4 结语

对于代数结构问题(X,°)，仅给出一个等价关系R，并不一定能够得到它的商空间. 所以需要约束能力更强的同余关系. 但不是所有的等价关系都是同余关系，当给定非同余等价关系时，需要求得等价关系的同余闭包或同余内核. 本文给出了同余闭包和同余内核求法. 所以文中构造了一对相对应的结构来近似的替代原非同余等价关系. 本文还引出了两种代数商空间的合成方法，并对合成结果进行分析，并在最后讨论了同余闭包和同余内核的一致性及意义. 本文将商空间理论和相关代数理论结合更加紧密，为代数结构问题使用商空间理论进行求解提供了理论依据.

参考文献

[1] Yao Y Y. Granular compting[A]. Proceedings of The 4th Chinese National Conference on Rough Sets and Soft Computing[C]. Chongqing:Computer Science 2004. 1 – 5.

[2] Pedrycz W. Granular computing-the emerging paradigm [J]. Journal of Uncertain Systems,2007,1(1):38 – 61.

[3] Yao Y Y. The rise of granular computing[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition),2008,20(3):299 – 308.

[4] 王国胤，张清华，胡军. 粒计算研究综述[J]. 智能系统学报，2007,2(6):8 – 26.
Wang Guoying, Zhang Qinghua, Hu Jun. Anoverview of granular computing [J]. Caai Transactions on Intelligent Systems,2007,2(6):8 – 26. (in Chinese)

[5] 李道国，苗夺谦，等. 粒度计算研究综述[J]. 计算机科学，2005,32(9):1 – 12.
Li DaoGuo,Miao DuoQian,et al. An overview of granular computing[J]. Computer Science,2005,32(9):1 – 12(in Chinese)

[6] Yao Y Y. Three perspectives of granular computing[J]. Journal of Nanchang Institute of Technology,2006,25(2): 16 – 21.

[7] Yao Yiyu. Granular computing: past, present and future [A]. Proc of the IEEE International Conference on Granular Computing[C]. Hangzhou,China,2008. 80 – 85.

[8] 张燕平，张铃，吴涛. 不同粒度世界的描述法—商空间法[J]. 计算机学报，2004,27(3):328 – 333
Zhang YanPing,Zhang Ling,Wu Tao. The representation of different granular worlds-a quotient space [J]. Chinese Journal of Computers,2004,27(3):328 – 333. (in Chinese)

[9] 王向阳，张燕平. 粒度计算中的商结构[J]. 计算机技术与发展，2008,18(1):111 – 118.
Wang Xiangyang,Zhang Yanping. The quotient structure in granule computing[J]. Computer Technology And Development,2008,18(1):111 – 118. (in Chinese)

[10] Wang J,Zhou J. Research of reduct features in the variable precision rough set model[J]. Neurocomputing,2009,72 (10):2643 – 2648.

[11] 张铃，张钹. 问题求解理论及应用(第 2 版)[M]. 北京：清华大学出版社，2007.
Zhang Lin,Zhang Bo. Theory and Applications of Problem Solving(Second edition)[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2007. (in Chinese)

[12] 王加阳，杨正华. 两种结构的商空间模型比较研究[J]. 电子学报，2013,41(11):2262 – 2269.
Wang Jiayang, Yang Zhenghua. A comparative study of quotient space model with two structures[J]. Acta Electronica Sinica,2013,41(11):2262 – 2269. (in Chinese)

[13] 陈林书，王加阳，杨正华，等. 基于代数结构的商空间模型研究[J]. 电子学报，2016,44(4):952 – 958.
Chen LinShu, Wang JiaYang, Yang ZhengHua. , et al. A study for quotient space model based on algebraic structure [J]. Acta Electronica Sinica,2016,44(4):952 – 958. (in Chinese)

[14] Chen Linshu, Wang Jiayang, Li Li, et al. Quotient space model based on algebraic structure[J]. High Technology Letters,2016,22(2):160 – 169.

作者简介

孙 野 男，1990 年出生于辽宁鞍山，中南大学信息科学与工程学院硕士，主要研究方向智能计算与信息融合.
E-mail:420422475@ qq. com

王加阳 男，1963 年出生于湖南长沙，中南大学信息科学与工程学院教授，博士生导师，主要研究方向智能计算与信息融合.
E-mail:csuwjy@ mail. csu. edu. cn