

基于周期分层重排构造的速率兼容 凿孔极化码算法

陈海强^{1,2}, 韦文娟^{1,2}, 王留洋^{1,2}, 方毅仁^{1,2}, 邓贤恩^{1,2}, 孙友明^{1,2}, 覃团发^{1,2}

(1. 广西大学计算机与电子信息学院, 广西南宁 530004; 2. 广西多媒体通信与网络技术重点实验室, 广西南宁 530004)

摘 要: 受编码构造原理限制, 极化(Polar)码的码长只能是2的幂次方, 不能很好地适应信道状况和系统资源对编码参数在灵活性方面的要求. 凿孔、缩短和重复操作是解决该问题的三种基本技术手段. 本文从分层结构角度, 提出一种基于周期性分层重排构造的凿孔设计算法, 能够方便地得到码长和码率灵活可调的速率兼容极化码(Rate-Compatible Punctured Polar, RCPP); 同时, 算法在执行逐层分裂操作时对左右子图的凿孔位置数进行了设计, 使得最终的凿孔图样具有均匀或准均匀凿孔(Quasi-Uniform Puncturing, QUP)的分布特性. 仿真结果显示, 在误帧率为 $1e-5$ 时, 本文算法相比于随机凿孔方案具有约0.3dB的增益, 相比于传统的QUP方案也能获得约0.15dB的译码增益. 此外, 本文算法得到的凿孔图样更加丰富, 能方便构造出更多实用的RCPP可选码型.

关键词: 极化码; 速率兼容; 准均匀凿孔; 凿孔图样

中图分类号: TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2021)06-1125-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20190937

An Algorithm for Rate-Compatible Punctured Polar Codes Based on Hierarchical Permutation Structure

CHEN Hai-qiang^{1,2}, WEI Wen-juan^{1,2}, WANG Liu-yang^{1,2}, FANG Yi-ren^{1,2},
DENG Xian-en^{1,2}, SUN You-ming^{1,2}, QIN Tuan-fa^{1,2}

(1. The School of Computer, Electronics and Information, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China;

2. Guangxi Key Laboratory of Multimedia Communication and Network Technology, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China)

Abstract: The length of the conventional polar code is limited to the power of two due to its basic construction principle, which may not guarantee the flexibility requirement of the coding parameters for the channel situations and system resources. Puncturing, shortening and repetition are three main techniques to overcome this problem. A new puncturing algorithm based on hierarchical permutation structure is presented, which can conveniently construct the rate-compatible punctured polar (RCPP) with flexible lengths and rates. For the presented algorithm, the punctured-bit number is well designed while performing the layer-by-layer splitting operation, and thus the resulting puncture pattern has the uniform or quasi-uniform puncturing (QUP) distribution. Simulation results show that, the presented algorithm can achieve about 0.3dB and 0.15dB performance gains at a BLER of $1e-5$ compared to the random puncturing algorithm and the conventional QUP algorithm, respectively. Furthermore, the presented algorithm has more available puncture patterns, which may result in more practical RCPP codes.

Key words: polar codes; rate-compatible; QUP; puncture pattern

1 引言

Polar 码是由 E. Arıkan^[1,2]提出的一种新型信道编码技术,也是首个从理论上被严格证明能够达到任意二进制输入离散无记忆对称信道(Binary-Input Discrete

Memoryless Channel, BI-DMC)容量的纠错码. Polar 码具有优秀的译码性能和较低的编译码复杂度,已被采纳为5G控制信道上下行链路的信道编码标准.最初的 Polar 码译码算法是基于信道融合和分裂结构设计的串行抵消(SC)译码算法^[1],该算法在中短码长情况下性

能较差. 由于 Polar 码也可以用因子图表示, 因此研究者们也提出了基于置信传播的译码算法^[3]. 该算法虽然在性能上获得了一定的提升, 但与最优的最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 译码算法仍有差距. 为了进一步提高极化码的性能, 串行抵消列表 (Successive Cancellation List, SCL) 译码算法^[4,5] 和级联了循环冗余校验 (CRC) 的改进算法 (CA-SCL)^[6] 相继被提出, 使得 Polar 码的性能得到极大的提升, 在某些场景下可获得优于 LDPC 和 Turbo 码的性能.

虽然 Polar 码在译码性能方面具有一定的优势, 但由于传统 Polar 码的编码生成矩阵由 2×2 的克罗内克 (Kronecker) 基矩阵扩展而来, 这使得其最终得到的码长只能是 2 的幂次方. 然而, 实际通信中由于信道实时状况和系统资源等会随时发生变化, 这要求系统编码参数 (码长、码率、信息位长度等) 能灵活可调. 因此, 需要一些特别的技术手段对 Polar 码进行改进和设计, 以提高其适用范围. 一个重要的方法是基于预先设计好的 Polar 母码, 通过对其某些比特位置进行凿孔 (Puncture) 处理, 由此得到速率兼容极化码. 已有结果表明, 凿孔图样的选择和设计对 Polar 码的性能影响很大. 典型的凿孔算法是文献 [7] 提出的准均匀凿孔 (QUP) 方案, 基于该方案设计出的凿孔图样, 其凿孔位置呈准均匀分布特性. 与随机凿孔图样相比, 基于 QUP 分布特性凿孔图样所得到的 RCPP 码, 其平均码最小距离更大, 译码性能更好. 当码率较大时, 采用缩短技术^[8] 得到的 RCPP 码具有更好的性能表现. 实际上, 文献 [8] 的缩短方案本质上也是一种凿孔技术, 只不过其凿孔位置必须对应冻结比特位置, 从而在译码时这些位置上的先验信息是已知的. 当系统实际传输的比特大于母码长度时, 3GPP 标准中建议使用重复方案^[9]. 文献 [10] 基于矩阵极化率来衡量凿孔对极化码性能的影响, 并利用分段技术减小最佳凿孔图样的搜索复杂度. 凿孔技术还可以跟渐进冗余混合自动重传 (IR-HARQ) 进行联合设计, 得到性能优越的 RCPP 码^[11,12], 可有效地应用在具有时变特性的宽带无线信道中. 文献 [13] 在渐进冻结 (IF)^[14] 基础上, 利用掩模和重传技术提出了一种母码码长可变和任意匹配速率的 HARQ 方案. Polar 码还可应用于量子密钥的分发和协商^[15] 中. 此外, 相关学者也对 Polar 码在未来 6G 移动通信系统中的可能应用展开了相关的研究工作^[16].

本文从层结构的角度, 提出一种基于周期性分层重排构造的凿孔设计算法. 根据母码的码长将系统分层分裂, 使得每一层的凿孔图样都能基于短周期进行描述和设计. 算法在执行每一层的分裂操作时, 均对其左右子图样的凿孔位置数进行限定和设计, 使得左右凿孔位置数最大相差不能多于 1 位, 保证了最终的凿孔

图样具有准均匀的凿孔 (QUP) 分布特性 (当凿孔位数和子周期分布满足一定约束条件时, 呈完全均匀分布特性). 特别地, 根据分层结构和短周期特性, 我们定义了设计层概念, 可减少算法设计维度, 降低设计复杂度. 本文提出的算法可获得比文献 [7] 更加丰富的凿孔图样, 能够方便地得到码长和码率灵活可调的速率兼容极化码 (RCPP). 仿真结果显示, 本文算法相比于随机凿孔方案和传统的 QUP^[7] 方案都能获得译码增益, 可作为凿孔 Polar 码的一种参考方案.

2 系统模型和符号定义

一个二进制输入离散无记忆信道 (BI-DMC) 表示为 $W: X \rightarrow Y, X = \{0, 1\}$ 表示输入符号集合, Y 表示输出符号集合. 对信道 W 进行 N 次独立使用后, 可得到性质相同的 N 个独立 BI-DMC 信道, 其中 $N = 2^n$. 对这 N 个信道按照一定的规律进行信道变换 (即所谓的信道联合和信道分裂), 即可得到 N 个具有相关性且信道可靠度量各不相同的子信道 $W^{(i)}$, 信道序号 $i = 0, 1, \dots, N-1$. 当 N 足够大时, 各子信道的可靠度量值将呈两极分化现象, 此即信道极化 (polarization). 定义集合 $A \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$, 其阶为 $|A| = K$, 记其补集为 A^c , $|A^c| = N - K$. 在 Polar 码编码过程中, 将选取可靠度量最高前 K 个子信道作为传输信息的信道, 剩余的 $N - K$ 个信道传输冻结比特位 (1 或者 0).

令 $\mathbf{u}_N = (u_A u_{A^c}) = (u_0 u_1 \dots u_{N-1})$ 表示待编码的比特源, 其中, u_A 是信息位集合, u_{A^c} 是冻结位集合. $\mathbf{x}_N = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ 是编码后的码字, 由于 Polar 码具有一般二元线性分组码的性质, 因此也可以用生成矩阵 $\mathbf{G}_N = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ 来实现编码, 即 $\mathbf{x}_N = \mathbf{u}_N \mathbf{G}_N$. 其中, 生成矩阵 $\mathbf{G}_N = \mathbf{B}_N \mathbf{F}_2^{\otimes n}$, $\otimes n$ 表示 n 次克罗内克积, 基矩阵 $\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. \mathbf{B}_N 表示比特反序排序操作, 在具体的编码过程中, 可以利用分层和奇偶重排的概念来完成.

定义某整数 $\varphi(l)$ 到 n 维二进制向量的映射如下:

$$\varphi(l): \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1\}^n \quad (1)$$

其中, $\varphi(l)$ 的二进制表达为 $\varphi(l) = (b_0 b_1 \dots b_{n-1})$, 对应整数 l 的二进制表达为 $l = (b_{n-1} b_{n-2} \dots b_0)$. 令 $\mathbf{F}_2^{\otimes n} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 表示 n 次克罗内克积矩阵的 N 个列向量, 对向量 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 的比特反序操作, 其结果可用上面定义的映射表示, 即

$$\mathbf{B}_N(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = (f_{\varphi(0)}, f_{\varphi(1)}, \dots, f_{\varphi(N-1)}) \quad (2)$$

实际上, 对向量的比特反序操作可以利用迭代递归奇偶重排 \mathbf{R}_N 操作完成. \mathbf{R}_N 是奇偶重排操作, $\mathbf{R}_N(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = (f^o f^e)$, 其中

$$f^o = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2}), f^e = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1}) \quad (3)$$

对一个长为 $N = 2^n$ 的向量进行比特反序操作, 可以

基于分层的概念进行. 从根节点开始, 共分为 n 层. 其中, 对于第 i 层, 需要分别进行 2^{i-1} 次 $R_{N/2^{i-1}}$ 操作. 注意, 最后的第 n 层进行的是 $N/2$ 次 R_2 操作, 其结果与第 $n-1$ 层的向量保持一致.

例如, 对长为 16 的向量 $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{13}, f_{14}, f_{15})$ 进行分层比特反序操作, 从根节点开始可分为 4 层, 第 1 层执行 1 次 R_{16} 操作, 第 2 层执行 2 次 R_8 操作, 第 3 层执行 4 次 R_4 操作, 第 4 层执行 8 次 R_2 操作. 结果为

$$\begin{aligned} B_{16}(f_0, f_1, \dots, f_{15}) &= (f_{\varphi(0)}, f_{\varphi(1)}, \dots, f_{\varphi(15)}) \\ &= (f_0, f_8, \dots, f_7, f_{15}) \end{aligned} \quad (4)$$

图 1 给出了上述分层操作的实现过程. 由于第 4 层的 8 次 R_2 操作结果与第 3 层一致, 图上只显示前面 3 层的操作示意图. 本文的凿孔图样算法将借助于上述分层重排的概念来进行设计.

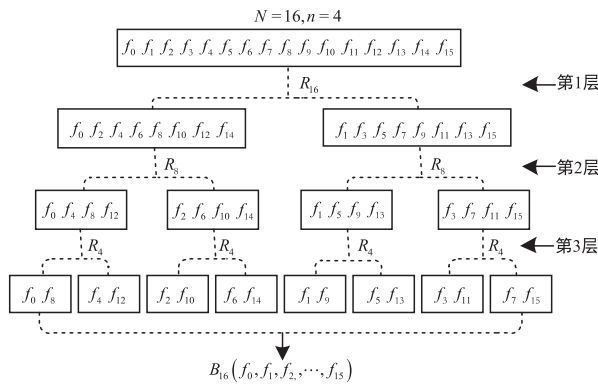


图1 长度 $N=16$ 的分层奇偶重排反序

3 周期性分层凿孔构造算法及分析

3.1 凿孔图样的设计与构造

一个 RCPP 码可以由长度为 N 的母码进行凿孔得到, 凿孔图样用一个凿孔向量 \mathbf{P} 表示,

$$\mathbf{P} = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1}), \quad p_i \in \{0, 1\} \quad (5)$$

其中, $p_i = 0$ 表示对应的位置需要进行凿孔操作. 假设所需的 RCPP 码的码长为 M , 则需要对母码进行 $N_p = N - M$ 个位置的凿孔, 理论上的凿孔图样有 $C_N^{N_p}$ 种. 凿孔图样(即向量 \mathbf{P} 中 0 的分布特性)会直接影响到最终 RCPP 码的译码性能, 因此需要精心设计.

本文从分层结构的角度, 利用周期性分层重排的概念进行凿孔图样的设计和构造. 将一个码长为 $N = 2^n$ 的母码分成 n 层, 从根节点开始对凿孔向量进行设计. 与文献[10]类似, 为了保证最终设计的凿孔图样具有准均匀凿孔(QUP)的特性, 我们在每一层进行分裂的时候, 都使得分裂出来的左边和右边的子图样中, 其凿孔位置尽可能相等.

令 $\mathbf{T}_N^{N_p}$ 表示根节点的周期凿孔图样, 表示 N 个比特位中有 N_p 个位置需要凿孔, 即具有 N_p 个 0 分布在长度

为 N 的比特向量中. 与 $\mathbf{T}_N^{N_p}$ 对应的凿孔图样向量记为 $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{T}_N^{N_p} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_{N-1}^{(0)})$, 上标表示当前的层数(根节点层号记为 0). 在第 1 层执行第 1 次分裂, 即进行 1 次 R_N 奇偶重排操作, 得到 2 个子图样, 记左边的子图样为 $(\mathbf{T}_{N/2}^{N_p^{(1)}})_0$, 右边的子图样为 $(\mathbf{T}_{N/2}^{N_p^{(1)}})_1$. 其中, $N_{pl}^{(1)}$ 表示左边子图样的凿孔位置数, $N_{pr}^{(1)}$ 表示右边子图样的凿孔位置数, 上标表示当前层数. 于是, 第 1 层的凿孔图样由两个子图样构成, 表示为

$$\mathbf{P}^{(1)} = [(\mathbf{T}_{N/2}^{N_p^{(1)}})_0, (\mathbf{T}_{N/2}^{N_p^{(1)}})_1] \quad (6)$$

其中, 下标表示子图样的序号. 为了满足 QUP 特性, 需要左右两边子图样的凿孔位置尽可能相等. 由于凿孔位置数都是非负整数, 因此可以用取整函数来进行控制, 令

$$(N_{pl}^{(1)})_0 = \lfloor N_p/2 \rfloor, (N_{pr}^{(1)})_1 = \lceil N_p/2 \rceil \quad (7)$$

其中, 下标与子图样序号对应, $\lfloor \bullet \rfloor$ 表示左子图样的取整操作函数, $\lceil \bullet \rceil$ 表示右子图样的取整操作函数, 并且有

$$N_p = \lfloor N_p/2 \rfloor + \lceil N_p/2 \rceil \quad (8)$$

在第 1 层的基础上, 执行第 2 次分裂, 即进行 2 次 $R_{N/2}$ 奇偶重排操作, 分裂后的子图样有 4 个, 于是第 2 层的凿孔图样可表示为

$$\mathbf{P}^{(2)} = [(\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_0, (\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_1, (\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_2, (\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_3] \quad (9)$$

类似地, 为了满足 QUP 特性, 每个子图样的凿孔位置可根据其上一层的凿孔位置数, 按照如下规则选取

$$(N_{pl}^{(2)})_0 = \lfloor (N_{pl}^{(1)})_0/2 \rfloor, (N_{pr}^{(2)})_1 = \lceil (N_{pl}^{(1)})_0/2 \rceil \quad (10)$$

$$(N_{pl}^{(2)})_2 = \lfloor (N_{pr}^{(1)})_1/2 \rfloor, (N_{pr}^{(2)})_3 = \lceil (N_{pr}^{(1)})_1/2 \rceil \quad (11)$$

需要指出的是, 本层子图样 $(\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_0, (\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_1$ 由上一层子图 $(\mathbf{T}_{N/2}^{N_p^{(1)}})_0$ 分裂得来, 因此本层左右子图样的凿孔位置数 $(N_{pl}^{(2)})_0$ 和 $(N_{pr}^{(2)})_1$ 由 $(N_{pl}^{(1)})_0$ 决定; 类似地, $(\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_2, (\mathbf{T}_{N/4}^{N_p^{(2)}})_3$ 由上一层 $(\mathbf{T}_{N/2}^{N_p^{(1)}})_1$ 分裂得来, 则凿孔位置数 $(N_{pl}^{(2)})_2$ 和 $(N_{pr}^{(2)})_3$ 均由 $(N_{pr}^{(1)})_1$ 决定.

其余层数的凿孔图样设计可依据以上规则迭代进行. 不失一般性地, 假设当前为第 i 层, 为了得到凿孔图样 $\mathbf{P}^{(i)}$, 则算法需执行 2^{i-1} 次 $R_{N/2^{i-1}}$ 分裂操作, 得到图样

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(i)} &= [(\mathbf{T}_{N/2^i}^{N_p^{(i)}})_0, (\mathbf{T}_{N/2^i}^{N_p^{(i)}})_1, \dots, (\mathbf{T}_{N/2^i}^{N_p^{(i)}})_k, \dots, \\ &\quad \dots, (\mathbf{T}_{N/2^i}^{N_p^{(i)}})_{2^i-2}, (\mathbf{T}_{N/2^i}^{N_p^{(i)}})_{2^i-1}] \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $k = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ 表示子图样的序号; $i = 0, 1, \dots, n$ 表示当前的层数. 令第 i 层的第 k 个子图样的凿孔位置数为 $(N_{pl}^{(i)})_k$, 则其数值由上一层对应的凿孔位置数决定. 根据子图样的位置 k , 可分两种情况进行讨论:

(1) 当 k 为偶数时 ($k = 0, 2, \dots, 2^i - 2$), 对应当前层的左子图样 $(N_{pl}^{(i)})_k$, 其凿孔位置数由上一层的凿孔位置数进行左取整函数 $\lfloor \bullet \rfloor$ 操作得到, 即

$$(N_{pl}^{(i)})_k = \begin{cases} ([N_{pl}^{(i-1)}/2]^l)_{k/2}, & k/2 \text{ 为偶数} \\ ([N_{pr}^{(i-1)}/2]^l)_{k/2}, & k/2 \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (13)$$

注意, k 为偶数时, 当前层的第 k 个子图样由上一层的第 $k/2$ 个子图样分裂而来. 因此, 当 $k/2$ 为偶数时, 对应上一层的左子图样; 当 $k/2$ 为奇数时, 对应上一层的右子图样. 在这两种情况下, 其凿孔位置数是有区别的.

(2) 当 k 为奇数时 ($k=1, 3, \dots, 2^i-1$), 对应当前层的右子图样 $(N_{pr}^{(i)})_k$, 其凿孔位置数由上一层的凿孔位置数进行右取整 $[\cdot]^r$ 操作得到, 计算如下

$$(N_{pr}^{(i)})_k = \begin{cases} ([N_{pl}^{(i-1)}/2]^r)_{(k-1)/2}, & (k-1)/2 \text{ 为偶数} \\ ([N_{pr}^{(i-1)}/2]^r)_{(k-1)/2}, & (k-1)/2 \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (14)$$

类似地, k 为奇数时, 当前层的第 k 个子图样由上一层的第 $(k-1)/2$ 个子图样分裂而来. 因此, 当 $(k-1)/2$ 为偶数时, 对应上一层的左子图样; 当 $(k-1)/2$ 为奇数时, 对应上一层的右子图样.

上述基于逐层分裂重排周期性凿孔图样的构造过程如图 2 所示, 为了便于后面的描述, 示意图中只分裂到第 L 层 (设计层).

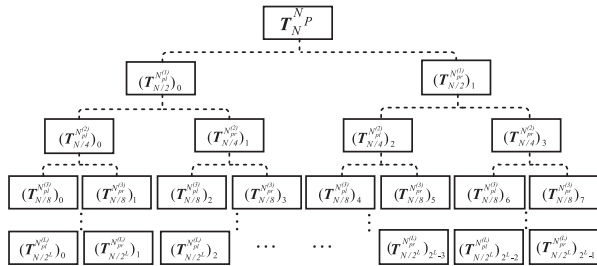


图2 基于周期性的分层凿孔图样构造过程 (分裂至第 L 层)

根据上述构造原理, 为了简化设计图样, 降低复杂度, 重点关注一个与最终图样具有密切关联分裂子层, 令

$$L = \lceil \log_2 N_p \rceil \quad (15)$$

其中, 当 $N_p=1$ 时, 令 $L=1$. 当分裂到第 L 层时, 共有 2^L 个分支, 对应 2^L 个子周期图样, 记为

$$\mathbf{P}^{(L)} = [(T_{N/2^L}^{(L)})_0, (T_{N/2^L}^{(L)})_1, \dots, (T_{N/2^L}^{(L)})_{2^L-2}, (T_{N/2^L}^{(L)})_{2^L-1}] \quad (16)$$

显然, 这时每个子图样所包含的凿孔位置数量要么是 0, 要么是 1, 即

$$N_{p\bullet}^{(L)} \in \{0, 1\} \quad (17)$$

由此可知, 第 L 层子周期图样都呈现 $T_{N/2^L}^0$ 或者 $T_{N/2^L}^1$ 的形式, 即 $N/2^L$ 个位置的取值要么全是 1 (无凿孔位), 要么有 $N/2^L-1$ 个位置取值为 1, 余下的 1 个位置取值为 0 (只选取 1 个凿孔位). 因此, 对应的 $T_{N/2^L}^1$ 周期只有 $N/2^L$ 种组合图样模式, 只需将凿孔位 0 遍历 $T_{N/2^L}^1$ 的

$N/2^L$ 个位置即可. 为了降低复杂度, 我们选择在第 L 层进行设计, 并以性能为优化目标, 确定 $T_{N/2^L}^1$ 的图样分布特性. 基于此, 我们将第 L 层称为设计层.

注意, 从第 $L+1$ 层开始, 从 $T_{N/2^L}^1$ 分裂出来的子图样, 其凿孔位置都只有 1 位. 换言之, 分裂过程中左右子图的凿孔位置数只相差 1 位, 因此其自然满足了 QUP 特性. 基于此, 在第 L 层之后的分裂过程不再考虑左右子图的取整函数, 只需进行奇偶重排操作即可.

当分裂进行到第 n 层时, 凿孔图样 $\mathbf{P}^{(n)}$ 均为子周期 T_2^0 和 T_2^1 的组合分布, 其图样取决于图样 $T_{N/2^L}^1$ 的分布特性; 同时, 由于 $R_{N/2^{L-n}}$ 操作不影响序列排序, 因此, 其结果跟第 $n-1$ 层是一致的, 即

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_{N-1}^{(n)}) \quad (18)$$

由于分层分裂设计过程, 同时也是对 $\mathbf{P}^{(0)}$ 进行比特反序的操作过程, 因此有 $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{B}_N(\mathbf{P}^{(0)})$, 且满足如下关系

$$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{\varphi(0)}^{(0)}, p_{\varphi(1)}^{(0)}, \dots, p_{\varphi(N-1)}^{(0)}) \quad (19)$$

$$\mathbf{P}^{(0)} = (p_{\varphi(0)}^{(n)}, p_{\varphi(1)}^{(n)}, \dots, p_{\varphi(N-1)}^{(n)}) \quad (20)$$

上述设计算法可描述如下:

算法 1 基于周期性分层重排构造的凿孔设计算法

- 初始化** 母码长度 N , 凿孔位数 N_p , 子图取整函数 $[\cdot]^l, [\cdot]^r$, 令初始分裂层 $i=0, (N_{pl}^{(0)})_0 = N_p$, 根据式 (15) 计算设计层深度 L ;
- 分层设计** 当 $i=1:L$ 时, 逐层分裂, 执行以下步骤
 - 步骤 1** 根据式 (13) 和 (14) 分别计算子图样凿孔数;
 - 步骤 2** 逐层分裂至第 L 层, 得到 2^L 个子周期图样 $\mathbf{P}^{(L)} = [(T_{N/2^L}^{(L)})_0, (T_{N/2^L}^{(L)})_1, \dots, (T_{N/2^L}^{(L)})_{2^L-2}, (T_{N/2^L}^{(L)})_{2^L-1}]$;
 - 步骤 3** 以性能为优化目标, 得到第 L 层子周期图样 $T_{N/2^L}^1$ 的分布特性;
 - 步骤 4** 对 $i=L+1:n$, 基于步骤 3 的 $T_{N/2^L}^1$ 图样执行奇偶重排分裂至第 n 层, 得到凿孔向量 $\mathbf{P}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_{N-1}^{(n)})$ 以及对应的 $\mathbf{P}^{(0)} = (p_{\varphi(0)}^{(n)}, p_{\varphi(1)}^{(n)}, \dots, p_{\varphi(N-1)}^{(n)})$.

在设计时, 当系统的凿孔位数 N_p 确定以后, 即可计算设计深度 $L = \lceil \log_2 N_p \rceil$, 同时执行逐层分裂. 分裂过程需要对每层左右子图的凿孔位置数进行选择. 一个简单实用的方法就是进行取整操作, 这个过程一直进行到设计层 L . 在设计层, 以性能为优化目标, 进行周期图样 $T_{N/2^L}^1$ 的设计, 确定其图样分布特性. 由于此时的凿孔位置只有 1 个, 因此最多只有 2^{n-L} 种选择, 明显小于遍历性的 $C_N^{N_p}$ 种选择.

3.2 算法凿孔位置和距离分布特性分析

基于上述凿孔算法, 不失一般性地, 本文给出一个简化的设计策略, 然后进行凿孔位置分布特性和距离特性的分析. 首先, 令每一层左子图样的凿孔取整函数为向上取整, 即 $[\cdot]^l = \lceil \cdot \rceil$, 右子图样的凿孔取整函

数为向下取整,即 $\lceil \cdot \rceil = \lfloor \cdot \rfloor$. 其次,按照算法的初始条件执行逐层分裂. 在该取整策略限制下,每一层分裂时,左右子图分配的凿孔位数基本相同,相差不超过 1 位. 在第 L 层共有 2^L 个子周期图样,由取整策略可知,左半边图样 $[(\mathbf{T}_{N/2^L}^{N/2^L})_0, (\mathbf{T}_{N/2^L}^{N/2^L})_1, \dots, (\mathbf{T}_{N/2^L}^{N/2^L})_{2^{L-1}-1}]$ 的 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 子图样数量为 $\lceil N_p/2 \rceil$, 呈准均匀 (QU) 性地分布在左边的 $N/2$ 个位置上; 同样,右半边图样 $[(\mathbf{T}_{N/2^L}^{N/2^L})_{2^{L-1}}, (\mathbf{T}_{N/2^L}^{N/2^L})_{2^{L-1}+1}, \dots, (\mathbf{T}_{N/2^L}^{N/2^L})_{2^L-1}]$ 的 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 子图样数量为 $\lfloor N_p/2 \rfloor$, 准均匀地分布在右边的 $N/2$ 个位置上. 注意,当 $N_p = 2^L$ 时,第 L 层将全部是 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 图样,即呈完全均匀分布特性; 当 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 设计完毕并逐层进行周期性扩展后,最终得到的凿孔图样必定也呈完全均匀分布的特性.

特别地,当 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的图样设计为 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1 = [0, 1, \dots, 1]$ 时,按照上述策略容易得到最终的凿孔图样 $\mathbf{P}^{(n)}$, 其凿孔位置呈 (准) 均匀分布; 同时,根据算法规则,此时 $\mathbf{P}^{(n)}$ 对应的原始凿孔图样 $\mathbf{P}^{(0)}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0)} &= (p_{\varphi(0)}^{(n)}, p_{\varphi(1)}^{(n)}, \dots, p_{\varphi(N-1)}^{(n)}) \\ &= (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_p}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_M) \end{aligned} \quad (21)$$

可以验证,在这种情况下,本文的凿孔设计图样跟文献[7]是完全一致的,即经典 QUP 算法^[7]可看成本文算法的一个特例. 然而,不一样的是,本文算法的最终凿孔图样 $(p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_{N-1}^{(n)})$ 取决于当每一层左右子图样凿孔数量的选取规则和第 L 层 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的图样分布特性,具有更多的选择,可衍生出更加丰富的凿孔图样,因此更具普适性,能够得到更多可用的 RCPP 码型. 特别地,仿真实验表明,某些凿孔图样在特定的码长、码率下能够获得性能上的提升. 与此同时,本文的设计方法同样也满足 QUP 特性,可作为现实中 RCPP 码设计的一种选择方案.

对于距离特性,也可以在设计层进行分析. 令 $n(\mathbf{T}_{N/2^L}^1)$ 表示设计层子周期图样 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的数量,显然有

$$2^{L-1} < n(\mathbf{T}_{N/2^L}^1) \leq 2^L \quad (22)$$

令相邻两个凿孔位置的最小距离为 D_{\min} , 它等价于两个相邻 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 子图样中两个 0 比特位的距离,用 $D(\mathbf{T}_{N/2^L}^1, \mathbf{T}_{N/2^L}^1)$ 表示,实际上它就是子图样 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的长度,即

$$D(\mathbf{T}_{N/2^L}^1, \mathbf{T}_{N/2^L}^1) = N/2^L = 2^{n-L} \quad (23)$$

类似地,假设相邻两个凿孔位置的最大距离为 D_{\max} , 结合 $n(\mathbf{T}_{N/2^L}^1)$ 和准均匀特性容易推出, D_{\max} 正好是中间有一个 $\mathbf{T}_{N/2^L}^0$ (即无凿孔位) 的两个相邻 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 子图样中,两个 0 比特位的距离,用 $D(\mathbf{T}_{N/2^L}^1, \mathbf{T}_{N/2^L}^0, \mathbf{T}_{N/2^L}^1)$ 表示,它正好是子图样 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 长度的 2 倍,即

$$D_{\max} = D(\mathbf{T}_{N/2^L}^1, \mathbf{T}_{N/2^L}^0, \mathbf{T}_{N/2^L}^1) = 2 * (N/2^L) = 2^{n-L+1} \quad (24)$$

注意, D_{\min} 和 D_{\max} 只依赖于 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的长度, 而跟 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的具体图样特性无关.

3.3 算法复杂度分析

对于基于图样或向量设计的凿孔 Polar 码算法,当母码码长 N 、实际传输码长 M 、码率 R 以及编译码算法确定以后,其编译码过程的复杂度是固定的. 因此,本文算法的复杂度分析,主要针对设计凿孔图样时所产生的复杂度. 当凿孔位数 N_p 确定以后,根据本文算法设计过程执行满足 QUP 特性的逐层分裂操作,一直进行到第 L 层 (即设计层). 为了满足准均匀特性,要求第 L 层的每个凿孔位置都被分配到不同的子图样上. 由于该层共有 2^L 个子图样,因此,该层上的每个子图样所包含的凿孔位置数量最多只能有 1 个; 当 $L = \log_2 N_p$ 时,每个子图样都会分配到 1 个凿孔位置,凿孔位置呈完全均匀分布. 此外,第 L 层每个子图样的长度为 $N/2^L$, 于是该层上的子周期图样是 $\mathbf{T}_{N/2^L}^0$ 和 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的组合. 其中, $\mathbf{T}_{N/2^L}^0$ 表示 $N/2^L$ 个位置的取值全是 1 (无凿孔位); $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 表示 $N/2^L - 1$ 个位置取值为 1, 余下的 1 个位置取值为 0 (凿孔数量为 1).

在具体设计时,对于无凿孔子图样 $\mathbf{T}_{N/2^L}^0$, 其对应一个长度为 $N/2^L$ 的全 1 向量,不产生复杂度; 对于只有 1 个凿孔位置的子图样 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$, 其凿孔图样仅有 $C_{N/2^L}^1 = C_{2^{L-1}}^1 = 2^{n-L}$ 种组合. 相对于随机凿孔方案的 $C_N^{N_p}$ 种子图样数量,本文算法在获得 QUP 特性的同时,明显降低了子图样的组合数量,从而降低了设计复杂度. 此外,当母码码长 N 固定时,设计层深度 L 会随着凿孔位数 N_p 的增大而增大; 而凿孔子图样 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1$ 的组合数量则会逐渐减少,并最终收敛于 2, 这使得本文算法的设计变得简单可行.

4 实验仿真

本节用仿真考察不同码长和码率下,利用本文算法构造的 RCPP 码在二进制加性高斯白噪声信道 (BI-AWGN) 下的误帧率 (BLER) 性能特性. 为公平起见,沿用了文献[7]中的 CA-SCL 译码方法,并使用参数一致的 CRC-24 生成多项式 $g(D) = D^{24} + D^{23} + D^6 + D^5 + D + 1$. 译码器的译码最大路径数为 32. 仿真的总帧数为 $T_{\text{total}} = 10^6$, 结束条件为当错误帧数大于 100 帧或者总帧数超过 T_{total} .

仿真实验 1 选取 Polar 母码长度 $N = 128$, RCPP 码长度 $M = 96$, 码率 $R = 1/2$, 对应的信息位长度 $K = 48$. 凿孔位数 $N_p = N - M = 32$, 逐层分裂的右取整函数为下整,左取整函数为上整. 设计层深度 $L = \lceil \log_2 N_p \rceil = 5$, 设计层每个子周期长度为 $N/2^L = 4$, 共有 $2^L = 32$ 个子周期,正好等于总的凿孔位置数 N_p . 因此,在设计层都是 $\mathbf{T}_{N/2^L}^1 = \mathbf{T}_4^1$ 的子图样 (无 $\mathbf{T}_{N/2^L}^0$ 图样), 并呈完全均匀分布特性,记为 $[(\mathbf{T}_4^1)_0, (\mathbf{T}_4^1)_1, \dots, (\mathbf{T}_4^1)_{30}, (\mathbf{T}_4^1)_{31}]$. 子周期

T_4^1 只有 4 种可选图样, 即 (0111), (1011), (1101), (1110), 分别进行周期填充后继续执行奇偶重排至第 n 层可得到 4 种不同凿孔图样下的 RCPP 码, 其性能如图 3 所示. 其中, 基于子图样 $(T_4^1)_0 = (0111)$ 的 RCPP 码跟文献[7]的 RCPP 码一致(图上用 Niu^[7]表示). 为了便于比较, 图中同时给出随机图样构造的 RCPP 码性能图.

由图可见:(1)随机图样构造的 RCPP 码的性能最差, 说明凿孔图样的特性对 RCPP 码的性能产生影响, 需精心设计;(2)图样 $T_4^1 = (0111)$ 与 $T_4^1 = (1011)$, $T_4^1 = (1110)$ 等三种图样下的 RCPP 码性能相当, 但均优于随机构造 RCPP 码, 说明 QUP 特性能提升 RCPP 码的性能;(3)图样 $T_4^1 = (1101)$ 的性能最优, 在 $\text{BLER} = 10^{-3}$ 时, 比随机构造的 RCPP 码获得约 0.75dB 的增益, 比文献[7]获得约 0.15dB 的增益. 仿真表明在满足 QUP 特性条件下, 经设计凿孔图样, 可获得性能更优的 RCPP 码.

仿真实验 2 选取 Polar 母码长度 $N = 256$, RCPP 码长度 $M = 240$, 码率 $R = 2/3$, 对应的信息位长度 $K = 160$. 凿孔位数 $N_p = N - M = 16$, 逐层分裂的右取整函数为下整, 左取整函数为上整. 设计层深度 $L = \lceil \log_2 N_p \rceil = 4$. 由于 $N_p = 2^L$, 因此设计层均为 $T_{N/2^L}^1 = T_{16}^1$ 的子图样, 并呈完全均匀分布特性, 记为 $[(T_{16}^1)_0, (T_{16}^1)_1, \dots, (T_{16}^1)_{14}, (T_{16}^1)_{15}]$. 子周期 T_{16}^1 具有 16 种可选的图样特性, 即 $T_{16}^1 = (0111111111111111)$, (1011111111111111), \dots , (1111111111111110) 等, 进行周期填充后继续执行奇偶重排至第 n 层可得到 16 种不同凿孔图样下的 RCPP 码. 本例子选取了其中 4 种图样特性下的 RCPP 码, 其中基于子图样 $T_{16}^1 =$

(0111111111111111) 构造的 RCPP 码跟文献[7]一致(图上用 Niu^[7]表示), 它们的译码性能如图 4 所示. 由图可见, 随机图样构造的 RCPP 码性能最差, 距离本文构造的最佳 RCPP 码性能约 0.45dB. 基于 $T_{16}^1 = (1111111011111111)$ 图样构造的 RCPP 码性能最优, 在 $\text{BLER} = 10^{-5}$ 时, 获得比文献[7]约 0.15dB 的增益. 其余三种图样对应的 RCPP 码性能相当, 但均优于随机构造 RCPP 码(约有 0.3dB 的增益).

仿真实验 3 选取 Polar 母码长度 $N = 1024$, RCPP 码长度 $M = 640$, 码率 $R = 1/2$, 对应的信息位长度 $K = 320$, 凿孔位数 $N_p = N - M = 384$. 设计层深度 $L = \lceil \log_2 N_p \rceil = 9$, 设计层子图样的长度为 $N/2^L = 2$. 由于 $2^L > N_p$, 因此设计层中存在 $T_{N/2^L}^0$ 子图样. 当逐层分裂的右取整函数为下整, 左取整函数为上整时, 设计层的最小设计单位 $T_{N/2^L}^1 = T_2^1$, 设计图样为 $[T_2^1 T_2^1 T_2^1 T_2^0]$. 改变逐层分裂取整规则, 令右取整函数为上整, 左取整函数为下整, 此时设计层的最小设计单位不变, 仍为 $T_{N/2^L}^1 = T_2^1$, 但设计图样变为 $[T_2^0 T_2^1 T_2^1 T_2^1]$. 在这种情况下, 我们可得到 4 种形式的设计子图样: (01010111), (10101011), (11010101), (11101010), 进行周期填充后继续执行奇偶重排至第 n 层即可得到 4 种不同凿孔图样下的 RCPP 码. 其中, 基于设计图样 (01010111) 的 RCPP 码跟文献[7]一致(图上用 Niu^[7]表示). 图 5 给出了上述 4 种 RCPP 码的译码性能曲线. 由图可见: 设计图样 (01010111) 与 (10101011), (11101010) 等三种图样下的 RCPP 码性能相差不大; 基于设计图样 (11010101) 的性能最优, 在 $\text{BLER} = 10^{-5}$ 时, 能获得比文献[7]约 0.1dB 的增益.

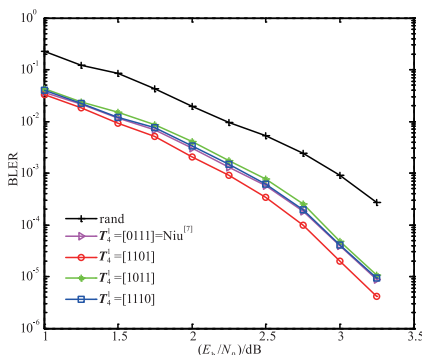


图3 不同图样特性RCPP码的BLER性能
(母码长度 $N=128$, 凿孔位 $N_p=32$,
码率 $R=1/2$)

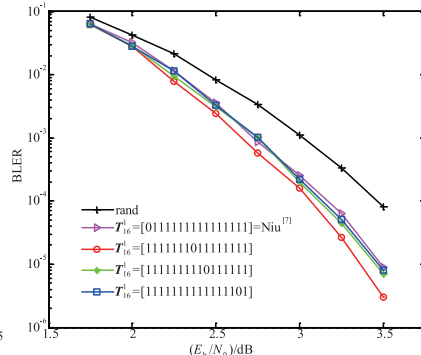


图4 不同图样特性RCPP码的BLER性能
(母码长度 $N=256$, 凿孔位 $N_p=16$,
码率 $R=2/3$)

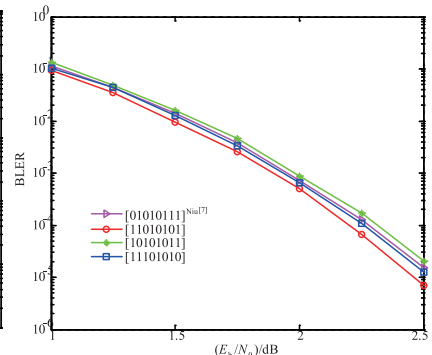


图5 不同图样特性RCPP码的BLER性能
(母码长度 $N=1024$, 凿孔位 $N_p=384$,
码率 $R=1/2$)

5 结论

传统的 Polar 码受其编码构造特性影响, 得到的码字长度都是 2 的幂次, 这极大地限制了它的应用场景. 针对 Polar 码的这个特点, 本文从层结构的角度出发,

提出基于周期性分层重排构造的凿孔设计算法, 可方便得到码长、码率灵活可变, 且具有优秀译码性能的码率兼容凿孔码. 在执行分层设计时, 算法对分裂出来的子图样凿孔位置数进行了限定和设计, 能够保证了最终的凿孔图样具有完全均匀或准均匀的凿孔分布特

性,并且具有丰富的图样选择.同时,本文算法根据分层结构和短周期特性定义了设计层概念,可减少算法设计维度,降低设计复杂度.仿真实验表明,基于本文凿孔算法得到的 RCPP 码,其误帧率性能明显优于随机凿孔方案;相比于经典的 QUP 方案^[7]也具有一定的性能增益.最后,需要指出的是,本文算法本质上属于准均匀凿孔构造算法的一个扩展,适用于中低码率情况下系统参数(码长、码率、信息位长度等)变化的通信场景.

参考文献

- [1] ARIKAN E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55 (7): 3051 – 3073.
- [2] ARIKAN E, TELATAR E. On the rate of channel polarization [A]. *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory* [C]. Seoul: IEEE, 2009. 1493 – 1495.
- [3] HUSSAMI N, KORADA S B, URBANKE R. Performance of polar codes for channel and source coding [A]. *IEEE International Symposium on Information Theory* [C]. Seoul: IEEE, 2009. 1488 – 1492.
- [4] TAL I, VARDY A. List decoding of polar codes [A]. *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory* [C]. Saint Petersburg: IEEE, 2011. 1 – 5.
- [5] CHEN K, NIU K, LIN J R. List successive cancellation decoding of polar codes [J]. *Electronics Letters*, 2012, 48 (9): 500 – 501.
- [6] NIU K, CHEN K. CRC-aided decoding of polar codes [J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16 (10): 1668 – 1671.
- [7] NIU K, CHEN K, LIN J R. Beyond turbo codes: Rate-compatible punctured polar codes [A]. *IEEE International Conference on Communications* [C]. Budapest: IEEE, 2013. 3423 – 3427.
- [8] WANG R X, LIU R K. A novel puncturing scheme for polar codes [J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18 (12): 2081 – 2084.
- [9] 3GPP. Final_Minutes_report_RAN1#90_v100 [EB/OL]. https://www.3gpp.org/ftp/tsg_ran/wg1_r1/TSGR1_90b/Docs/R1-1716941.zip, 2017 – 11 – 9
- [10] 曹阳, 张晗, 涂巧玲, 等. 基于分段凿孔的极化码级联方案 [J]. *电子与信息学报*, 2018, 40 (8): 1941 – 1948.
CAO Y, ZHANG H, TU Q L, et al. Concatenated polar codes scheme based on segmented puncturing [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40 (8): 1941 – 1948. (in Chinese)
- [11] HONG S N, JEONG M O. An efficient construction of rate-compatible punctured polar (RCPP) codes using hierarchical puncturing [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2018, 66 (11): 5041 – 5052.
- [12] ZHAO M M, ZHANG G Z, et al. An adaptive IR-HARQ scheme for polar codes by polarizing matrix extension [J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22 (7): 1306 – 1309.
- [13] CHEN K, HU L, et al. ARUM: Polar-coded HARQ scheme based on incremental channel polarization [J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 22 (12): 2519 – 2522.
- [14] LI B, TSE D, et al. Capacity-achieving rateless polar codes [A]. *IEEE International Symposium on Information Theory* [C]. Barcelona: IEEE, 2016. 46 – 50.
- [15] YAN S, WANG J, et al. An improved Polar codes-based key reconciliation for practical quantum key distribution [J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2018, 27 (2): 250 – 255.
- [16] 牛凯, 戴金晟, 朴瑛楠. 面向 6G 的极化码与极化处理 [J]. *通信学报*, 2020, 41 (5): 9 – 17.
NIU K, DAI J S, PIAN J N. Polar codes and polar processing for 6G wireless systems [J]. *Journal on Communications*, 2020, 41 (5): 9 – 17. (in Chinese)

作者简介



陈海强 男, 教授, 博士, 1976 年 6 月出生于广西苍梧, 现就职于广西大学计算机与电子信息学院, 主要研究方向为信息论与信道编码、调制和 Relay 系统等。
E-mail: haiqiang@gxu.edu.cn



韦文娟 女, 1996 年 1 月出生于广西柳州, 广西大学硕士研究生, 主要研究方向为信道编码技术等。



孙友明 (通信作者) 男, 博士, 硕士生导师, 1975 年 3 月出生于湖南隆回, 主要研究方向为编译码理论等。
E-mail: ymsun@gxu.edu.cn