

不确定分数阶高维混沌系统的 自适应滑模同步

毛北行, 王东晓

(郑州航空工业管理学院数学学院, 河南郑州 450015)

摘要: 混沌及其同步已经成为研究的热点, 随着分数阶混沌系统建模的需要, 分数阶低阶混沌系统的同步控制已经取得了许多结果, 国内外针对分数阶高维混沌系统的同步控制方面的研究还十分罕见, 本文考虑了不确定因素和外部扰动的影响, 利用自适应滑模方法研究高维不确定分数阶混沌系统的同步, 基于同步控制理论给出了滑模函数的设计和控制器的构造, 获得分数阶高维不确定混沌系统的自适应滑模同步的充分条件. 研究结论说明: 设计恰当的滑模函数、控制器和适应规则条件下不确定分数阶高维混沌系统取得自适应滑模同步, 并把分数阶的相关结论平推到了整数阶, 用仿真例子对分数阶高维混沌系统取得滑模同步充分条件的正确性进行了验证.

关键词: 混沌; 分数阶; 滑模; 自适应; 不确定; 控制

中图分类号: O482.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2021)04-0775-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.12263/DZXB.20200316

Self-Adaptive Sliding Mode Synchronization of Uncertain Fractional-Order High-Dimension Chaotic Systems

MAO Bei-xing, WANG Dong-xiao

(School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou, Henan 450015, China)

Abstract: Chaos and its synchronization has become a hot topic. With the need of fractional-order chaotic system modeling, many results have been achieved in the synchronization control of fractional low-order chaotic systems. Studies on the synchronization control of fractional high-dimension chaotic systems at home and abroad are still very rare. In this paper, the influence of uncertainties and external disturbances is considered. The self-adaptive sliding mode synchronization of high-dimension fractional-order chaotic systems is studied based on self-adaptive sliding mode methods. The sliding mode functions are funded and controllers are designed based on synchronization control theory. The sufficient conditions are obtained for high-dimension fractional-order uncertain chaotic systems getting self-adaptive sliding mode synchronization. The conclusion demonstrate that high-dimension fractional-order uncertain chaotic systems can get self-adaptive sliding mode synchronization under appropriate sliding mode functions, controllers and adaptive rules. And we extend the conclusions of fractional-order high-dimension uncertain chaotic system to integer-order. The sufficient conditions for fractional-order high-dimension chaotic systems getting sliding mode synchronization are verified to be correct using numerical simulation examples.

Key words: chaotic; fractional-order; sliding mode; self-adaptive; uncertain; control

1 引言

混沌自 20 世纪 60 年代被提出以来就备受瞩目, 针对非线性混沌系统的同步控制吸引着广大混沌同步爱好者的关注^[1-3]. 近 30 年来, 随着人们对分数阶微积分

的深入研究, 众多学者开始关注分数阶系统的同步问题, 并取得了丰富的研究性成果^[4-7]. 针对非线性分数阶混沌系统所采用的滑模方法被广泛采用并取得了很好的控制效果, 例如: 文献[8]研究一类整数阶分数阶单摆混沌系统的同步, 文献[9]用终端滑模方法研究分

数阶单摆混沌系统的同步问题. 文献[10]研究分数阶不确定 Genesio 系统的反演滑模同步, 给出了反演滑模同步方法的一般设计. 文献[11]研究分数阶不确定 Genesio-Tesi 混沌系统的自适应同步. 文献[12]研究不确定分数阶 Sprott 系统的滑模同步. 另一方面, 高维混沌系统极具代表性和富有挑战性, 因而被广泛关注. 例如: 文献[13]研究一类高维动力系统的混沌预测与同步方法. 文献[14]研究一类高维混沌动力学系统的分析与仿真, 文献[15]研究一类 Lorenz 型高维混沌系统的同步方法. 文献[16]研究一类高维复杂碰撞振动系统的分岔及混沌演化. 几乎现实世界中绝大部分实际系统都是分数阶的, 由于分数阶系统建模的需要, 因而用分数阶微分方程建立数学模型就显得尤为重要, 并且也最贴近工程实际情况. 由于分数阶微积分的引入, 伴随着分数阶微积分在近几年来的迅猛发展和广泛应用, 针对分数阶高维非线性混沌系统如何设计出简洁的滑模函数, 取得良好的同步效果, 该问题一直困扰着广大同步爱好者, 同时该问题成为解决混沌同步由低维系统迈向高维系统的重大突破. 由于模型本身或多或少都会受到不确定性因素和外部扰动的影响, 因而在考虑上述问题时必须把系统建模为不确定性系统. 由于该问题长久以来不受重视, 且该问题还没又被系统的研究过, 而此类问题的解决对于研究复杂的混沌问题, 比如: 庞大复杂的工程系统, 该类系统在工程实际中有广阔的应用前景. 受上述研究的影响, 本文利用自适应滑模控制方法研究了带有模型不确定性和外部扰动下一般高维混沌系统的同步问题, 通过设计合适的滑模函数, 控制器, 自适应律从而得到高维混沌系统自适应滑模同步的两个充分条件.

2 模型与预备

作为基础知识, 在此引入分数阶微分.

定义 1^[17] Caputo 分数阶导数定义为

$$\begin{aligned} D_{t_0,t}^q \mathbf{x}(t) &= D_{t_0,t}^{-(n-q)} \frac{d^n \mathbf{x}(t)}{dt^n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} \mathbf{x}^{(n)}(\tau) d\tau, \\ n-1 < q < n \in Z^+ \end{aligned}$$

本文研究对象是高维分数阶混沌系统, 可由分数阶微分方程描述为

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = x_2 \\ D_t^q x_2 = x_3 \\ \vdots \\ D_t^q x_{n-1} = x_n \\ D_t^q x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (1)$$

以式(1)为主系统, 从系统设计为

$$\begin{cases} D_t^q y_1 = y_2 \\ D_t^q y_2 = y_3 \\ \vdots \\ D_t^q y_{n-1} = y_n \\ D_t^q y_n = f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + \Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \quad + r(t) + u(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$ 为不确定项, $r(t)$ 为外扰, $u(t)$ 为控制器, 定义 $\varepsilon_i = y_i - x_i$, 式(2)与式(1)相减得到误差系统方程为

$$\begin{cases} D_t^q \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ D_t^q \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ \vdots \\ D_t^q \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n \\ D_t^q \varepsilon_n = f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) - \\ \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + r(t) + \\ \quad \Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + u(t) \end{cases} \quad (3)$$

本文假设如下:

H_1 : 设存在未知参数 $m, n > 0$ 使得

$$|\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t)| < m, |r(t)| < n.$$

H_2 : 假设 $(n-1)(q-1) + 1 > 0$.

引理 1^[18] 若 $\mathbf{x}(t)$ 为连续可微的函数, D_t^q 为分数阶微分, 则下述不等式成立

$$\frac{1}{2} D_t^q (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{x}^T(t) D_t^q (\mathbf{x}(t)).$$

引理 2^[18] 设 $V(t) = \frac{1}{2} (y_1^2(t) + y_2^2(t))$, 若存在常数 $k > 0$, 使得 $D_t^q V(t) \leq -k y_1^2(t)$. 则 $y_1^2(t) \leq 2V(0) E_{q,1}(-2kt^q)$. 其中 $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ 表示双参数 Mittag-Leffler 函数, 则 $y_1(t)$ 是 Mittag-Leffler 稳定的且 $\lim_{T \rightarrow \infty} \|y_1(t)\| = 0$.

定义 2^[19] 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义且积分 $\int_a^{+\infty} f(t) e^{-\Theta t} dt$, (其中 Θ 是一个复参量) 在 Θ 的某一域内收敛, 则 $F(\Theta) = \int_a^{+\infty} f(t) e^{-\Theta t} dt$ 称为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换, 记为 $F(\Theta) = L\{f(t)\}$.

引理 3^[19] 设函数 $f(t)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上, 则其 Caputo 型分数阶导数的拉普拉斯变换公式为

$$L(D_t^q f(t)) = \Theta^q F(\Theta) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) \Theta^{q-j-1}.$$

3 主要结果

定理 1 若 H_1, H_2 成立, 且误差函数 $\varepsilon_1(t)$, 存在 Laplace 变换, 则通过构造滑模函数 $s = \varepsilon_n(t) + k\varepsilon_1(t)$, $k > 0$. 设计控制律 $u = -k\varepsilon_2 - f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + f(x_1,$

$x_2, \dots, x_n, t) - (\hat{m} + \hat{n} + \eta |s|) \text{sgns}$ 及自适应律

$$\begin{cases} D_t^q \hat{m} = |s|, \hat{m}(0) = \hat{m}_0 \\ D_t^q \hat{n} = |s|, \hat{n}(0) = \hat{n}_0 \end{cases}$$

其中 \hat{m}, \hat{n} 为对 m, n 的估计值, $\eta > 0$. 则式(1)与式(2)是自适应滑模同步的.

证明 在滑模面上必有 $s = 0$, 所以 $\Rightarrow \varepsilon_n + k\varepsilon_1 = 0$ 从而 $D_t^{(n-1)q} \varepsilon_1 + k\varepsilon_1 = 0$, 由定义 2、引理 3 对上式两边使用 Laplace 变换, 记 $E_1(\Theta) = L(\varepsilon_1(t))$, 从而得到

$$[\Theta^{(n-1)q} E_1(\Theta) - \Theta^{(n-1)q-1} \varepsilon_1(0) - \Theta^{(n-1)q-2} \dot{\varepsilon}_1(0) - \dots - \Theta^{(n-1)(q-1)+1} \varepsilon_1^{((n-1)q+n-2)}(0)] + kE_1(\Theta) = 0$$

根据 Laplace 终值定理,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(t) &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} \Theta E_1(\Theta) \\ &= \lim_{\Theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Theta^{(n-1)q} \varepsilon_1(0) + \Theta^{(n-1)q-1} \dot{\varepsilon}_1(0) + \dots + \Theta^{(n-1)(q-1)+2} \varepsilon_1^{((n-1)q+n-2)}(0)}{\Theta^{(n-1)q} + k} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow 0 \Rightarrow D_t^q \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow D_t^q \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

不在滑模面时, 设计

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} (\hat{m} - m)^2 + \frac{1}{2} (\hat{n} - n)^2,$$

由引理 1, 得到

$$\begin{aligned} D_t^q V &\leq s D_t^q s + (\hat{m} - m) D_t^q \hat{m} + (\hat{n} - n) D_t^q \hat{n} \\ &\leq s [D_t^q \varepsilon_n + k D_t^q \varepsilon_1] + (\hat{m} - m) |s| + (\hat{n} - n) |s| \\ &= s [k\varepsilon_2 + f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) - f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + r(t) + u(t)] \\ &\quad + (\hat{m} - m) |s| + (\hat{n} - n) |s| \\ &\leq |s| (m + n) - |s| (\hat{m} + \hat{n}) - \eta |s|^2 \\ &\quad + (\hat{m} - m) |s| + (\hat{n} - n) |s| \\ &= -\eta |s|^2 < 0. \end{aligned}$$

由引理 2, 得到 $s \rightarrow 0$.

作为高维分数阶混沌系统的特例, 以下研究高维整数阶混沌系统, 可由微分方程描述如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (4)$$

以式(4)为主系统, 设计从系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + r(t) \\ \quad + \Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + u(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$ 为不确定项, $r(t)$ 为外扰, $u(t)$ 为控制器, 定义 $\varepsilon_i = y_i - x_i$, 定义 $\varepsilon_i = y_i - x_i$, 式(5)与式(4)相减得到式(6):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1} = \varepsilon_n \\ \dot{\varepsilon}_n = f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) - f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + r(t) + \Delta f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + u(t) \end{cases} \quad (6)$$

定理 2 若 (H_1) 成立, 构造滑模函数 $s = \varepsilon_n(t) + k\varepsilon_1(t)$. 设计控制律 $u = -k\varepsilon_2 - f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) - (\hat{m} + \hat{n} + \eta) \text{sgns}$ 及自适应律

$$\begin{cases} \dot{\hat{m}} = |s|, \hat{m}(0) = \hat{m}_0 \\ \dot{\hat{n}} = |s|, \hat{n}(0) = \hat{n}_0 \end{cases}$$

其中 \hat{m}, \hat{n} 为对 m, n 估计值, $\eta > 0$. 则式(4)与式(5)是自适应滑模同步的.

证明 证明过程类似定理 1, 略.

4 仿真例子

例 1 不妨以三维分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统及二维分数阶单摆系统为例.

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = x_2 \\ D_t^q x_2 = x_3 \\ D_t^q x_3 = -b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 + b_4 x_1^5 \end{cases} \quad (7)$$

$b_1 = -2, b_2 = 3.5, b_3 = 0.3, b_4 = -1, q = 0.928$. 吸引子相图如图 1.

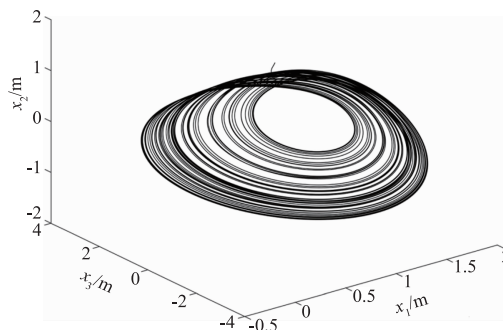


图1 系统(7)的吸引子相图

以系统(7)为主系统, 从系统设计为

$$\begin{cases} D_t^q y_1 = y_2 \\ D_t^q y_2 = y_3 \\ D_t^q y_3 = -b_1 y_1 - b_2 y_2 - b_3 y_3 + b_4 y_1^5 \\ \quad + \Delta f(y_1, y_2, y_3, t) + r(t) + u(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\Delta f(y_1, y_2, y_3, t)$ 为不确定项, $r(t)$ 为有界外扰, $u(t)$ 为控制器, 定义 $\varepsilon_i = y_i - x_i$, 得

$$\begin{cases} D_t^q \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ D_t^q \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ D_t^q \varepsilon_3 = -b_1 \varepsilon_1 - b_2 \varepsilon_2 - b_3 \varepsilon_3 + r(t) + b_4 (y_1^5 - x_1^5) \\ \quad + \Delta f(y_1, y_2, y_3, t) + u \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\Delta f(y_1, y_2, y_3, t) = 0.1y_1 \cos t, r(t) = 0.1 \cos t$, 此时构造滑模面 $s = \varepsilon_3(t) + k\varepsilon_1(t)$, 控制器

$$u = k\varepsilon_2 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 - b_4(y_1^5 - x_1^5) - (\hat{m} + \hat{n} + \eta |s|) \operatorname{sgns}$$

应用自适应律 $\begin{cases} D_t^q \hat{m} = |s|, \hat{m}(0) = \hat{m}_0 \\ D_t^q \hat{n} = |s|, \hat{n}(0) = \hat{n}_0 \end{cases}$, 系统误差如图 2.

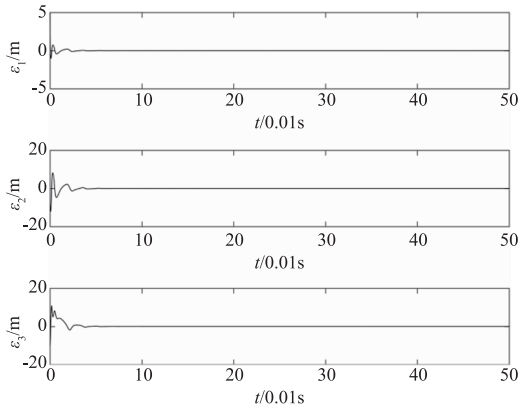


图2 系统(7)和(8)的同步误差曲线 $\varepsilon_i(t)$

例 2 分数阶单摆混沌可描述为

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = x_2 \\ D_t^q x_2 = -\gamma x_2 - gL^{-1} \sin x_1 \end{cases} \quad (10)$$

其中, $g = 10, L = 1, \gamma = 0.46, q = 0.86$ 是呈现混沌态, 系统的吸引子相图如图 3.

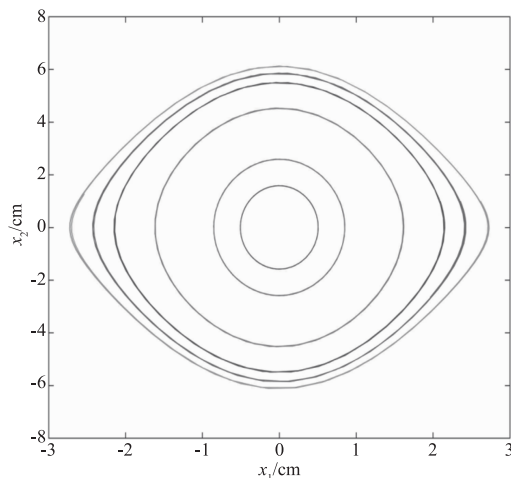


图3 系统(10)的吸引子相图

以式(10)为主系统, 设计从系统为

$$\begin{cases} D_t^q y_1 = y_2 \\ D_t^q y_2 = -\gamma y_2 - gL^{-1} \sin y_1 \\ \quad + \Delta f(y_1, y_2, t) + r(t) + u(t) \end{cases} \quad (11)$$

定义 $\varepsilon_i = y_i - x_i, i = 1, 2$. 则

$$\begin{cases} D_t^q \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ D_t^q \varepsilon_2 = -\gamma \varepsilon_2 - gL^{-1} \sin y_1 \\ \quad + gL^{-1} \sin x_1 + r(t) + u(t) \\ \quad + \Delta f(y_1, y_2, t) \end{cases} \quad (12)$$

其中, 不确定项 $\Delta f(y_1, y_2, y_3, t) = -0.1y_1 \cos t$, 有界外扰 $r(t) = 0.1 \cos t$, 设置初始值为 $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 1, y_1(0) = 1.5, y_2(0) = 1.2$. 设计滑模面 $s = \varepsilon_2(t) + k\varepsilon_1(t), k > 0$. 控制器

$$u = -(k + \gamma)\varepsilon_2 - gL^{-1} \sin y_1 + gL^{-1} \sin x_1 - (\hat{m} + \hat{n} + \eta) \operatorname{sgns}$$

应用自适应律 $\begin{cases} \dot{\hat{m}} = |s|, \hat{m}(0) = \hat{m}_0 \\ \dot{\hat{n}} = |s|, \hat{n}(0) = \hat{n}_0 \end{cases}, (\hat{m}(0), \hat{n}(0)) =$

$(0.3, 0.2)$, 系统误差如图 4.

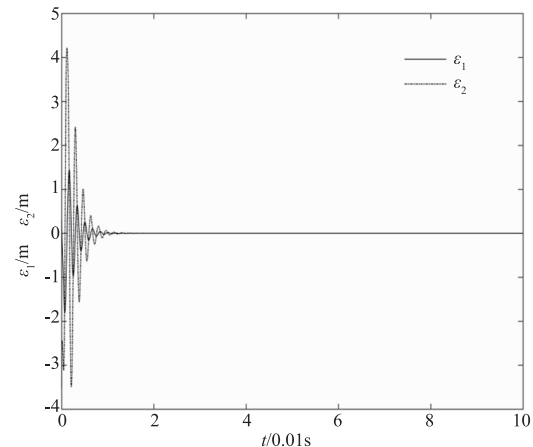


图4 系统(10)和(11)的同步误差曲线 $\varepsilon_i(t)$

对类似于式(1)为主系统, 式(2)为从系统的分数阶高阶混沌系统构造滑模函数

$$s = \varepsilon_n(t) + k\varepsilon_1(t), k > 0.$$

$$u = -k\varepsilon_2 - f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) + f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) - (\hat{m} + \hat{n} + \eta |s|) \operatorname{sgns}$$

应用自适应律 $\begin{cases} D_t^q \hat{m} = |s|, \hat{m}(0) = \hat{m}_0 \\ D_t^q \hat{n} = |s|, \hat{n}(0) = \hat{n}_0 \end{cases}$.

由于高维混沌系统没有办法做出吸引子图和误差曲线, 因此常用的仿真办法都是用低维系统来演示高维系统. 而对于一般的分数阶非线性高阶混沌系统, 设计本文提出的滑模面则不适用, 针对该类混沌系统设计滑模方法也很多, 但文中提出的方法滑模函数简单,

且分数阶的结论可以简单地平推到整数阶去,而对于一般意义上的分数阶高阶非线性混沌系统设计的滑模函数要比文中的滑模函数复杂得多,且控制效果也有限,对于该类系统设计出简洁的滑模面同时考虑到控制效果,是全新的挑战.就本篇文章而言,文中设计的滑模函数对于形如式(1)为主系统,式(2)为从系统的一大类混沌系统具有普适性,也为众多滑模混沌同步爱好者提供了宝贵的思路与方法.

5 结论

研究高维分数阶不确定混沌系统的适应滑模同步问题,通过设计合适的滑模函数,控制器,自适应律从而得到高维混沌系统自适应滑模同步的两个充分条件,研究结论说明满足一定的假设下不确定混沌系统可以取得自适应滑模同步.研究的方法不仅对分数阶系统成立,相关结论对整数阶系统也是成立的.

参考文献

- [1] SARA H, HEYDAR T S. Design of nonlinear conformable fractional-order sliding mode controller for a class of nonlinear systems[J]. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2019, 35(3): 313 – 338.
- [2] ZHANG C. Synchronization and tracking of multi-space craft formation attitude control using adaptive sliding mode[J]. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(2): 832 – 846.
- [3] SUN Z Y, DAI Y Y, CHEN C C. Global fast finite-time partial state feedback stabilization of high-order nonlinear systems with dynamic uncertainties[J]. *Information Sciences*, 2019, 77(1): 219 – 236.
- [4] 毛北行, 周长芹. 分数阶不确定 Duffing 混沌系统的终端滑模同步[J]. *东北师范大学学报(自然版)*, 2018, 50(2): 47 – 50.
MAO B X, ZHOU C Q. Terminal sliding mode synchronization of fractional-order uncertain Duffing chaotic systems[J]. *Journal of Northeast Normal University(Natural Science)*, 2018, 50(2): 47 – 50. (in Chinese)
- [5] 毛北行. 分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统滑模同步的两种方法[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2018, 56(3): 708 – 712.
MAO B X. Two methods for sliding mode synchronization of fractional-order Newton-Leipnik chaotic systems[J]. *Journal of Jilin University(Science Edition)*, 2018, 56(3): 708 – 712. (in Chinese)
- [6] 毛北行. 纠缠混沌系统的比例积分滑模同步[J]. *山东大学学报工学版*, 2018, 48(4): 50 – 54.
MAO B X. Ratio integral sliding mode synchronization control of entanglement chaotic systems[J]. *Journal of Shandong University(Engineering Science)*, 2017, 47(4): 31 – 36. (in Chinese)
- [7] 王东晓. 分数阶超混沌 Bao 系统的比例积分滑模同步[J]. *内蒙古农业大学学报(自然版)*, 2018, 39(3): 83 – 89.
WANG D X. Proportional integral sliding mode synchronization for fractional-order hyper-chaotic Bao system[J]. *Journal of Inner Mongolia Agricultural University(Science Edition)*, 2018, 39(3): 83 – 89. (in Chinese)
- [8] 王建军, 张伟, 王东晓, 毛北行. 一类整数阶分数阶单摆系统的混沌同步[J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(3): 193 – 199.
WANG J J, ZHANG W, WANG D X, MAO B X. Chaos synchronization of a class of fractional-order simple pendulum[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2018, 48(3): 193 – 199. (in Chinese)
- [9] 程春蕊, 朱军辉, 毛北行. 分数阶单摆系统的终端滑模混沌同步[J]. *工程数学学报*, 2019, 36(1): 99 – 104.
CHENG C R, ZHU J H, MAO B X. Chaos synchronization of fractional-order simple pendulum[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2019, 36(1): 99 – 104. (in Chinese)
- [10] 宋晓娜, 宋帅, 满景涛. 不确定分数阶 Genesio 混沌系统的反演滑模同步[J]. *山东科技大学学报(自然版)*, 2019, 38(5): 66 – 71.
SONG X N, SONG S, MAN J T. Back-stepping sliding mode synchronization of uncertain fractional-order Genesio chaotic system[J]. *Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science)*, 2019, 38(5): 66 – 71. (in Chinese)
- [11] 刘晓君, 洪灵. 分数阶 Genesio-Tesi 系统的混沌及自适应同步[J]. *动力学与控制学报*, 2016, 14(4): 318 – 323.
LIU X J, HONG L. Chaos and adaptive synchronization of fractional-order Genesio-Tesi systems[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(4): 318 – 323. (in Chinese)
- [12] 毛北行, 程春蕊. 分数阶二次非线性 Sprott 混沌系统的滑模同步控制[J]. *数学杂志*, 2018, 38(3): 490 – 496.
MAO B X, CHENG C R. Sliding mode synchronization of fractional-order quadratic nonlinearity Sprott chaotic systems[J]. *Journal of Mathematics*, 2018, 38(3): 490 – 496. (in Chinese)
- [13] 孙涛, 秦卫阳. 一类高维动力学系统的混沌预测同步实现方法研究[J]. *振动与冲击*, 2016, 35(15): 50 – 52.
SUN T, QING W Y. Anticipated synchronization of chaos for a class of high dimensional dynamic systems[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(15): 50 – 52. (in Chinese)
- [14] 王磊, 张勇, 舒永录. 一类高维混沌模型的动力学分析及数值仿真[J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(12): 220

- 226.

WANG L, ZHANG Y, SHU Y L. Dynamic behaviors of a new high-order chaos model and its numerical simulation [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2018, 48(12): 220 - 226. (in Chinese)

- [15] 张勇, 舒永录. 一类 Lorenz 型高维混沌系统的分析[J]. *数学的实践与认识*, 2020, 50(1): 216 - 222.

ZHANG Y, SHU Y L. Analysis of a new high-order Lorenz-type chaos model [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2020, 50(1): 216 - 222. (in Chinese)

- [16] 彭珊, 李万祥, 成龙. 高维复杂碰撞振动系统的分岔与混沌演化[J]. *机械设计*, 2014, 31(9): 54 - 57.

PENG S, LI W X, CHENG L. Bifurcation and chaos evolution of high-dimensional complicated collision vibration system [J]. *Journal of Machine Design*, 2014, 31(9): 54 - 57. (in Chinese)

- [17] 赵灵冬, 胡建兵, 包志华, 等. 分数阶系统有限时间稳定

性理论及分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步[J]. *物理学报*, 2011, 60(10): 5071 - 5075.

ZHAO L D, HU J B, BAO Z H, et al. A finite-time stable theory about fractional systems and finite-time synchronization fractional super chaotic Lorenz systems [J]. *Acta Phys Sin*, 2011, 60(10): 5071 - 5075. (in Chinese)

- [18] 闫丽宏. 广义分数阶 Sprott-C 混沌系统的有限时间滑同步[J]. *吉林学报(理学版)*, 2019, 57(4): 940 - 945.

YAN L H. Finite-time sliding mode synchronization of generalized fractional-order Sprott-C chaotic systems [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2019, 57(4): 940 - 945. (in Chinese)

- [19] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分[M]. 北京, 清华大学出版社, 2016. 12 - 15.

WU Q, HUANG J H. *Fractional-Order Calculus* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016. 12 - 15. (in Chinese)

作者简介



毛北行 男, 教授, 硕导, 生于 1976 年, 河南孟津人, 电子学会会员, 研究领域: 分数阶混沌系统滑模同步.

E-mail: bxmao329@163.com



王东晓 男, 副教授, 硕士, 生于 1974 年, 河北邢台人, 研究领域: 混沌同步.

E-mail: wdxzzia@126.com