

# 一种快速局部细化频谱分析新方法——SSA

郝重阳<sup>1</sup>,唐文彬<sup>2</sup>,齐 敏<sup>1</sup>,张 宇<sup>1</sup>,U. Heute<sup>3</sup>,王旭东<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学电子与信息工程研究所,西安 710072;2. 浙江大学计算机系,杭州 310027;3. 德国基尔大学, D-24193 Kiel, Germany)

**摘 要:** 本文提出了一种基于子带分解 DFT(SD-DFT)的快速局部细化频谱分析新方法——子带谱分析(SSA)。它兼有现行诸多细化分析方法之优点,而又避免了它们的主要缺点。文中给出了 SSA 的应用实例。

**关键词:** 子带分解 DFT; 频谱分析; 细化

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 03-0106-03

## A New Partial Spectrum Computation Method——SSA

HAO Chong-yang<sup>1</sup>,TANG Wen-bin<sup>2</sup>,Qi Min<sup>1</sup>,ZHANG Yu<sup>1</sup>,U. HEUTE<sup>3</sup>,WANG Xu-dong<sup>1</sup>

(1. Institute of Electronic Information Engineering, Northwestern Polytechnic University, Xi an 710072, China;

2. Dept. of Computer Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;3. C. A. Univ Kiel, D-24193 Kiel, Germany)

**Abstract:** In this paper, a new fast partial spectrum computation method called subband spectrum analysis (SSA) is presented, which is based on the theory of subband decomposition. The new method not only holds the high-resolution feature of ZFFF using complex modulation, but also has the advantages of simplicity, easy implementation, less arithmetic operations and memory requirements. SSA algorithm has been successfully used in the maneuvering target velocity tracking system. Accuracy and efficiency of the method are proved by the simulation results.

**Key words:** subband decomposition DFT; frequency spectrum analysis; zoom

### 1 引言

子带分解 DFT(Subband Decomposition DFT, SD-DFT)是近年来提出的一种子带谱提取和分析技术<sup>[1,2]</sup>。SD-DFT的最大特点是可以单独计算出不同带宽的子带谱。其近似计算式误差在通常的工程计算中是可以接受的<sup>[3]</sup>,但存在两个明显的弊端。著名的复调制法 ZFFT<sup>[5]</sup>,其移频加低通滤波可以获得信号频谱中任何感兴趣频段的细化谱之思路,是先进的、实用的,但此法要求事先设计低通滤波器,并且一旦设计好以后,其参数便是固定的,不好随时变更。

本文将 SD-DFT 进行克服弊端的改造和引入了上述 ZFFT 思路后,提出了子带谱分析(Subband Spectrum Analysis, SSA)方法<sup>[4]</sup>,它兼有了 SD-DFT 和 ZFFT 双重优点,避免了各自的缺点。可花很小计算量快速细化观察任意感兴趣段频谱,而且不需要单独设计低通滤波器,将计算频谱与低通滤波一并进行。因而 SSA 作为一种新的快速局部细化频谱分析工具,更具快捷、简便、实用的特色。应用实例也说明了这一点。

### 2 子带分解 DFT(SD-DFT)的算法弊端

长度为  $N(N=2^v, v$  为整数)的序列  $x(n)$  的 DFT 表达式为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。取

$$\begin{cases} g_l(n) = \frac{1}{2} [x(2n) + x(2n+1)], & n=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (2a) \\ g_h(n) = \frac{1}{2} [x(2n) - x(2n+1)], & n=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (2b) \end{cases}$$

子序列  $g_l(n)$  和  $g_h(n)$  由对原序列  $x(n)$  的每相邻 2 点作蝶形运算并进行以 2 为基的下采样而得,长度为原序列的 1/2。它们的 DFT 分别为

$$\begin{cases} G_l(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} g_l(n) W_{N/2}^{kn}, & k=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3a) \\ G_h(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} g_h(n) W_{N/2}^{kn}, & k=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3b) \end{cases}$$

原序列可以通过以下关系由子序列重构得到:

$$\begin{cases} x(2n) = g_l(n) + g_h(n), & n=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (4a) \\ x(2n+1) = g_l(n) - g_h(n), & n=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (4b) \end{cases}$$

运用式(4)和(3),式(1)可写成

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{k(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [g_l(n) + g_h(n)] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} [g_l(n) - g_h(n)] W_{N/2}^{kn} \\ &= (1 + W_N^k) G_l(k) + (1 - W_N^k) G_h(k), \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5) \end{aligned}$$

这就是 SD-DFT 的一次分解表达形式. 可以看出, 式(5)中前后两项  $(1 + W_N^k) G_l(k)$  和  $(1 - W_N^k) G_h(k)$  分别代表着呈并联关系的低通滤波器和高通滤波器的输出. 其频率分界处在半带宽  $(k = N/2)$  点. 故式(5)代表着将  $x(n)$  的频谱划分为低、高两个“半带宽”谱的第一次子带分解. 序列  $x(n)$  的 DFT 运算在这里被转化成 2 批, 对每相邻 2 点数据蝶形运算结果的  $N/2$  点 DFT 运算及其复加权修正. 对式(5)中  $G_l(k)$ 、 $G_h(k)$  不断进行子带分解, 最终可将计算  $X(k)$  的整个过程全部转化为若干级蝶形运算(含复加权).

当  $k \ll N$  时, 式(5)可写成:

$$X(k) \approx (1 + W_N^k) \cdot G_l(k), k \left\{ 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1 \right\} \quad (6)$$

对应于式(6), 式(2)中只剩下式(2a)部分, 即完整蝶形运算演变为每相邻 2 点求算术平均运算并下采样.

依此类推, 对第一次每相邻 2 点求平均预处理的结果, 再作第二次每相邻 2 点求平均处理——如式(7)示意, 然后作 4 批  $\frac{N}{4}$  点 DFT 及其复加权运算.

$$g(n) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [x(0) + x(1)] + \frac{1}{2} [x(2) + x(3)] \right\} \quad (7)$$

SD-DFT 明显存在着 2 个弊端:

(1) 运算过程不简捷. 要像式(7)那样反复对上次相邻 2 点求平均结果再作相邻 2 点求平均. 各次中间结果多次存储与取出, 影响处理效率, 增大运算时间.

(2) 由分析可知, 式(6)的近似条件只能说明在此条件下, SD-DFT 滤波器的低通响应比较理想. 但从信号能量分布的角度深入考虑, 当能量主要集中在非低频端时, 则直接使用该滤波器及其近似条件是不合适的, 因为此时的输出是根本不能近似代表整个频谱的.

### 3 SSA 的形成和提出

按理, 式(6)所代表的 SD-DFT 的近似计算, 对于能量比较集中信号的局部频谱分析, 具有节省运算量和保持高分辨率的功能. 但是它存在上述两个致命性算法问题, 使之实用价值不高. SSA 正是针对和逐一解决这些问题, 即经过对 SD-DFT 改造而提出的一种实用的、快速局部细化频谱分析新方法. 其形成过程如下:

将式(2a)和(6)再作一次分解, 可得

$$X(k) \approx (1 + W_N^k) (1 + W_{N/4}^{2k}) G_{ll}(k), k \left\{ 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2} \frac{N}{4} - 1 \right\} \quad (8)$$

式中

$$G_{ll}(k) = \sum_{n=0}^{N/4-1} g_{ll}(n) W_{N/4}^{nk}, k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (9)$$

以  $N=4$  为例有,

$$g_{ll}(n) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [x(4n) + x(4n+1)] + \frac{1}{2} [x(4n+2) + x(4n+3)] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [x(0) + x(1)] + \frac{1}{2} [x(2) + x(3)] \right\} \quad (10)$$

#### 3.1 预处理求 $g_{ll}(n)$ 运算的简捷化

对式(7)和式(10)而言, 恒有

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [x(0) + x(1)] + \frac{1}{2} [x(2) + x(3)] \right\} = \frac{1}{4} [x(0) + x(1) + x(2) + x(3)] \quad (11)$$

由此可将式(10)改写成

$$g_{ll}(n) = \frac{1}{2} [x(2^2 n) + x(2^2 n + 1) + x(2^2 n + 2) + x(2^2 n + 3)] \quad (12)$$

式(11)、(12)说明, 几次子带分解而带来的求  $g_{ll}(n)$  反复迭代预处理运算, 完全转化成了一次性求算术平均运算.

#### 3.2 运算近似条件与信号能量分布关系的协调化

式(6)的近似条件, 仅表示在这个低端频段内, 整个滤波器能够近似为一个特性较好(泄露较少)的低通滤波器. 而当式(6)体现该滤波器的输出即信号频谱意义时, 其近似程度还要看信号能量分布——是否也刚好集中在这一频段内, 因此原算法的近似条件不能一概搬用.

频谱近似计算的条件, 可按下述两种方案确定:

(1) 处理信号之前, 先对信号的能量进行分析, 根据其能量集中的频段范围确定合适的分解次数及对式(5)取前项还是后项, 近似条件也相应被确定. 但是这种方案的工程实现往往是不现实的.

(2) 本文的方案是, 始终用式(6) (及其类推形式) 作为式(5)及其类推式的近似式, 即代表 SD-DFT, 也就是看成一个低通滤波器, 将感兴趣频段移频(可用在时域复调制实现)到该滤波器内. 此方案比前一方案实现容易, 也有利于实时处理. 这种方法类似于复调制法 Zoom FFT 的移频方式<sup>[5]</sup>, 但比它的滤波器带宽变动容易——因为这里变动一下分解次数就可解决, 而不需重新设计低通滤波器.

到此就可得出 SSA 的一般表达式:

$$X(k) = \sum_{i=1}^M (1 + W_N^{2^{i-1}k}) Q(k), k \left\{ 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2^M} - 1 \right\} \quad (13)$$

式中  $M$  为最终分解次数, 令  $p = 2^M$ , 且有

$$Q(k) = \sum_{r=1}^{N/p-1} q(r) W_{N/p}^{rk}, k = 0, 1, 2, \dots, N/p - 1 \quad (14)$$

$$q(r) = \frac{1}{p} e^{-j2\pi f_k r} [x(Pr) + x(Pr+1) + x(Pr+2)] + \dots + x[Pr + (P-1)], r = 0, 1, 2, \dots, N/p - 1 \quad (15)$$

式中  $(-f_k)$  是频移量,  $P$  称为细化因子. 整个 SSA 的运算流程, 可用图 1 表示. 图 1 也可用图 2 所示简化框图表示.

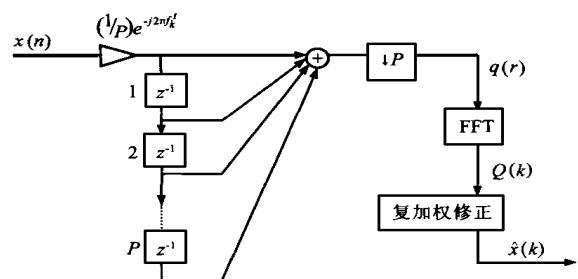


图 1 SSA 的流程框图

这种 SSA 明显具有以下优点:

(1) 如前所述, FFT 法只能是一直迭代到底, 即一次性得到全带谱; 而 SSA 可任意随时得到不同带宽的子带谱. 本来直接作  $N$  点 FFT 求  $X(k)$ , 所需要的复乘次数为  $\frac{N}{2} \log_2^2 N$ ; 而用 SSA 法求  $X(k)$  只要作  $\frac{N}{P}$  点 FFT 和复加权修正即可, 所需复乘次数仅约  $\frac{N}{2^P} \log_2^{N/2^P} + M$ , 故运算效率大大提高.

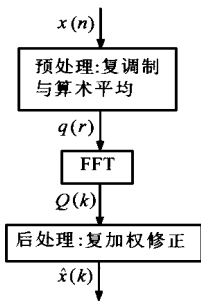


图 2 SSA 的简化框图

(2) 作  $N/P$  点傅氏变换能达到原  $N$  点傅氏变换的分辨率, 相对说明 SSA 法可使实作 FFT 点数的频谱分辨率提高  $P$  倍. 故 SSA 是一种频谱细化分析方法 ( $P$  为细化因子).

(3) SSA 与复调制 Zoom FFT 细化分析方法相比, 后者要另外设计、加入一个低通滤波器, 而且若所需感兴趣频段宽度变化时, 低通滤波器带宽要变动设计; 而前者的低通滤波器是算法自身所具有, 拟要其带宽变化, 只要改变分解次数即可方便、灵活地实现. 而且其调整滤波器与计算感兴趣段频谱是同时进行的, 又可节省运算辅助 (等待滤波器重新设计、调整) 时间.

(4) SSA 具有与复调制 ZFFT 一样方式的灵活移动感兴趣频率至低通滤波器内的灵活性.

正因为 SSA 一般不直接像 FFT 那样一直迭代到底才一次性出齐谱点 (线). 而只需计算和输出感兴趣频段的谱值, 它不仅能细化分析子带谱, 而且便于在工程中检测出能量比较集中的信号.

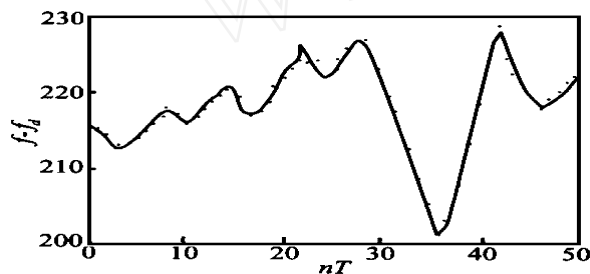


图 3 SSA 法速度跟踪效果

## 4 SSA 应用实例

本文用 SSA 法检测出运动目标的多勒频率  $f_d$ , 并成功地进行了雷达对目标的速度跟踪. 图 3 为速度跟踪结果, 图中实线代表目标径向速度的真实变化, 小圆点表示跟踪结果.

除了前述 SSA 的频率分辨力高、节省运算时间, 实现容易等优点以外, 对于运动目标速度跟踪来说, 还由于其实际 FFT 运算点数少, 而容易与目标检测 FFT 系统实现一体化 (一机多用).

## 参考文献

- [1] O. V. Shentov and S. K. Mitra. A Simple Method for Power Spectral Estimation Using Subband Decomposition, Proc. of IEEE Int. Conf. on ASSP, May 1991: 3153 ~ 3156
- [2] O. V. Shentov, A. N. Hbssen, S. K. Mitra, U. Heute, Subband DFT Interpretation, Accuracy, and Computational Complexity. Proc. of 25th Annual Asilomar Conf. Sig. Syst., Comp., Pacific Grove, CA, Nov. 1991: 95 ~ 100
- [3] S. K. Mitra, O. V. Shentov, and M. R. Petraglia, A Method for Fast Approximate Computation of Discrete Time Transforms, Proc. ICASSP, Albuquerque, New Mexico, April 1990: 2025 ~ 2028
- [4] C. Hao, X. Wang, U. Heute. A New Partial Spectrum Computation Based on the Subband Decomposition. Int. Conf. Signal and Image Processing-SIP-95, Bally s Las Vegas, Nevada, USA, Nov. 1995
- [5] E. A. Hoyer, R. F. Stork, The Zoom FFT Using Complex Modulation, IEEE Proc. ICASSP, 1977: 78 ~ 81



郝重阳 教授, 博士生导师. 西北工业大学电子与信息工程研究所所长, 兼西安虚拟现实工程技术研究中心主任. 中国图像图形学会常务理事, 陕西省信号处理学会常务理事. 曾主持国家重点攻关项目及多项基金课题, 获多项科技进步奖. 在国内外发表论文 50 多篇. 感兴趣的研究领域是信号、图像处理与虚拟现实 (VR) 技术.