

# 一种基于积分求导(DQ)的时域有限差分法(TD-FD)

钱晓宁,毛军发

(上海交通大学电子工程系,上海 200052)

**摘要:** 本文提出用 DQ(Differential Quadrature)将 Maxwell 方程中的部分偏微分进行近似计算,从而减少时域有限差分法(TD-FD)算法中的网络节点数目,节省计算机的内存,提高 TD-FD 的分析效率.

**关键词:** 时域有限差分法;积分求导法;电磁分析

**中图分类号:** TP393.01 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 03-0140-02

## A Novel Algorithm of DQ - based TD-FD

QIAN Xiao-ning, MAO Jun-fa

(Dept of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** In this paper, a novel algorithm, which is based on the DQM, is proposed to approximate part of the partial differentials in Maxwell's equations. This algorithm can reduce the number of meshes of TD-FD, and thus can save computer memory and improve the efficiency of electromagnetic analysis.

**Key words:** TD-FD; DQM; electromagnetic analysis

### 1 引言

随着信号处理速度的不断提高及电路规模的不断扩大,现代高速微电子系统的信号连接及封装结构已越来越有必要用全波方法进行建模和分析,甚至已出现用全波方法对整个微电子系统进行电磁场模拟的趋势.但是,传统的全波方法(如 TD-FD 方法<sup>[1]</sup>)计算量大,计算机内存要求高,较难适应现代微电子系统规模大、结构复杂的特点,因此提高全波方法的效率至关重要.

本文将使用一种最早应用于结构力学中的高效数值计算方法——DQM(Differential Quadrature Method)<sup>[2]</sup>,结合传统的 TD-FD 对一般的微带互联结构进行全波分析,希望在一定程度上提高其计算效率. DQM 的主要思想是将某一坐标方向上的偏微分算子在该方向用一系列适当的离散点函数值加权逼近,也即数值积分.与传统的 TD-FD 相比, DQM 可以用较少的剖分点,从而节省计算机的内存,提高 TD-FD 的计算效率.另外,由于实施吸收边界条件时粗的网格节点会引起较大的误差,而且电磁场在某一坐标方向上的分布可能有很多零点,它们对偏微分算子的贡献也为零,因此本文还采用粗细网格划分相结合及跟踪加窗的方法对 DQM 加以改进,以保证计算的精度和稳定性.所谓跟踪加窗即规定在某一节点处场的偏微分只使用其相邻的一定数目节点处的场值来加权逼近.

### 2 原理

以 Maxwell 方程的一个标量方程为例:

$$\partial E_x / \partial t = (1/\epsilon) (\partial H_z / \partial y - \partial H_y / \partial z) \quad (1)$$

按照文献[3]中标准的 TD-FD 网格剖分方法,对式(1)进行中心差分展开得到传统 TD-FD 的计算式:

$$E_x^{n+1}(i, j, k) = E_x^n(i, j, k) + (t/\epsilon) \left[ \frac{H_z^{n+(1/2)}(i, j+1, k) - H_z^{n+(1/2)}(i, j, k)}{y} - \frac{H_y^{n+(1/2)}(i, j, k+1) - H_y^{n+(1/2)}(i, j, k)}{z} \right] \quad (2)$$

在 TD-FD 有限计算区域的边界上必须引入吸收边界条件以模拟无限区域的场分布.本文采用文献[4]提出的基于 Mur 一阶边界条件的 TMFABC.

DQM 的原理是这样的:设函数  $W(x, y, z, t)$  在某个坐标方向上是足够光滑的,那么该方向上的偏微分就可以用积分求导法来逼近<sup>[2]</sup>,例如在  $z$  方向:

$$\partial W(x, y, z_i, t) / \partial z = \sum_{j=1}^N a_{ij} W(x, y, z_j, t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

式中  $z_i$  为  $z$  方向分段点的坐标.系数  $a_{ij}$  的计算可以由多种方法确定,一般总是选定一组基函数,使其对式(3)精确成立,从而得到相应的一组全系数.常用的基函数有幂函数,各种正交函数,包括三角函数, Chebyshev 正交多项式, Legendre 多项式等.本文采用一般的幂函数,将一组幂函数代入式(3)得到相应线性方程组:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} z_j^k = k z_i^{k-1}, \quad k = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

收稿日期:1998-06-13;修订日期:1999-09-28

基金项目:国家自然科学基金(No. 69776022)、霍英东教育基金及上海交通大学大众电脑集团葛守仁教授奖教金资助课题

解之得到系数  $a_{ij}$ .

在传统的 TD-FD 计算域中,只要电磁场值分布足够光滑,可以在一个或多个方向用 DQM 计算场的偏微分.本文选择在  $z$  方向使用 DQM 计算场对  $z$  坐标的偏微分数值解, $x$  与  $y$  方向的偏导数仍用中心差分近似.以式(1)为例, $\partial H_y/\partial z$  用式(3)计算,则式(2)变为:

$$E_x^{n+1}(i, j, k) = E_x^n(i, j, k) + \frac{-t}{y} \left[ \frac{H_y^{n+(1/2)}(i, j+1, k) - H_y^{n+(1/2)}(i, j, k)}{y} - \sum_{l=1}^N a_{kl} H_y^{n+(1/2)}(i, j, l) \right] \quad (5)$$

其它含对  $z$  坐标偏微分的 Maxwell 标量方程可类似地用 DQM 结合中心差分得到近似表达式,不含对  $z$  坐标偏微分的 Maxwell 标量方程的数字差分形式与文献[3]中的标准 TD-FD 完全一样.

DQM 提高分析效率的指导思想是减少 TD-FD 网格节点的数目,增大空间步长的数值.但在 TD-FD 网格边界上必须对吸收边界条件进行差分,因此大的空间步长将带来误差.另一方面,DQM 在靠近边界处的节点上效果相对较差.为解决这些问题,本文采用网格节点两端细分,中间粗分(均匀)的方法,对细分网格节点处的场用传统的 TD-FD 方法或边界条件进行计算,而中间粗分网格节点处的场则用 TD-FD 结合 DQM 计算.

同时由于在 TD-FD 中吸收边界条件造成的非物理反射带来的误差,在使用高阶的 DQM 时,误差的积累对计算结果的影响较大.而且电磁场在某一方向上的分布可能有很多零点,这些零点对 DQM 中场的偏微分没有贡献,因此我们采用跟踪加窗的方法对 DQM 加以改进,即并不使用  $z$  方向所有的剖分点进行数值求积,而只选取所求点附近的若干点进行数值积分计算该点场的数值偏微分值.这样进一步保证了计算的稳定性和正确性,并提高了计算效率.将之用于对一般 Gauss 信号的数值微分计算,我们证实了 DQM 这一改进的可行性.计算结果如图 1.

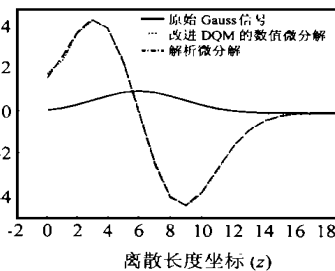


图 1 Gauss 函数的改进 DQM 数值微分与解析微分的比较

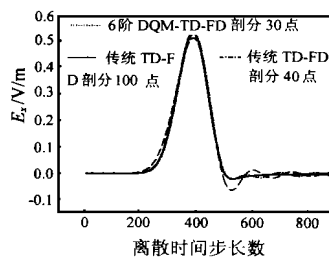


图 2 用 DQM 与传统的 TD-FD 计算  $(2 \ x, 40 \ y, 11 \ z)$  处  $E_x$  波形的比较

### 3 应用实例与结论

我们计算一个均匀介质中的微带线结构以验证本文新算法的可行性和效率.微带线宽度 0.1mm,厚度忽略,介质相对介电常数为 13.0,介质厚度为 0.1mm,TD-FD 计算域为  $1.0 * 2.0 * 5.0$ (mm).在计算过程中,对微带线结构分别用传统的 TD-FD 在  $z$  向剖分 100 点、40 点和改进的 6 阶 DQM(即节点场对  $z$  坐标的偏微分用其相邻六个节点处的场值作积分求导近似)剖分 30 点进行模拟.最后计算的结果如图 2.由于  $z$  方向空间网格剖分数的减少,在相同的分析精度前提下,计算消耗的内存节省 60%,计算时间也有 10% 的减少.可见,DQM 与 TD-FD 法的结合是可行、有效的.

### 参考文献

- [1] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans., 1966, AP-14 (5): 302 ~ 307
- [2] Bellman R., Kashef B. G. and Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. J. Comput. Phys., 1972, (10): 40 ~ 52
- [3] Xiaolei Zhang, K. K. Mei. Time-Domain Finite Difference Approach to the Calculation of the Frequency-Dependent Characteristics of Microstrip Discontinuities. IEEE Trans., 1988, MTT-36(12): 1775 ~ 1787
- [4] Jun-Fa Mao. Twofold Mur's first-order ABC in the FDTD method. IEEE Trans., 1998, MTT-46(3): 299 ~ 301



钱晓宁 分别于 1997、1999 年在上海交通大学获得学士、硕士学位,现在美国 Yale 大学攻读博士学位.研究方向为高速集成电路互连线的电磁分析与信号仿真.



毛军发 1965 年出生,1992 年于上海交通大学获博士学位,然后留在该校工作至今,现为上海交通大学电子信息学院副院长、教授、博士生导师.1994 ~ 1996 年分别在香港中文大学与美国加州大学 Berkeley 分校各作了一年的博士后研究.研究方向为高速微电子系统互连与封装的电特性. IEEE 高级会员. 1998 年被上海市政府授予“牡丹优秀科学家”称号.