

波导本征值问题的多极理论分析

郑勤红¹,解福瑶¹,林为干²

(1. 云南师范大学物理系,昆明 650092;2. 电子科技大学,成都 610054)

摘要: 本文利用多极理论分析波导本征值问题,给出用多极理论分析波导本征值问题的使用规则和实施方案.实例计算结果表明,用多极理论分析波导本征值问题,不仅具有较高的计算精度,而且可以很方便地应用于波导工程问题的设计与计算,多极理论是一种有效的波导本征值分析方法.

关键词: 多极理论;波导;本征值

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 03-0112-03

Multipole Theory Analysis of Waveguide Eigenvalue Problem

ZHENG Qin-hong¹,XIE Fu-yao¹,LIN Wei-gan²

(1. Department of Physics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China;
2. University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: A new approach, the multipole theory (MT) method, is briefly described for analysis of waveguide eigenvalue problems. The essential concept is to represent the solution of the waveguide partial differential equation by the generalized MT formula of 2-D Helmholtz equation. The applied rules and the procedure of the MT method are also introduced. By calculating and analyzing some engineering problems, it is shown that the MT method is an effective approach for analysis of waveguide eigenvalue problems.

Key words: multipole theory; waveguide; eigenvalue

1 引言

波导本征值问题是电磁工程领域,尤其是微波技术领域的重要课题.这不仅是因为各种波导中不同模式的场型分析和传输特性的研究直接和该问题有关,而且很多微波部件和系统的工程设计往往直接以该问题的求解为基础.

广义多极技术、多极理论是计算电磁学的一种半解析算法,已在电磁场散射、天线及传输线特性阻抗方面得到应用^[1,2].文献[3]从电磁理论和有关数学定理出发,证明:对于满足多极理论展开条件的二维 Helmholtz 方程边值问题,存在一种无穷级数收敛,且有一定普遍性的解析解,推导出二维 Helmholtz 方程边值问题的多极理论通解及其使用规则.但文献[3]仅限于研究涡流问题的二维 Helmholtz 方程边值问题,未能涉及波导本征值问题这类特殊的二维 Helmholtz 方程边值问题,因此,本文提出用多极理论分析波导本征值问题.

2 二维 Helmholtz 方程边值问题的多极理论

文献[3]从电磁理论和有关数学定理出发,推导出满足多极理论展开条件的二维 Helmholtz 方程边值问题,具有如下形式的多极理论解析解

$$u = A_0 J_0(kr_i) + \sum_{m=1}^{N_i} J_m(kr_i) (A_m \cos m_i + B_m \sin m_i) + \sum_{p=1}^{N_o} [A_{op}$$

$$H_0^{(2)}(kr_{op}) + \sum_{m=1}^{N_o} H_m^{(2)}(kr_{op}) (A_{opm} \cos m_{op} + B_{opm} \sin m_{op})] \quad (1)$$

就象用分离变量法获得无穷级数收敛的解析解一样,在实际工程计算中,级数项不可能取无穷多项,也没有必要取无穷多项,所以实际应用中,二维 Helmholtz 方程边值问题的多极理论通解为

$$\bar{u} = A_0 J_0(kr_i) + \sum_{m=1}^{N_i} J_m(kr_i) (A_m \cos m_i + B_m \sin m_i) + \sum_{p=1}^{N_o} [A_{op} \cdot H_0^{(2)}(kr_{op}) + \sum_{m=1}^{N_{op}} H_m^{(2)}(kr_{op}) (A_{opm} \cos m_{op} + B_{opm} \sin m_{op})] \\ = \sum_{n=1}^N n U_n, U_1 = J_0(kr_i), U_2 = J_1(kr_i) \cos i, \dots \quad (2)$$

式中: $J_m(kr_i)$ 是第一类 Bessel 函数, $H_m^{(2)}(kr_{op})$ 是第二类 Hankel 函数, $r_i = |r - r_d|$, r 是场点位置矢量, r_{ii} 是内极的位置矢量, N_i 是内极的个数, N_o 是外极的个数, $r_{op} = |r - r_{opk}|$, r_{opk} 是第 p 个外极的位置矢量, N_{op} 是第 p 个外极的个数, N 是总的级数项数.

对于非齐次 Helmholtz 方程 $\nabla^2 u + k^2 u = f(x, y)$, 式(2)可表示为

$$\bar{u} = U_0 + \sum_{n=1}^N n U_n \quad (3)$$

式(3)中的 U_0 为非齐次 Helmholtz 方程的特解.

由文献[3]可知,式(2)和式(3)的使用规则是:(1)若某段边界由直线或由可以剖分为多段直线单元的复杂曲线所组成,且任意两段直线间的内交角(两段直线在交点处对场域所张的角,如图1、图2中的 φ_1 、 φ_2)均不大于 180° ,则只需在场域的外边界以内任意点设置一个内极即可,极的次数一般不超过 20;(2)若某段边界曲线是圆弧,且对场域来说是内凸的,则必须在其圆弧的圆心处设置一个外极,反之,若圆弧对场域来说是内凹的,则必须在其圆弧的圆心处设置一个内极,且无论内极、外极,极的次数一般不超过 6;(3)对于更复杂的边界可按(1)、(2)两条规则作近似处理.详细理论分析可参见文献[3].

3 计算方法

设有下列定解问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= f(x, y), & x, y \\ u|_1 &= g(x, y), & x, y \\ \left. \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u \right) \right|_2 &= q(x, y), & x, y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其多极理论解与式(3)相同,即

$$\bar{u} = U_0 + \sum_{n=1}^N U_n \quad (5)$$

由电磁场的唯一性定理可知,根据定解问题式(4)中的边界条件,可确定出式(5)中的所有待定常数 U_n ,在本文中,采用最小二乘法来确定其待定常数,即通过使多极理论解与给定边界值之间误差的平方沿边界积分最小来确定式(5)中的待定常数.

由于 $E_{rr} = \int_1 (\bar{u} - g)^2 d + \int_2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + \bar{u} - q \right)^2 d$, 由 $\frac{dE_{rr}}{dU_m} = 0 (m = 1, 2, \dots, N)$ 可得

$$\sum_{k=1}^N \left[\int_1 U_k U_m d + \int_2 \left(\frac{\partial U_k}{\partial n} + U_k \right) \left(\frac{\partial U_m}{\partial n} + U_m \right) d \right] = \int_1 (g - U_0) U_m d + \int_2 \left(q - \frac{\partial U_0}{\partial n} - U_0 \right) \left(\frac{\partial U_m}{\partial n} + U_m \right) d, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$A = B \quad (7)$$

对于波导本征值问题, $U_0 = 0, u|_1 = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u \right)|_2 = 0$, 所以,式(7)变为

$$A = 0 \quad (8)$$

要想式(8)有非平凡解,必须

$$\det |A(k_c)| = 0 \quad (9)$$

由此可确定本征值 k_c , 即波导的截止波数.

4 实例分析

例 1^[4]. 图 1 所示是一边长为 a 的等腰直角三角形波导. 场域由三段直线边界所组成, 它们之间的内交角 φ_1 小于 180° . 根据前面所述的多极理论使用规则, 在场域内 O 点设置

了一个次数为 6 的内极, 其多极理论解为

$$\bar{u} = A_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^6 J_m(kr) (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) = \sum_{n=1}^{13} U_n \quad (10)$$

多极理论的波导截止波数计算结果见表 1. 为比较多极理论的计算精度, 表 1 中列出了文献[4]通过网络方式获得的波导截止波数.

表 1 三角形波导的截止波数($k_c a$)

| TE 模 | TE ₀₁ | TE ₁₁ | TE ₁₂ | TE ₂₂ | TM ₁₁ | TM ₂₁ | TM ₁₂ |
|--------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 理论值 ^[4] | 3.142 | 4.443 | 6.283 | 8.886 | 7.025 | 11.327 | 12.953 |
| 多极理论 | 3.1424 | 4.4429 | 6.2844 | 8.8790 | 7.0234 | 11.2834 | 12.9582 |
| 计算值 ^[4] | 3.149 | 4.429 | 6.210 | 8.761 | 7.011 | 11.429 | 12.069 |

例 2^[4]. 图 2 所示是一半径为 a 的扇形波导. 场域由两段直线边界和一段可以剖分为若干段直线单元的圆弧所组成, 它们之间的内交角 φ_1 均小于 180° . 根据前面所述的多极理论使用规则, 在场域内 O 点设置了一个次数为 6 的内极, 其多极理论解为

$$\bar{u} = A_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^6 J_m(kr) (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) = \sum_{n=1}^{13} U_n \quad (11)$$

多极理论的波导截止波数计算结果见表 2. 为比较多极理论的计算精度, 表 2 中列出了文献[4]通过网络方式获得的波导截止波数.

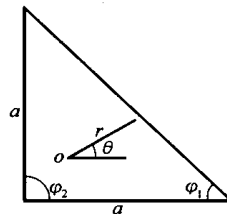


图 1 三角形波导

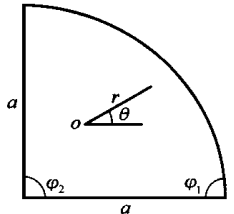


图 2 扇形波导

表 2 扇形波导的截止波数($k_c a$)

| | TE ₀₁ | TE ₁₁ | TM ₁₁ | TM ₁₂ |
|--------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 理论值 ^[4] | 3.832 | 3.054 | 5.136 | 8.418 |
| 多极理论 | 3.8315 | 3.0540 | 5.1359 | 8.4146 |
| 计算值 ^[4] | 3.824 | 3.022 | 5.120 | 8.436 |

表 3 正 N 边形波导第一个 TM 模的截止波数($k_c a$)

| N | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------|-------------|--------------|---------|---------|---------|---------|
| 理论值 ^[5] | $2\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}/2$ | 2.285 | 2.317 | 2.339 | 2.355 |
| 多极理论 | 2.09430 | 2.2095 | 2.28131 | 2.31480 | 2.31827 | 2.37875 |
| 计算值 ^[5] | 2.09617 | 2.25776 | 2.31676 | 2.34571 | 2.36225 | 2.37263 |

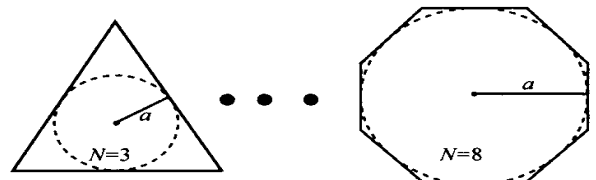


图 3 正 N 边形波导

例 3^[5]. 图 3 所示是一组内切圆半径为 a 的正 N 边形波

导. 多极理论的波导截止波数计算结果见表 3. 表 3 中列出了文献[5]通过扰动法获得的波导截止波数.

由表 1、表 2、表 3 可见, 多极理论不仅具有较高的计算精度, 而且可以很方便地应用于波导本征值问题的计算, 多极理论是一种有效的波导本征值问题分析方法.

5 结 论

1. 本文提出用多极理论计算波导本征值问题, 为波导本征值问题提供一种新的、具有较高计算精度的新型算法.

2. 用多极理论计算波导本征值问题, 不需要像数值法那样离散场域或边界, 又能用统一的格式计算各种形状的波导本征值问题.

3. 用多极理论计算波导本征值问题, 编程简单, 计算量小, 程序通用性强, 一般微机就能计算实际工程问题.

参考文献

[1] C. Hafner. The generalized multipole technique for computational electromagnetics. London : Artech House , 1990.

[2] Q. Zheng , W. Lin , and F. Xie. Multipole theory analysis of various configurations of slab lines. Microwave and Optical Technology Letters , 1998 , 17 (3) : 197 ~ 200

[3] 郑勤红等. 二维涡流分析的多极理论. 中国电机工程学报 , 1997 , 17 (2) : 73 ~ 77

[4] Wen Ceyi. Numerical solution of transmission line problems by a network model decomposition method based on polygon discretization. IEEE Trans. MIT , 1990 , 38 (8) : 1086 ~ 1091

[5] X. Zhou and Y. Wang. Approximate formula for cutoff wavenumber of lowest-order TM mode of a hollow metallic waveguide of arbitrary cross-section. IEE Proceedings- H , 1996 , 143 (5) : 454 ~ 456

郑勤红 1962 年出生, 博士, 教授. 1983 年云南大学物理系毕业, 1987 年云南师范大学物理系研究生毕业, 1996 年 11 月西安交通大学博士研究生毕业, 1996 年 12 月至 1998 年 10 月在电子科技大学作博士后研究工作. 主要研究领域为电磁场理论、微波理论与技术及应用数学等.

解福瑶 1955 年出生, 副教授. 云南师范大学物理系研究生毕业, 主要从事电磁场理论及算法研究.