离散余弦变换的改进的算术傅立叶变换算法

张宪超,李　宁,陈国良
(中国科技大学计算机科学与技术系,国家高性能计算中心(合肥),合肥 230027)

摘　要: 离散余弦变换(DCT)是数字图像处理等许多领域的重要数学工具.本文通过一种新的傅立叶分析技术——算术傅立叶变换(AFT)来计算DCT.本文对偶函数的AFT进行了改进.改进的AFT算法不但把AFT所需样本点数减少了一半,从而使所需加法计算量减少了一半,更重要的是它建立起AFT和DCT的直接联系,因而提供了适合用于计算DCT的AFT算法.本文推导了用改进的AFT计算DCT的算法并对算法进行了简要的分析.这种算法的乘法量仅为 $O(N)$,并且具有公式一致,结构简单,易于并行,适合VLSI设计等特点,为DCT的快速计算开辟了新的途径.

关键词: 离散余弦变换 (DCT);算术傅立叶变换 (AFT);离散傅立叶变换 (DFT)
中图分类号: TN911.72　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 0372-2112 (2000) 09-0088-03

An Algorithm for Computing DCT Using Improved Arithmetic Fourier Transform

ZHANG Xian-chao, LI Ning, CHEN Guo-liang
(Department of Computer Science & Technology, University of Science & Technology of China, National High Performance Computing Center at Hefei, Hefei 230027, China)

Abstract: The discrete cosine transform (DCT) is an important mathematical tool in digital image processing and many other fields. In this paper, a new Fourier analysis technique called the arithmetic Fourier transform (AFT) is used to compute DCT. The AFT of even functions is improved in this paper. The improved AFT reduces the samples needed to a half, consequently reduces the additions needed to a half. More importantly, it builds up a direct relationship between AFT and DCT. The algorithm for computing DCT using improved AFT is then deduced. This algorithm has many good performances such as it needs few multiplications ($O(N)$), it has a unified formula and a simple structure, it can be easily performed in parallel and it is especially suitable for VLSI designing. The algorithm creates a new approach to the fast computation of DCT.

Key words: discrete cosine transform (DCT); arithmetic Fourier transform (AFT); discrete Fourier transform (DFT)

1　引言

离散余弦变换(DCT)在数字图像处理等许多领域中起着重要作用.由于实用技术的需求,DCT的快速算法取得了很大的进展.目前对2的幂长度的DCT,已取得了良好的效果.而对任意长DCT的算法研究不多[1,2].由于DCT的核没有DFT的核那种分离性质,构造任意长的DCT的快速算法难度较大[1~3].

算术傅立叶变换(AFT)是一种新的傅立叶分析技术,它是利用数论中的莫比乌斯反演公式来计算连续函数的傅立叶系数的一种方法.AFT是1988年由Tufts和Sadasive[4]发现并命名的.近年来,AFT得到了飞速发展.同FFT相比,AFT是很有竞争力的[4~9].AFT的优点有:乘法量少($O(N)$),结构简单,公式一致,易于并行,它尤其适合VLSI设计.AFT可以用来计算离散序列的DFT[10].这种算法取得了良好的效果,为DFT的快速计算开辟了与FFT完全不同的思路.

通过DCT和DFT的密切联系,同样可以用AFT计算DCT.AFT的一个缺点是它需要函数大量的样本点,算法的加法量很大.本文对偶函数的AFT算法作了改进.改进的算法不仅把AFT所需样本点数减少了一半,从而节省了一半的计算量,而且它建立了AFT和DCT的直接联系,使我们可以直接用改进的AFT计算DCT.本文推导了用这种改进的AFT计算DCT的算法,并对算法的性能进行了简要的分析.这种算法为DCT的快速计算开辟了新的途径.

2　通过DFT计算DCT

目前存在四种DCT,其中以DCT-Ⅱ应用最为广泛.本文讨论DCT-Ⅱ的计算问题.

定义1　设 $X[n]\,(n=0,1,\cdots,N-1)$ 为长为 N 的实序列,其DCT-Ⅱ定义为:

$$C[k]=b_k\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cos\frac{k(2n+1)\pi}{2N},\ k=0,1,\cdots,N-1 \tag{1}$$

收稿日期:1999-07-09;修回日期:2000-03-01
基金项目:国家863计划项目基金(No.863-306-2D11-01-2)

定义 2　设 $X[n](n=0,1,\cdots,N-1)$ 为长为 N 的实序列,其 DFT 定义为:

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}X[n]W_N^{nk},\ W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/N} \tag{2}$$

如果以 $(2N-1)/2$ 为对称点,将 $X[n]$ 扩展为长为 $2N$ 的序列,使

$$X[n]=X[2N-n-1],\ n=N,\cdots,2N-1$$

扩展后的序列的 DFT 为:

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1}X[n]W_{2N}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}X[n]W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}X[n]W_{2N}^{nk}+\sum_{n=0}^{N-1}X[n]W_{2N}^{-n(k+1)},\ k=0,1,\cdots,2N-1$$

则 N 点 DCT 可以用 $2N$ 点 DFT 进行计算,其计算公式为(用 $\mathrm{Re}\,F[k]$ 代表 $F[k]$ 的实部):

$$C[k]=\frac{b_k}{2}\sqrt{\frac{2}{N}}\sec\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathrm{Re}\,F[k],\ k=0,1,\cdots,N-1 \tag{3}$$

3　DFT 的 AFT 算法

AFT 是一种计算傅立叶系数的方法.由于 AFT 需要函数大量的不均匀的样本点,而实际应用中系统经常产生的是均匀采样的样本点.因此在实际应用中,常常采用零次插值的方法实现 AFT[5,6,9].

傅立叶系数和 DFT 有着密切的联系.DFT 常常作为计算傅立叶系数的一个重要工具[12].通过逆用这种联系,可以用 AFT 计算 DFT[10].如果把序列 $X[n]$ 作为 AFT 的零次插值实现的输入,则所计算出的傅立叶系数和 $X[n]$ 的 DFT 只相差一个因子.对实序列的 DFT,根据其本身所固有的对称性质,只需计算它的前一半序列的值即可[10].这一性质在本文中很重要.

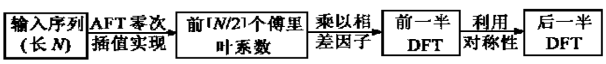

图 1　DFT 的 AFT 算法

4　改进的偶函数的 AFT 算法

在所有 AFT 算法中,偶函数的 AFT 算法是最简单的[4,5],而用 DFT 计算 DCT 时,需要把序列扩展为偶序列.故本文只用到偶函数的 AFT 算法:

设 $A(t)$ 是周期为 1 的偶函数,再假设它的傅立叶级数只含有限项,即:

$$A(t)=a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos 2\pi nt \tag{4}$$

其中 $a_0=\int_0^1 A(t)\,dt$,记 $\bar{A}(t)=A(t)-a_0$.定义如下平均值:

$$S(n)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\bar{A}\left(\frac{m}{n}\right) \tag{5}$$

则

$$a_n=\sum_{l=1}^{[N/n]}\mu(l)S(ln),\ n=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

其中 $\mu(l)=\begin{cases}1, & l=1\\ (-1)^r, & l=P_1P_2\cdots P_r,\text{其中 } P_i \text{ 为相异素数}\\ 0, & \exists P \text{ 使 } P^2\mid l\end{cases}$

为莫比乌斯(Möbius)函数.

算法的乘法量为:$O(N)$;加法量为 $O(N^2)$.由于计算 $S(n)$ 时需要函数大量不均匀的样本点,因此算法的加法量很大.

下面我们对算法进行改进.根据函数的偶对称性,注意到:

$$\bar{A}(m/n)=\bar{A}((n-m)/n)$$

则式(5)可以改写为:

$$\begin{cases}S(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\bar{A}\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n/2}\bar{A}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{n}\bar{A}(0)-\frac{1}{n}\bar{A}\left(\frac{1}{2}\right), & n\text{ 为偶数}\\ S(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\bar{A}\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{[n/2]}\bar{A}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{n}\bar{A}(0), & n\text{ 为奇数}\end{cases} \tag{7}$$

把式(7)和式(6)合起来称为改进的 AFT.比较一下式(5)和式(7),可以看出,改进算法把 AFT 所需样本点降低了一半,且允许我们只在半个周期上进行采样.例如若原算法需在[0,1]区间内进行采样,则改进算法只需在[0,1/2]内采样.这一性质在本文中非常重要.改进算法比原算法的加法量也降低了一半.

5　DCT 的改进的 AFT 算法

综合本文第二、三节的讨论,可知 DCT 可以用 AFT 计算.其推导过程如图 2:

图 2　利用 AFT 计算 DCT 的推导过程

这个过程可以简化,首先采用第四节中给出的改进的 AFT 算法.这种改进的 AFT 只用到延长后的对称序列的前一半的值.因此用改进的 AFT 算法,可以不必对序列进行延长.其次可以把两次的相差因子合并在一起.于是可以得到:

图 3　DCT 的改进的 AFT 算法

通过图 3 可以看出,改进的 AFT 算法建立了 AFT 和 DCT 的直接联系.在所有 AFT 算法中,偶函数的 AFT 算法是最简单的.而改进的 AFT 把它的加法计算量又降低了一半,因此改进的 AFT 算法是用来计算 DCT 的最佳 AFT 算法.

下面给出算法描述:

算法:DCT 的改进的 AFT 算法

输入:序列 $X[N]$

输出:序列的 DCT:$C[N]$

```
Begin
/ *计算直流分量 a0 */
for i = 0 to N - 1
```

$a_0 = a_0 + X[i]$
endfor
$a_0 = a_0 / N$
/ * 移去直流分量 */
for $i = 0$ to $N - 1$
$\bar{X}[i] = X[i] - a_0$
endfor
/ * 计算中间变量 $S[i]$ */
for $i = 1$ to $N - 1$
for $j = 0$ to $[i/2]$
$S[i] = S[i] + \bar{X}[N * j/i + 0.5]$
endfor
$S[i] = 2 * S[i]/i$
if (i 为偶数)
$S[i] = S[i] + \bar{X}[0]/i - \bar{X}[N/2 + 0.5]/i$
else
$S[i] = S[i] + \bar{X}[0]/i$
endfor
/ * 计算傅立叶系数 */
for $n = 1$ to N
for $l = 1$ to $[N/n]$
$a_n = a_n + \mu(l) S[l * n]$
endfor
endfor
/ * 计算 DCT */
for $k = 0$ to $N - 1$
$C[k] = \frac{N * b_k}{2} \sqrt{\frac{2}{N}} \sec\left(\frac{k\pi}{2N}\right) a_k$
endfor
End

算法的误差主要是在计算傅立叶系数时由零次插值引起的,对此文献[5,6,10]已作了大量分析,本文不再重复.下面对算法的性能进行简要的分析. DCT的改进的 AFT算法仅比改进的 AFT本身多了一个乘以相差因子的步骤,因此算法具有 AFT的所有优点:乘法量少(仅为 $O(N)$),结构简单,并行性好,适合 VLSI 设计等.算法对任意长度的 DCT都是有效的,这是其它 DCT快速算法所不具备的. AFT用于计算 DFT取得了很好的效果[10],而本文的改进算法比一般的 AFT算法更加简单,因此 DCT的改进的 AFT算法同样具有很好的性能.

6 结论

在各种正交变换的快速计算中,利用相关的变换进行计算是一条重要的途径.本文采用 AFT计算 DCT,首先对偶函数的 AFT进行了改进,在此基础上进行推导,得出了很简洁的用这种 AFT计算 DCT的算法.这种算法具有乘法量少、结构简单、公式一致、易于并行等特点,为 DCT的快速计算开辟了一条全新的思路.

参考文献:

[1] 曾泳泓.长度为 p^l 离散余弦变换算法 [J].电子学报,1991,19(5):87 - 95.

[2] 曾泳泓.任意长度离散余弦变换的快速算法 [J].计算数学,1993,15(3):299 - 302.

[3] 蒋增荣,曾泳泓,余品能.快速算法 [M].长沙,国防科技大学出版社,1993.

[4] D. W. Tufts, G. Sadasiv. The arithmetic Fourier transform [J]. IEEE ASSP Mag. ,1988,5(1):13 - 17.

[5] I. S. Reed, D. W. Tufts, Xiao Yu, T. K. Troung, M. T. Shih, X. Yin. Fourier analysis and signal processing by use of Mobius inversion formular [J]. IEEE Trans. Acoust. Speech Singal Processing, 1990, 38(3):458 - 470.

[6] I. S. Reed, Ming Tang Shih, T. K. Truong, R. Hendon, D. W. Tufts. A VLSI architecture for simplified arithmetic fourier transform algorithm [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 40(5):1122 - 1132.

[7] Luc Knockaert. A generalized möbius transform, arithmetic fourier transform, and primitive roots [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44(5):1307 - 1310.

[8] JIN-Xi, CHEN Nan-Xian, CHEN Zhao-Dou. Efficient algorithm for 2-D arithmetic fourier transform [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1997, 45(8):2136 - 2140.

[9] Lovine. F. P, Tantaratanas. Some alternate realizations of the arithmetic Fourier transform [A]. Conference on Signal, system and Computers, 1993, (Cat, 93, CH3312-6):310 - 314.

[10] 张宪超,武继刚,蒋增荣,陈国良.离散傅立叶变换的算术傅立叶变换算法 [J].电子学报,2000,28(5):105-107.

[11] William B. Pennebaker and Joan L. Mitchell 著,黎洪松,成实译. JPEG静止图像数据压缩标准 [S].北京,学苑出版社,1996.

[12] E. O. 布赖姆著,柳群译.快速傅立叶变换 [M].上海:上海科学技术出版社,1979.

作者简介:

张宪超 1971 年生. 1994 年、1998 年分别获国防科技大学学士、硕士学位.现在中国科技大学攻读博士学位.主要研究方向为信号处理的快速、并行计算等.

李 宁 1974 年生,1996 年获黑龙江大学学士学位,现在中国科技大学攻读硕士学位.主要研究方向为图像压缩算法、并行图像处理等.