

# 基于 RBF 网络的小波变换模极大值重构算法

王金根, 龚沈光, 吴正国, 唐劲飞

(海军工程大学, 武汉 430033)

**摘 要:** 本文根据交替投影的基本思想, 提出了一种基于径向基函数网络的小波变换模极大值重构方法. 该方法利用径向基函数网络 (RBFN) 在其基函数宽度很大时具有较好的线性映射这一特性来加快收敛速度, 提高重构精度. 它不仅能较好地重构信号的边缘, 而且能准确地重构出信号的峰值. 大量仿真实验表明, 该方法对各种信号是普遍适用的, 具有收敛速度快, 重构精度高的特点.

**关键词:** 信号重构; 小波变换; 模极大值; 交替投影; 径向基函数网络

**中图分类号:** TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 10-0130-03

## Algorithm of Signal Reconstruction from Modulus Maximum of Signal's Wavelet Transform Based on Radial-Basis-Function (RBF) Network

WANG Jin-gen, GONG Shen-guang, WU Zheng-guo, TANG Jin-fei

(Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** Based on the principle of alternative projection, the paper presents an algorithm of signal reconstruction from modulus maximum of signal's wavelet transform based on radial-basis-function (RBF) network. The algorithm accelerates convergence and improves reconstruction precision by taking advantage of RBF network's good linear property which occurs while the width of the basis function is very large. The algorithm can not only reconstruct signal's edges very well, but also recover signal's climax precisely. A lot of simulation experiments show that the algorithm is also effective to different kinds of signals and has characteristics of both fast convergence and high precision.

**Key words:** signal reconstruction; wavelet transform; modulus maximum; alternative projection; radial-basis-function network

### 1 引言

信号在不同尺度上小波变换的模极大值包含了信号中最重要的信息. 研究如何由这些模极大值重构信号, 对于信号滤波、边缘检测、图像压缩、模式识别都具有重要意义. Mallat 和 Zhong 等提出了一种交替投影的模极大值重构方法<sup>[1]</sup>. 这种方法有如下缺点: (1) 收敛速度较慢; (2) 当原始小波变换有跃变时, 会出现类似于 Gibbs 现象的伪振荡. 于是他们又提出了施加符号约束的交替投影方法. 这种方法可以在一定程度上消除伪振荡, 但是其收敛性得不到保证. A. E. Cetin 和 R. Ansari 等给出了一种由离散二进小波变换模极大值重构数字信号的迭代算法<sup>[2]</sup>, 这种方法的收敛性是能保证的, 但是重构出的信号可能与源信号有极大的差异 (实际上, 文献[1]已经说明了利用信号小波变换的模极大值不能完全重构源信号, 不同的信号可能在所有尺度上皆有相同的模极大值). 陈德智等<sup>[3]</sup>提出了一种由模极大值快速重构信号的方法. 这种方法对跃变信号的重构具有非常高的精度; 但是, 当对类似于正弦信号、线性调频信号、钟状信号等一系列信号重构时将具有较大的误差. 特别是其对信号峰值的损失在某些场合是不允许的. 基

于此, 本文根据交替投影的基本思想, 提出了一种基于径向基函数网络 (RBFN) 的小波变换模极大值重构算法.

### 2 基于交替投影的模极大值重构的基本思想<sup>[1]</sup>

模极大值重构的基本思想就是由信号的二进小波变换在不同尺度下的模极大值重构原信号. 也就是说, 要找一个函数  $h(x) \in L^2(R)$ , 它的二进小波变换  $W_2^j h(x)$  与  $W_2^j f(x)$  有相同的极值特征. 即若  $|W_2^j f(x)|$  在点  $\{x_n^j\}_{n \in Z}$  取极大值, 则

(1) 在每个尺度  $2^j$  上, 有  $W_2^j h(x_n^j) = W_2^j f(x_n^j)$ ;

(2) 在每个尺度  $2^j$  上  $|W_2^j h(x)|$  局部极大值在且仅在  $\{x_n^j\}_{n \in Z}$  处.

具体思路如下:

令  $K$  为满足下式的所有函数序列  $\{g_j(x)\}_{j \in Z}$  的空间

$$\| \{g_j(x)\}_{j \in Z} \|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (|g_j(x)|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{dg_j}{dx} \right\|^2) dx < +\infty \quad (1)$$

令  $V$  为  $L^2(R)$  中函数的二进小波变换所组成的空间, 则  $V \subset K$ .

令  $\{x_n^j\}_{n \in Z}$  表示  $K$  中满足  $g_j(x_n^j) = W_2^j f(x_n^j)$ ,  $n, j \in Z$  的元素

$\{g_j(x)\}$  所构成的空间, 在  $K$  中是闭的, 满足条件(1)的二进小波变换是属于  $V$  的函数序列. 必须求出  $V$  中一元素, 使范数  $\|g_j - h\|$  最小, 可通过在  $V$  和  $K$  上的交替投影得到.

设  $W$  是二进小波变换算子,  $Wf = \{W_2^j f\}_{j \in Z}$ , 记算子  $P_V = W^0 W^{-1}$ , 对任一序列  $X = \{g_j(x)\}_{j \in Z} \in K$ ,  $P_V X \in V$ , 因此,  $P_V$  是  $V$  上的投影算子. 令算子  $P : K \rightarrow V$  是一最佳投影算子, 即记取  $h \in K$ ,  $P h \in V$  满足  $\|P h - h\| = \min_{g \in V} \|g - h\|$ .

记  $P = P^0 P_V$ , 任取  $g_0 \in V$  作为初始函数, 则由凸逼近理论可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n g_0 = Wf$$

其中  $P^n = P^0 P^0 \dots P^0 P$  为算子  $P$  的  $n$  次映射.

将上述思想画成框图形式, 如下图 1 所示:

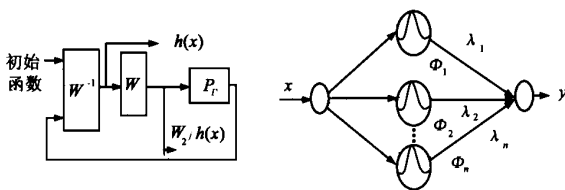


图 1 基于交替投影的模极大值重构算法框图

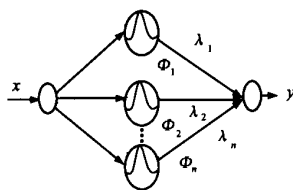


图 2 径向基函数网络结构示意图

对于这种方法, 当原始小波变换有跃变时, 会出现类似于 Gibbs 现象的伪振荡. 文献[1]中提出采用加符号约束的办法来消除伪振荡. 实际上也就是在上述框图中加进一个符号约束算子. 由于这个算子不是正交投影算子, 所以不能保证这时  $P$  的反复映射是收敛的.

从图 1 可看出, 这种方法收敛速度的快慢取决于  $P$  是采用何种方法加以实现的. 文献[1]中  $P$  的实现方法为  $g_j(x) = P(W_2^j h(x)) = W_2^j h(x) + j(x)$ , 使得  $g_j(x_n^j) = W_2^j f(x_n^j)$ ,  $n, j \in Z$ , 其中  $j(x) = e^{2^{-j}x} + e^{-2^{-j}x}$ .  $W_2^j h(x)$  为  $h(x)$  在尺度  $j$  上的小波变换, 加了  $j(x)$  后, 往往使它不再是某个函数的小波变换, 这也是它收敛比较慢的一个最主要原因. 为了加快收敛速度, 对  $P$  提出这样的要求, 即要求,  $g_j(x) = P(W_2^j h(x))$  与某个函数在尺度  $j$  的小波变换有极好的相关性. 当研究径向基函数网络的特性时, 作者发现这是可以做到的. 下面详细讨论这种  $P$  的设计过程.

### 3 基于 RBF 网络的模极大值重构算法

RBF 网络不仅具有良好的内插和外推能力, 而且避免了繁琐冗长的计算, 使学习速率比通常的 BP 方法快  $10^3 \sim 10^4$  倍. 它的拓扑结构如图 2 所示. (它的输入层和输出层皆可以有多个单元. 本图仅针对本文情况而言).

隐层执行的是一种固定不变的非线性变换, 隐单元数目在网络训练过程中随问题的复杂程度和所需精度动态调节, 其训练过程主要是选取隐层的中心及确定隐层和输出层间的权值. RBF 网络可以实现的映射为:

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x - c_i) \quad (2)$$

式中,  $x \in R^1$  为输入向量;  $\phi(\cdot)$  为一给定的非线性变换;  $\lambda_i$

表示欧氏范数;  $\lambda_i$  为权值;  $c_i \in R^1$  为网络中心; 由于用高斯函数作为基函数的网络能够以任意精度逼近任何连续函数<sup>[4,5]</sup>, 所以在本文中, 非线性变换  $\phi(\cdot)$  选用高斯函数,

$$\phi_i(\cdot) = \exp\left[-\frac{x - c_i}{2 \sigma_i^2}\right], 1 \leq i \leq n$$

式中  $\sigma_i$  为隐层第  $i$  个单元高斯函数的宽度.

对于每一个  $j$ , 选取  $W_2^j h(x_n^j)$ ,  $n, j \in Z$  作为网络的输入样本,  $W_2^j f(x_n^j)$ ,  $n, j \in Z$  作为网络的输出样本. 对网络进行训练, 训练完毕, 以  $W_2^j h(x)$  作为网络的输入, 得到网络的输出  $m_j(x)$ . 下面首先讨论权值  $\lambda_i$  及网络中心  $c_i$  的确定方法, 具体为:

令隐单元数等于样本数 (设样本数为  $L$ ),  $c_i = W_2^j h(x_n^j)$ . 假设  $\lambda_i$  已定, 将样本对  $(W_2^j h(x_n^j), W_2^j f(x_n^j))$ ,  $n = 1, 2, \dots, L$  逐个代入式(2), 得到一线性方程组, 解此方程组即可确定  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ . 再来详细讨论  $\lambda_i$  确定方法:

由于  $x \in R^1$ , 这样  $\phi_i(\cdot) = \exp\left[-\frac{(x - c_i)^2}{2 \sigma_i^2}\right]$ ,  $1 \leq i \leq L$ , 当  $\left|\frac{x - c_i}{\sigma_i}\right| \ll 1$  时,  $\phi_i(\cdot) = 1 - \frac{(x - c_i)^2}{2 \sigma_i^2}$ . 于是  $y = \sum_{i=1}^L \lambda_i \left(1 - \frac{(x - c_i)^2}{2 \sigma_i^2}\right)$ , 若忽略  $x^2$  项, 则  $y$  与  $x$  呈线性关系. 这样  $y$  在一定程度上较好地保持了  $x$  的形状. 为了验证这个分析过程的正确性, 将  $\phi_i(\cdot)$  直接取为  $1 - \frac{(x - c_i)^2}{2 \sigma_i^2}$ , 通过大量的仿真实验, 发现当  $\frac{1}{200} \leq \frac{c_i}{\sigma_i} \leq \frac{1}{100}$  时, 可取得相当满意的效果. 现在若令径向基函数网络的映射作用为算子  $P_M : V \rightarrow M$ , 那么是否有  $M \subseteq V$ ? 回答是否定的. 这也就意味着  $P_M$  没有完全实现  $P$  的功能. 实际上, 上述有关  $\lambda_i$  的线性方程组是一个矛盾方程组, 所得的解为最小二乘解. 那么  $m_j(x_n^j) = P_M(W_2^j h(x_n^j))$

$M$  与  $V$  之间有一段小距离. 如果对重构信号的精度要求不是很苛刻, 那么可以将  $P_M$  当成  $P$ , 然后按照图 1 的流程进行交替投影即可. 若对重构信号的精度要求较高, 则还要作一个从  $M$  到  $V$  的映射. 不妨设这个映射为算子  $P_M$ , 则  $P_M$  可以采用与文献[1]中  $P$  的实现方法完全相同的方法加以实现. 这样算子  $P$  由算子  $P_M$  与算子  $P_M$  合成. 由于  $P_M$  能较好地保持输入端函数的形状, 算子  $P_M$  将  $M$  空间的函数映射到  $V$  空间, 而且对函数形状的改变较小. 由这样的  $P_M$  与  $P_M$  合成的算子  $P = P_M \circ P_M$  显然满足前面对  $P$  提出的要求. 为了说明分析与设计过程的合理性, 下面确定一个仿真实验的结果.

### 4 仿真结果讨论

在对仿真结果进行讨论之前, 首先定义一个衡量指标. 设  $X_t^r(n)$  为经  $t$  次交替投影后的重构信号,  $X_s(n)$  为源信号,  $n = 0, 1, \dots, M - 1$ . 定义重构信号与源信号相对误差为  $e_t = \sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} (X_t^r(i) - X_s(i))^2} / \sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} (X_s(i))^2}$ ; 本文选用 Coiflets 小波 ( $h_N$  长为  $6 \times 3 = 18$ ). 为了使源信号具有代表性, 用五段不同类型的信号构成它. 第一段为来自课题的实测数据 (经过了

归一化处理);第二段为 Dirac 函数;第三段为阶跃函数;第四段为  $f(x) = 0.5 \sin(x^2 + \frac{1}{2}x)$  ( $x \in [-2.77, 2.27]$ ), 采样间隔为 0.1;第五段为位于区间  $[-2/3, 2/3]$ , 采样间隔为 0.1, 角频

为 3, 幅值为 0.4 的正弦信号叠加了  $\sigma = 0.1$  的高斯白噪声信号. 分别用文献[1]中直接交替投影法(称为方法(1))、加符号约束的直接交替投影法(方法(2)). 文献[3]中的重构方法(方法(3))以及本文的方法(方法(4))对源信号进行了仿真实验, 得到的  $e_r \sim t$  曲线如图 3 所示.

从图中可以看出, 若依据投影次数来衡量, 显然方法(1)收敛是最慢, 方法(3)收敛是最快, 方法(2)与方法(1)相比有一定的改善. 方法

(4) 较方法(1)与方法(2)有较大的改善. 若依照收敛时间来衡量, 方法(4)最好, 在达到相同的重构精度时它所用的时间最少. 例如, 为了达到 9.5% 的相对误差, 方法(1)交替投影了 18 次, 花费时间 24.99 秒; 方法(2)交替投影了 14 次, 花费时间 21.09 次; 方法(3)花费时间 11.81 秒; 方法(4)交替投影了 3 次, 花费时间 5.55 秒. 若对收敛时间和重构精度都有一定的要求, 则方法(4)将为最好的选择. 关于这一点从图 4 中可以看出得比较清楚. 图 4 中 (a)、(b)、(d) 分别是用方法(1)、(2)、(4)进行 6 次交替投影后得到的重构信号与源信号之间的关系图, (c) 是

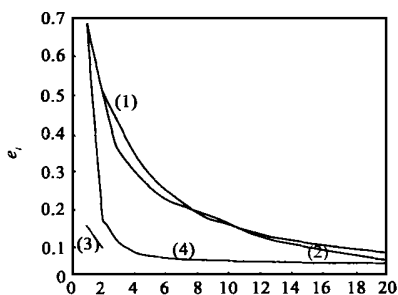


图 3 四种重构方法的相对误差与投影次数之间的关系曲线

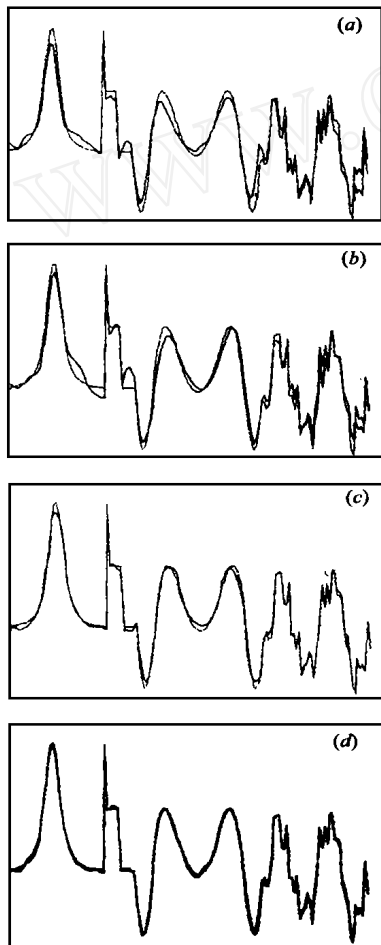


图 4 四种方法重构出的信号与源信号的差异

用方法(3)重构出的信号与源信号之间的关系图. 方法(1)、(2)、(3)、(4)花费的时间分别为 8.40 秒、8.85 秒、11.81 秒、11.98 秒, 达到的相对误差依次为 23.02%、20.72%、9.44%、5.06%. 从图中可看出, 方法(4)不仅能无误差地恢复出信号的边缘, 而且能较好地重构出信号的峰值, 方法(3)重构出的信号有一定的峰值损失. 方法(1)与方法(2)重构出的信号是不能令人满意的.

## 5 结论

信号的边缘及其峰值包含了信号的重要信息. 因此寻找一种重构方法使它不仅能无误地恢复信号的边缘而且能高精度地重构信号的峰值将具有重要的现实意义. 而在这方面, 本文所提出的方法较前三种方法有明显的优势. 它能以较短的时间重构出精度令人满意的信号, 而且不损失信号的边沿及峰值信息. 大量仿真实验表明, 该方法对各类信号是普遍适用的. 通常经过 5~6 次交替投影就可取得令人满意的精度(相对误差小于 7~8%). 若对重构精度要求不太高, 则进行 3~4 次交替投影即可. 若对重构精度的要求非常苛刻, 则需要进行多次交替投影(通常超过 10 次)方可满足精度要求.

## 参考文献:

- [1] S. Mallat and S. Zong. Characterization of signals from multiscale edges [J]. IEEE Trans. PAMI, 1992, 14(7): 710 - 732.
- [2] A. E. Cetin and R. Ansari. Signal recovery from wavelet transform maxima [J]. IEEE Trans. SP, 1994, 42(1): 194 - 196.
- [3] 陈德智等. 由小波变换的模极大值快速重构信号 [J]. 电子学报, 1998, 26(9): 82 - 85.
- [4] J. Park and I. W. Sandberg. Universal approximation using radial-basis-function network [J]. Neural Computation, 1991, 3(2): 246 - 257.
- [5] S. Lee and R. M. Kil. A Gaussian potential function network with hierarchically self-organizing learning [J]. Neural Networks, 1991, 4: 207 - 224.

## 作者简介:

王金根 1972 年出生, 现为海军工程大学在读博士生. 研究兴趣为: 弱信号检测与处理, 神经网络, 小波分析等.

龚沈光 1939 年 7 月出生, 1962 年毕业于哈军工. 现任海军工程大学教授, 博士生导师, 曾编著教材二部, 获国家科技进步奖、军队科技进步奖、全国科学大会奖等各项奖共 14 项. 主要研究领域为: 舰船物理场, 非触发引信, 现代信号处理等.