

基于交替投影神经网络的带限信号外推算法

王金根, 林春生, 龚沈光

(海军工程大学, 武汉 430033)

摘 要: 本文通过对频带受限数字信号的离散傅立叶变换特性的研究, 引进了交替投影神经网络, 并将其应用范围从实数域拓广到复数域, 且给出了在复数域仍然成立的若干结论. 运用这些结论, 在对网络噪声抑制、网络收敛速度及待外推信号因截断而造成频谱严重外泄等问题的分析与讨论的基础上, 提出了一种基于交替投影神经网络的外推算法. 仿真实验表明该方法是行之有效的. 另外, 该算法对频谱外推同样适用; 由于它采用全互连神经网络结构, 易于并行计算和 VLSI 实现, 从而可满足军事上实时处理的需要.

关键词: 带限信号; 信号外推; 交替投影; 神经网络

中图分类号: TP183 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 10-0052-04

An Extrapolation Algorithm for Band-Limited Signals Based on Alternating Projection Neural Networks

Wang Jir-gen, Lin Chur-sheng, Gong Shen-guang

(The Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: By studying the discrete Fourier transform properties of the band-limited digital signal, the authors introduce alternating projection neural networks into the paper, expand APNN's application scope from real field to complex field, and present several important conclusions on APNN. Analyzing and discussing network's tolerance to noise, convergence rate and the spectral leakage problem of the truncated signal expected to be extrapolated by using these conclusions, the paper presents an extrapolation algorithm for band-limited signals based on alternating projection neural networks. A lot of simulation experiments show that the algorithm is effective. In addition, the algorithm is also effective to spectrum extrapolation. Owing to adopting network structure, the algorithm is prone to parallel computation and VLSI design, and consequently can satisfy real time military processing needs.

Key words: band-limited signal; signal extrapolation; alternating projection; neural networks

1 引言

信号处理通常包含从物理观测结果中恢复原始信息. 在很多实际场合, 只知道信号的部分时域信息或部分频域信息, 希望由此而恢复整个信号. 这是信号处理的一个基本问题, 近二十年来, 它吸引了国内外许多学者的注意力. 人们在理论和技術方面做了许多有意义的工作. 例如 PSWF 展开^[1], Gerchberg-Papoulis 迭代算法^[2,3]. 文献[6]运用泛函算子逼近的思想改善了 Gerchberg-Papoulis 算法的收敛速度. 以上这些方法都是针对连续信号而言的, 而且这些方法有时是不稳定的, 对噪声敏感. Jain 和 Rushforth 提出了较为实际的稳定算法^[4,5], 但是效果不是非常令人满意. 文献[7]提出了一种基于傅立叶变换的带限信号外推算法, 它实际上是针对连续信号而提出的一种数值迭代算法. 因而较好外推性能的获得要以采样点足够密 (也就是说数据量的增大) 为代价, 所以该方法虽实用, 但不适于军事上实时处理的需要. 基于此, 本文提出了一种基于交替投影神经网络 (APNN) 的带限信号外推算法. 该方法是直

接为数字信号的外推而设计的. 由于采用全互连神经网络结构, 易于并行计算和 VLSI 实现, 从而可满足军事上实时处理的需要, 该算法对噪声有一定的抑制能力. 虽然它是针对时域信号外推而提出的, 但是对频谱外推是同样适用的.

2 时域信号外推的常见问题

问题一 设待外推的数字信号为 $x(n)$, $n \in I$, $I = \{0, 1, \dots, N-1\}$ 为全集, 已知其片段信号为 $g(n) = w(n)x(n)$, 其中 $w(n) = \begin{cases} 1, & n \in D \\ 0, & n \notin D \end{cases}$, $D = \{M_1, M_1+1, \dots, M_2\}$, $M_1, M_2 \in I$, $x(n)$ 傅立叶变换 $X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega}$ 的带宽为 $[-c, c]$, 要求外推出 $x(n)$ 在区间 $\bar{D} = I - D$ 上的值.

问题二 与问题一不同之处在于其片段信号 $g(n) = w(n)x(n) + N(n)$, 其中 $N(n)$ 为高斯白噪声序列, $w(n)$ 与问题一同, 要求外推出 $x(n)$ 在区间 I 上的值 (因为此时 $g(n) = x(n)$, $n \in D$).

本文只讨论时域信号的外推算法,可以将其推广到频域频谱值的外推问题。

3 基于 APNN 的带限信号外推算法

3.1 问题分析

当 $n > D$ 时, $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2}{N}k) e^{i2\pi kn/N}$. 由于 $X(\cdot)$ 的频谱位于 $[-c, c]$ 之内, 当 $\frac{c}{2} \times N \leq k \leq \frac{2-c}{2} \times N$ 时 $X(\frac{2}{N}k) = 0$. 令 $[-cN/2, cN/2] = L$, 则有 $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L X(\frac{2}{N}k) e^{i2\pi kn/N}$, 将 $x(n)$ 替换成 $g(n)$, 则当 $g(n)$ 的长度 $|D| = M_2 - M_1 + 1 < 2[-cN/2, cN/2] + 1$ 时, 外推问题的解不定, 当 $g(n)$ 的长度 $|D| \geq 2[-cN/2, cN/2] + 1$ 时, 对于问题一, 解存在且唯一; 对于问题二, 由于 $g(n)$ 中含有 $N(n)$, 所以只有在 $|D| = 2[-cN/2, cN/2] + 1$ 时外推解存在且唯一, 否则没有精确解(但是后面将会看到, 可求出其最佳逼近解).

若将 $x(n), n \in I$ 看成一向量, 即 $S = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$, 则 $S = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L X(\frac{2}{N}k) f_k$, 其中 $f_k = [1, e^{i2\pi k/N}, \dots, e^{i2\pi k(N-1)/N}]^T, k = -L, -L+1, \dots, 0, \dots, L-1, L$; 显然对任意 $i, j \in \{-L, \dots, L\}$, 有 $f_i^H \cdot f_j = N \delta_{ij}$, 即 $f_{-L}, \dots, f_0, \dots, f_L$ 为一组正交基(实际中, 考虑到信号皆是实的, 因而通常选取 f_{-L}, \dots, f_0 等向量的实部和 f_1, \dots, f_L 等向量的虚部组成一正交基); 若令 $V = \left\{ v \in \mathbb{C}^{N \times 1} \mid v = \sum_{i=-L}^L c_i f_i, c_i \in \mathbb{C} \right\}$, 则 $S \in V$. 由于交替投影神经网络能够进行模式分类和联想记忆, 那么它能否在复空间中根据输入的部分信息 $g(n), n \in D$, 联想出模式 S 呢? 这就是下面要研究的问题。

3.2 APNN 网的域拓广及其若干结论

交替投影神经网络 (Alternating Projection Neural Networks) 是由美国 Washington 大学 Marks 等人提出的一种全互连网络. 它是利用凸集投影的概念, 在向量空间中建立的一种神经网络模型, 可用于模式分类和联想记忆. 文献 [8] 详细介绍了此网络, 并给出了 APNN 网在实数域的稳态收敛性的证明. 实际上, 可以证明 APNN 网能够拓广到复数域且稳态收敛条件不变. 唯一需要改变的是权值学习方法. 即将实数域的向量(或矩阵)的转置改为复数域中的共轭转置. 下面给出在复数域中同样成立的两个有用结论.

结论 1 令 w 为所有强制神经元序号组成的集合, U 为所有浮动神经元序号组成的集合, f_i^p 表示第 i 个独立模式中所有的编号属于 w 的分量按序组成的向量, f_i^q 表示第 i 个独立模式中所有的编号属于 U 的分量按序组成的向量. $S^p(m)$ 表示 m 时刻所有强制神经元的状态按序组成的向量; $S^q(m)$ 表示 m 时刻所有浮动神经元的状态按序组成的向量. 已知 $S^p(0) = \sum_{i=1}^K c_i f_i^p, c_i$ 为复数, 则有 $S^q(\cdot) = \sum_{i=1}^K c_i f_i^q$ 而且两者 c_i 完全相同. (证明过程略)

结论 2 设用于网络权值学习的独立模式为 $f_i, i = 1, 2,$

$\dots, K, F = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_K] = \begin{bmatrix} F_p \\ F_Q \end{bmatrix}$, F_p 为 $P \times K$ 矩阵, F_Q 为 $(N-P) \times K$ 矩阵, $P \geq K$. 现将某一向量 f_w 的前 P 个分量(设这 P 个分量组成向量 S_w^p) 依次作为前 P 个强制神经元的状态, 则网络最终联想出的浮动神经元状态向量 $S_w^q(\cdot) = F_Q \cdot E$, 其中 E 为矩阵方程 $F_p \cdot X = S_w^p$ 的最佳逼近解. (证明过程略)

3.3 外推算法研究

由前面对问题的分析可知 $S = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L X(\frac{2}{N}k) f_k$, 若令 $F = [f_{-L} \ \dots \ f_0 \ \dots \ f_L] = \begin{bmatrix} F_p \\ F_Q \end{bmatrix}$, 其中 F_p 为 F 的前 P 行组成的矩阵, F_Q 为 F 的余下 Q 行组成的矩阵, 显然 $P+Q=N$, 则对于问题一有 $F_p \cdot C = g$, 其中 $C = \left[\frac{1}{N} X(\frac{2}{N}(-L}), \dots, \frac{1}{N} X(\frac{2}{N}(-x_0}), \dots, \frac{1}{N} X(\frac{2}{N}(x_L)) \right]^T, g = [g(0) \ g(1) \ \dots \ g(P-1)]^T$; 它为相容方程组. 若将 F 的各个列向量依次作为网络权值学习的独立模式, 将 g 作为 APNN 网前 P 个强制神经元的状态, 则由结论 1 可知网络最终联想出的浮动神经元状态向量为 $x(n)$ 在 $\{P, P+1, \dots, N-1\}$ 上的完全恢复. 对于问题二有 $F_p \cdot C = g + \epsilon$, 其中 g 的定义同问题一, ϵ 是长为 P 的高斯白噪声序列, 由于 ϵ 的引入使方程组不再相容. 若将 $g + \epsilon$ 作为 APNN 网前 P 个强制神经元的状态, 则由结论 2 可知网络最终联想出的浮动神经元状态向量为 $x(n)$ 在 $\{P, P+1, \dots, N-1\}$ 上的最佳逼近值. 逼近情况如何, 也就是说, ϵ 加到相容方程组 $F_p \cdot C = g$ 的右边后对 C 的影响情况(假设 ϵ 使 C 改变了 ΔC), 即

$$F_p \cdot (C + \Delta C) = g + \epsilon \Rightarrow F_p \cdot C = g + \epsilon - F_p \cdot \Delta C \Rightarrow C = F_p^+ \cdot (g + \epsilon - F_p \cdot \Delta C)$$

经过研究发现 ΔC 的存在给外推信号制造的噪声与原噪声相比要小得多. 特别当信号的带宽较窄时将会有更强的抑制作用. 这样网络最终联想出的浮动神经元的状态为 $F_Q \cdot (C + \Delta C) = F_Q \cdot C + F_Q \cdot \Delta C$. 若此时将网络的浮动神经元改为强制神经元, 强制神经元改为浮动神经元, 网络经过充分联想后, 就可达到去除片段信号噪声的目的, 其最终的所有神经元状态组成的向量即为要求外推的信号在 I 上的值.

以上所有分析是针对较为理想的情况, 实际上带限信号在时域上是无限长的. 时域上的截断必然造成频谱泄露. 当待外推的信号 $x(n), n \in I$ 两端的差值较大时, 频谱泄露将很严重. 这时就需要加窗函数来抑制泄露, 考虑到窗函数两端的值太小, 所以在选择窗函数时其长度要超过 $x(n)$ 的长度 N 以便让窗函数的两端空出来不参与加权处理. 外推结束后, 还需要将外推信号除以参与加权的相应窗函数部分.

3.4 网络收敛速度情况分析

网络收敛速度取决于 T_4 (浮动神经元之间的连接权矩阵) 的谱半径 ($\rho(T_4)$) 的大小, $\rho(T_4)$ 越小, 收敛速度越快. 现假定网络神经元的个数为 N , 强制神经元的个数为 P , 网络用于权值学习的独立模式即为前述的 $f_i, i = -L, \dots, 0, \dots, L$. 则在 N 固定的情况下, 当 L 不断增加时, $\rho(T_4)$ 随 P 的增大衰减得越来越慢. 这意味着在 N 一定的情况下, 为了使网络能快速

收敛,就要以增加 P (或者说以牺牲外推能力,外推能力定义为 $N/|D| = N/P$,由前面分析可知,其上限为 $(P+1)/(cP)$)为代价.带宽越大, P 的增加越显著.当从网络用于权值学习的独立模式中扣除 f_0 时,其 (T_4) 随 P 的变化曲线与未扣除 f_0 的情况相比,有了明显的改善(这很容易从数学上给出严格证明).这说明了网络对不含直流分量的待外推信号的外推能力比对含直流分量的待外推信号要强.

上面的分析说明该网络对于窄带信号有较强的外推能力,它对带宽之外的频率分量有一定的抑制能力.因此,可广泛用于选频或陷波处理.随着带宽增加,网络外推能力逐渐减弱.为了进一步改善其外推能力,可以采用如下措施:

(1) 如果允许的话,对片段信号进行去直处理.

(2) 设待外推的信号总长度为 N ,已知部分长为 P ,需要外推部分长为 Q ,若 Q 比 P 大很多,则将 Q 分为 $d = \lfloor Q/L \rfloor$ 段依次称为段 1、段 2、...、段 d 等,并将原来已知部分称为段 0.网络经过 N_1 次联想后,将联想出的段 1 部分与原来的段 0 共同作为已知部分接着联想,经过 N_2 次联想后,将联想出的段 2 部分再加入已知部分,.....直至所有段联想完毕.注意 N_1, N_2, \dots, N_d 是递减的.仿真实验表明这种改善方法是切实有效的.

3.5 外推算法的具体实现过程

整个外推算法分为两个阶段:

(1) 准备阶段

确定待外推信号的总长度 N ,从而定出网络神经元个数,由待外推信号的先验频带信息确定独立模式向量及其个数 K ($K=2L+1$ 或 $K=2L$);

根据获得的模式对网络进行训练;

采样获取长为 P 的片段信号(要求 $P \geq K$),记为段 0.若待外推的信号需要加窗处理,则将片段信号乘上窗函数的相应部分.

将信号需要外推的部分分为 $d = \lfloor (N-P)/L \rfloor$ 段,依次记为段 1,段 2, ..., 段 d .

(2) 网络工作阶段

根据片段信号的长度确定网络中强制神经元个数;

网络经 N_1 次联想后,将与段 1 对应的浮动神经元改为强制神经元,经过 N_2 次联想后,将与段 2 对应的浮动神经元改为强制神经元,直至所有神经元皆为强制神经元为止;

将与段 0 对应的强制神经元改为浮动神经元,经过 N_0 次联想;

将网络的所有神经元状态值除以相应的窗函数值(若片段信号未经加窗处理,则此步不必进行).

经过这两个阶段后,得到的最终结果即为经过去噪后的待外推信号的最佳逼近值.

4 仿真实验及其结果

例 1 待外推的信号为

$$x(n) = \frac{\sin(3 + \frac{20}{49}n)}{3 + \frac{20}{49}n} + \frac{\sin(3 - \frac{20}{49}n)}{3 - \frac{20}{49}n}$$

$n=0, 1, \dots, 49$; 片段信号为 $g(n) = x(n), n=0, 1, \dots, 7$; 网络用于权值学习的独立模式个数为 7. 图 1 中实线(1)为原信号,实线(2)是网络直接经过 100 次联想得到的结果,图中实线(3)是网络将外推部分平分为两段,依次经过 100 次、30 次联想得到的结果,得到了明显的改善.

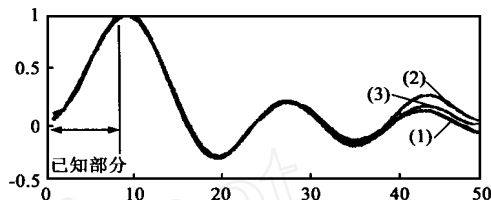


图 1 直接外推与分段外推的外推结果与原信号的比较

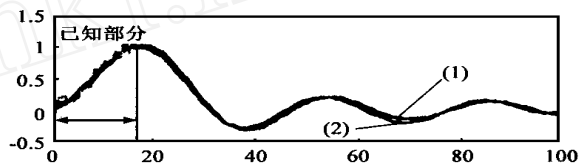


图 2 外推算法根据被噪声污染的片段信号外推出的整个信号与原始信号的比较

例 2 待外推的信号为

$$x(n) = \frac{\sin(3 + \frac{20}{99}n)}{3 + \frac{20}{99}n} + \frac{\sin(3 - \frac{20}{99}n)}{3 - \frac{20}{99}n}$$

$n=0, 1, \dots, 99$; 片段信号为 $g(n) = x(n) + N(n), n=0, 1, \dots, 15$; $N(n)$ 为 $\sigma=0.085$ 的高斯白噪声序列,网络用于权值学习的独立模式个数为 7. 图 2 中实线(1)是原信号;实线(2)是网络将外推部分平分为两段,依次经过 100 次、25 次联想得到的结果.另外,将外推部分作为已知部分,外推出受噪声污染的片段信号部分如图所示.可以看出,它有较强的去噪能力.

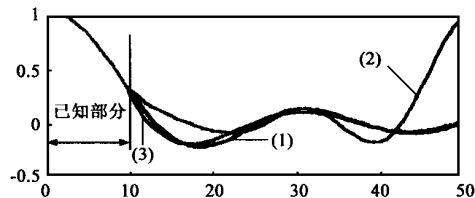


图 3 直接外推结果、经加窗处理后的外推结果与原始信号的比较

例 3 待外推的信号为

$$x(n) = \frac{\sin(4 - \frac{n}{49})}{4 - \frac{n}{49}}, n=0, 1, \dots, 49$$

片段信号为 $g(n) = x(n), n=0, 1, \dots, 9$; 网络用于权值学习的独立模式个数为 5. 待外推信号因截断而造成严重频谱外泄. 图 3 中实线(1)是原信号;实线(2)是直接外推(不加窗)得到的结果;实线(3)为经加 Blackman 窗(窗长为 90,从它的第 10 点开始给信号加权)处理后得到的外推结果,显然得到了较大改善.

例 4 待外推的信号为一组长为 50 的实测数据(经过了归一化处理),其片段信号长为 23. 图 4 中(1)为原信号;(2)为

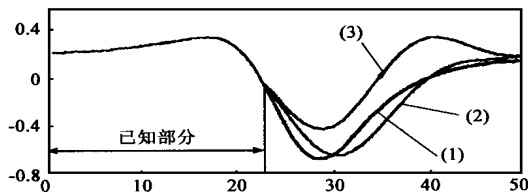


图 4 待外推信号中直流分量对网络收敛速度的影响

根据片段信号的外推结果;(3)是将原信号加一直流分量(其片段信号也相应加上此分量)后,根据片段信号外推,再将外推部分减去预加直流分量之后的结果。外推效果截然不同,说明直流分量在其中起了作用。

上面四个例子说明了:(1)改进算法的有效性;(2)算法对噪声有一定的抑制能力;(3)加窗处理可改善因截断而使频谱严重泄漏的待外推信号的外推效果;(4)去直可加快收敛速度。从而验证了文中分析的合理性。各例中选用不同的信号都取得了满意结果说明该算法对不同类别带限信号都是有效的。

5 结论

本文引进了交替投影神经网络,将其应用范围从实数域拓广到复数域,并给出了在复数域仍然成立的若干结论。在研究频带受限数字信号的离散傅立叶变换特性之后,结合网络的这些结论,通过选取一组正交基作为网络的独立模式,来对网络进行训练。本文在对(1)网络对噪声的抑制能力;(2)网络收敛速度;(3)因截断而使待外推信号频谱严重外泄等问题的分析与讨论的基础上,提出了一种基于交替投影神经网络的带限信号外推算法。仿真实验表明该方法是行之有效的。文中的分析与设计是合理的。另外,该算法对频谱外推同样适用;由于它采用全互连神经网络结构,因而易于并行计算和 VLSI 实现,从而可满足军事上实时处理的需要。

参考文献:

[1] D. Slepian, H. O. Pollak and H. J. Landau, Prolate spheroidal wave functions, [J]. Bell Syst. J., Jan. 1966, 40:43 - 84.

- [2] R. W. Gerchberg, Superresolution through error energy reduction [J]. Opt. Acta, 1975, 21 (9) :709 - 720.
- [3] A. Papoulis, A new algorithm in spectral analysis and bandlimited extrapolation [J]. IEEE Trans. CAS-22, 1975 :735 - 742.
- [4] A. K. Jain and S. Ranganath, Extrapolation algorithms for discrete signal with application in spectral estimation [J]. IEEE, Trans. ASSP, 1981, 29(4) :830 - 845.
- [5] C. K. Rushforth et al., Least-squares reconstruction of objects with missing high-frequency components [J]. J. Opt. Soc. Am, Feb 1982, 72 (2)
- [6] 陈宗鹭等, 带宽有限信号外推的泛函算子逼近法 [J]. 电子学报, 1987, 15(2) :70 - 76.
- [7] 王思雄等, 基于傅立叶变换的带限信号外推算法 [J]. 电子学报, 1992, 20(12) :75 - 78.
- [8] R. J. Marks, S. Oh, and L. E. Atlas, Alternating projection neural networks [J]. IEEE Trans. CAS, 1989, 36(6) :846 - 857.

作者简介:



王金根 1972 年出生, 现为海军工程大学在读博士生。研究兴趣为: 弱信号检测与处理, 神经网络, 小波分析等。

林春生 1983 年毕业于海军工程学院(现为海军工程大学), 1996 年获工学博士学位, 现为海军工程大学教授, 主要从事数字信号处理、人工智能、传感器技术等方面的教学与科研工作。



龚沈光 1939 年 7 月出生, 1962 年毕业于哈军工。现任海军工程大学教授, 博士生导师, 出版专著 2 部, 获国家科技进步奖、军队科技进步奖、全国科学大会奖等各项奖共 14 项。主要研究领域为: 舰船物理场, 非触发引信, 现代信号处理等。

(上接第 64 页)

[8] PAN Jin and JIAO Licheng, Construction of orthogonal multiwavelets with short sequence via genetic algorithm [A]. Neural Networks and

Brain Proceedings [C], ICNN&B '98, Beijing: 1998, 492 - 495.