

# 遗传算法在 FIR 滤波器设计 —— 频率抽样法中的应用

陈小平, 于盛林

(南京航空航天大学测试工程系, 南京 210016)

**摘要:** 本文介绍了遗传算法在 FIR 滤波器设计 —— 频率抽样法中的应用. 用遗传算法确定过渡带样本值, 解决了传统方法(查表法)不能保证数据是最优的问题. 本文还对标准遗传算法进行了适当的改进. 给出了 FIR 数字低通、带通滤波器设计的两个例子. 实验结果说明通过遗传算法设计的 FIR 滤波器性能较查表法得到了改善.

**关键词:** 遗传算法; FIR 滤波器; 频率抽样

**中图分类号:** TP301.6; TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 10-0118-03

## An Application of Genetic Algorithms in FIR Filter Design with Frequency Sampling Method

CHEN Xiao-ping, YU Sheng-lin

(Dept. of Measurement and Testing Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In this paper a new application of genetic algorithm (GA) in FIR filter design with frequency sampling method is presented. As the value of transition bands sample is obtained by GA, the problem that the value obtained by searching for table method is not the optimal can be solved. Suitable improvements are made for the standard GA in the paper. Two examples of lowpass and bandpass FIR filter design are provided. Experimental results have shown that the performance of the filter, which is designed via GA, is improved as compared with searching for table method.

**Key words:** genetic algorithm; FIR filter; frequency sampling

### 1 引言

FIR 数字滤波器设计的常用方法有窗口法、频率抽样法、最优等波动法<sup>[1]</sup>. 频率抽样法可以直接从频域处理, 且效果也很好. 对于频响只有少数几个非零值抽样的窄带选频滤波器特别有效. 但使用频率抽样法时存在如何确定过渡带样本值的问题, 传统的方法是查表. 查表法存在两个问题: (1) 表中提供的数据不能保证是最优的; (2) 表不可能提供关于不同的抽样点数、通带边缘频率、阻带边缘频率、过渡带样本数的全部数据. 若表中查不到数据, 只能通过近似估计确定过渡带样本值, 这样不一定能保证全局最优.

遗传算法 (Genetic Algorithm, GA) 是一种模仿生物进化过程的结构型的随机搜索. 这种生物模仿过程可以导出复杂问题的有效解, 不会陷入局部最优问题. GA 首先是由 Holland 提出的, 并由 Goldberg 作了广泛的探索<sup>[2]</sup>. GA 已成功地应用于多种优化问题, 例如线性自适应滤波器的参数估计<sup>[3]</sup>, 非线性数字滤波器的参数识别<sup>[4]</sup>等. 本文将 GA 用于 FIR 数字滤波器设计 —— 频率抽样法中, 确定过渡带样本的最佳值, 解决了传统的查表法不能保证数据是最优的问题. 结合具体例子作了一些探索, 实验结果令人满意. 文中还对标准 GA 作了两点改进. 首先, 将适应度最好的估计参数不变地传至下一代确保了算法的收敛<sup>[5]</sup>, 其次引入可变变异概率的手段, 当群体中所

有估计参数是相同的或经过一定代数之后所得结果没有改善时增大变异概率.

### 2 频率抽样法

频率抽样法是基于频率采样理论的一种设计方法. 一个任意长的序列, 对它的频谱进行  $N$  等分间隔抽样, 利用离散傅里叶反变换, 可以得到一个  $N$  点有限长序列. 这个有限长序列是原序列以  $N$  为周期的周期序列的主值序列, 它是原序列的近似, 因而它的频率特性也将逼近原序列所对应的频率特性. 对于一个所需求的频响  $H_d(e^j)$ , 其对应的单位脉冲响应是  $h_d(n)$ , 对  $H_d(e^j)$  在单位圆上作  $N$  等分间隔抽样得到  $N$  个频率采样值  $H(k)$ , 由  $H(k)$  经 IDFT 得到  $N$  点有限长序列  $h(n)$ . 设  $H(z)$  是它的系统函数<sup>[1]</sup>:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-z^{-1}e^{j2\pi k/N}} \quad (1)$$

对于线性相位滤波器有

$$H(k) = H_r(2^{-k}/N) e^{j\phi(k)} \quad (2)$$

式中

$$H_r(2^{-k}/N) = \begin{cases} H_r(0), & k=0 \\ H_r(2^{-k}/N), & k=1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3)$$

并且对于对称脉冲响应

$$\phi(k) = \begin{cases} -\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \left( \frac{2-k}{N} \right), & k=0, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \frac{2}{N} (N-k), & k=\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示取整运算。

频率抽样法目前有两种设计方法,第一种是对逼近误差不加任何限制,称之为朴素设计法。第二种方法则通过改变过渡带的样本值,努力使阻带中的误差最小化,称之最优设计法。最优设计法是频率抽样的常用方法。为了在阻带内得到更大的衰减,必须增加抽样点数  $N$ ,使得过渡带中的样本数也相应增多。如何确定过渡带中的样本值,使阻带内的衰减最大,通常采用的是查表法。但查表法存在不能保证所得数据是最优的问题。在频率抽样法中用 GA 确定过渡带样本值是一非常好的手段,解决了查表法存在的问题。

### 3 遗传算法实现

GA 是基于自然选择和自然基因的搜索算法,通常由三个基本操作组成:选择、交叉、变异。给定一个优化的问题,简单的 GA 将参数编码成一定长的位字符串,然后以随机的方法组合,基于适应度函数重复使用三种操作,执行拷贝字符串,交换字符串的一部分及改变字符串的某一位的值的的基本操作,最后发现和解码以得到 GA 的解。

FIR 滤波器设计——频率抽样法中 GA 的实现可通过低通滤波器的例子予以说明。

例 用频率抽样法设计一 FIR 低通滤波器。技术指标:通带边缘频率  $f_p = 0.2$ , 阻带边缘频率  $f_s = 0.3$ , 最大通带波动  $r_p = 0.8\text{dB}$ , 最小阻带衰减  $a_s = 40\text{dB}$ 。

选择抽样点数  $N = 40$ , 这样在过渡带  $0.2 < \omega < 0.3$  中有一个样本,因为频率间隔  $\Delta\omega = 2/40$ , 过渡带样本在  $k = 5$  及  $k = 40 - 5 = 35$  处。假设用  $T_1$  表示样本的值,  $0 < T_1 < 1$ , 由式(3)抽样的幅度响应为  $H_r(k) = [1, 1, 1, 1, 1, T_1, 0, \dots, 0, T_1, 1, 1, 1, 1, 1]$ , (中间为 29 个 0)。由式(2)、(4)得  $H(k)$ , 再由  $H(k)$  经 IDFT 就可得到 40 点 FIR 滤波器的脉冲响应  $h(n)$ , 由  $h(n)$  计算出实际的最小阻带衰减  $A_s$ , 此处运用 GA 的目的就是寻找最佳的  $T_1$ , 以得到最大的阻带衰减。

在 GA 的每一代中,对每个估计参数(表示  $T_1$  的字符串)译码计算出  $T_1$ , 并求出实际最小阻带衰减  $A_s$ , 设第  $i$  代第  $j$  个估计参数对应的实际最小阻带衰减为  $A_{sij}$ , 这样就可以定义该估计参数的适应度函数

$$f_{ij} = A_{sij} / \prod_{j=1}^S A_{sij}, j = 1, \dots, S \quad (5)$$

式中  $S$  为群体规模。

在运行 GA 之前有几个参数需设置。这些参数如下:  $S$ : 群体规模;  $L$ : 字符串的长度;  $G_c$ : GA 运行  $G_c$  代后,若实际最小阻带衰减  $A_s$  没有改善则结束 GA;  $G_e$ : GA 运行  $G_e$  代后,若实际最小阻带衰减  $A_s$  没有改善则增加变异概率  $P_m$ , 注意  $G_e \ll G_c$ ;  $P_c$ : 交叉概率;  $P_{\text{mnor}}$ : 正常变异概率;  $P_{\text{mmax}}$ : 最大变异概率。GA 的具体步骤如下:

- (1) 设置上述参数, 令  $i = 0, k = 0, m = 0$ ;
- (2) 初始化  $S$  个估计参数, 令  $i = i + 1, k = 0, m = 0$ ;

(3) 对第  $i$  代中第  $j$  个估计参数计算实际最小阻带衰减  $A_{sij}$ , 令  $A_{s \max}^i = \max_j(A_{sij})$ ;

(4) 按适应度比例选择  $S$  个个体, 保留 1 个最优个体不参与交叉变异;

(5) 配对交叉, 采用两点交叉方法, 在交叉过程中以概率  $P_m$  调用变异操作, 若  $P_m = P_{\text{mmax}}$ , 变异之后恢复正常的变异概率  $P_m = P_{\text{mnor}}$ , 将步骤(4)保留的最优个体随机地替换  $S$  个子体中的任一个;

(6) 如果  $A_{s \max}^i = A_{s \max}^{i-1}, k = k + 1, m = m + 1$ , 否则  $k = 0, m = 0$ ;

(7) 如果  $S$  个个体都相同或  $k = G_e$ , 使变异概率  $P_m = P_{\text{mmax}}$ , 令  $k = 0$ ;

(8) 如果  $m = G_c$ , 那么结束算法, 否则转至步骤 3。

### 4 实验结果

例一 用频率抽样法设计一低通滤波器, 技术指标同上节。取频率抽样点数  $N = 40$ , 则  $H_r(k) = [1, 1, 1, 1, 1, T_1, 0, \dots, 0, T_1, 1, 1, 1, 1, 1]$ , (中间为 29 个 0)。对  $T_1$  进行编码, 令估计参数为长度  $L = 16$  的二进制字符串  $d_1 d_2 \dots d_{16}$ , 因为  $0 < T_1 < 1$ , 所以  $T_1 = \sum_{i=1}^{16} d_i 2^{-i}$ 。设群体规模  $S = 100, P_c = 0.9, P_{\text{mnor}} = 0.01, P_{\text{mmax}} = 0.9, G_e = 5, G_c = 20$ , 在 PII300, 64M RAM 微机运行 MATLAB 语言编制的 GA 程序, 反复运行多次, 最后结果见表 1, 表中  $A_s$  是实际最小阻带衰减,  $R_p$  是最大实际通带波动, 两者均为典型值, 程序平均运行时间为 34 秒。图 1(a), (b) 分别给出了查表法 ( $T_1 = 0.39$ ) 和采用 GA ( $T_1 = 0.3915863$ ) 得到的滤波器幅度响应曲线。从表 1 和图 1 可看出, 采用 GA 的效果要优于查表法。

表 1 GA 与查表法所得数据之比较

例	方法	$T_1$	$T_2$	$A_s(\text{dB})$	$R_p(\text{dB})$
一	查表	0.390000		42.9862	0.6136
	GA	0.391586		43.1705	0.6101
二	查表	0.109021	0.594175	59.8726	0.2882
	GA	0.117462	0.608444	62.3767	0.2634

例二 用频率抽样法设计一 FIR 带通滤波器, 技术指标为: 低阻带边缘频率  $f_{1s} = 0.2$ , 低通带边缘频率  $f_{1p} = 0.35$ , 高通带边缘频率  $f_{2p} = 0.65$ , 高阻带边缘频率  $f_{2s} = 0.8$ , 最大通带波动  $r_p = 0.3\text{dB}$ , 最小阻带衰减  $a_s = 60\text{dB}$ 。

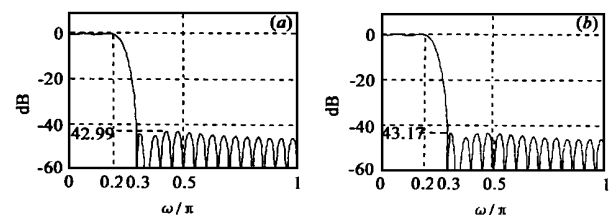


图 1 FIR 低通滤波器幅度响应 (dB) 曲线。(a) 查表法,  $T_1 = 0.3900$ ; (b) GA 法,  $T_1 = 0.3915863$

选择  $N = 40$ , 这样在过渡带中有两个样本。设低过渡带中的频率样本值为  $T_1$  和  $T_2$ , 则由式(3), 幅度响应中的样本为:

$H_r(k) = [0, 0, 0, 0, 0, T_1, T_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, T_2, T_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, T_1, T_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, T_2, T_1, 0, 0, 0, 0, 0]$ . 对  $T_1$  和  $T_2$  进行编码, 令估计参数为长度  $L = 32$  的二进制字符串  $d_1 d_2 \dots d_{32}$ , 因为  $0 < T_1 < 1, 0 < T_2 < 1$ , 所以  $T_1 = \sum_{i=1}^{16} d_i 2^{-i}, T_2 = \sum_{i=1}^{16} d_{i+16} 2^{-i}$ . 设群体规模  $S = 100, P_c = 0.9, P_{\text{mut}} = 0.01, P_{\text{max}} = 0.9, G_c = 5, G_r = 20$ , 反复运行多次 GA 程序, 最后结果见表 1, 表中  $A_s$  和  $R_p$  为典型值, 程序平均运行时间为 61 秒, 这是因为本例中的估计参数的编码长度是例一的 2 倍, 算法中需要较多的译码时间.

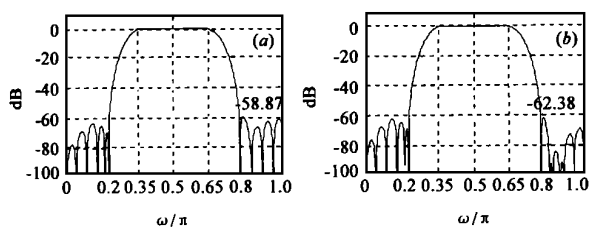


图 2 FIR 带通滤波器幅度响应 (dB) 曲线.

(a) 查表法  $T_1 = 0.109021, T_2 = 0.59417456$ ;

(b) GA 法  $T_1 = 0.1174622, T_2 = 0.6084442$

图 2 (a), (b) 分别给出了查表法 ( $T_1 = 0.109021, T_2 = 0.59417456$ ) 和采用 GA ( $T_1 = 0.1174622, T_2 = 0.6084442$ ) 得到的滤波器幅度响应曲线. 从表 1 和图 2 可看出, 采用 GA 的效果要明显优于查表法, 严格地讲, 查表法所得结果没有满足设计要求, 因实际最小阻带衰减  $A_s < 60$ . 图 3 给出了 GA 的收敛速度, 横坐标表示 GA 的代数  $gen$ , 实线是例一的收敛速度, 虚线是例二的收敛速度. 由于算法中保留最好的个体至下一代, 确保了最小阻带衰减 (负值) 是一单调的减小过程, 由图看到 GA 的收敛速度是相当快的.

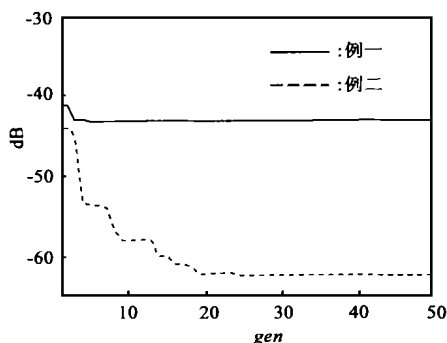


图 3 GA 的收敛速度

## 5 结束语

遗传算法可以发现全局最优解, 而无陷入局部解的嫌疑, 是参数估计、优化的有力工具. 本文在 FIR 滤波器设计——频率抽样法中使用了遗传算法, 效果令人满意. 推而广之, 遗传算法也可应用于其他参数估计、优化的场合. 自然界生物进化过程是非常复杂、变化无穷的过程, 而遗传算法正是模仿生物进化的算法, 所以遗传算法的改进也是无止境的. 对不同的问题, 应探索遗传算法的多种改进方法, 求得问题的最优解. 但对遗传算法的改进, 其收敛性能否得到保证, 这是值得探讨的问题.

## 参考文献:

- [1] 陈怀琛, 王朝英, 高西全等译. 数字信号处理及其 MATLAB 实现 [M]. 电子工业出版社, 1998: 208 - 254.
- [2] D. E. Goldberg. Genetic Algorithms: in search optimization & machine learning [M]. Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1989.
- [3] D. M. Eter, M. J. Hicks, and K. H. Cho. Recursive adaptive filter design using an adaptive genetic algorithm [A]. In Proc. IEEE Int. Conf. ASSP [C], 1982: 635 - 638.
- [4] Leehter Yao and W. A. Sethares. Nonlinear parameter estimation via the genetic algorithm [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, April 1994, 42(4): 927 - 935.
- [5] 张讲社, 徐宗本, 梁怡. 整体退火遗传算法及其收敛充要条件 [J]. 中国科学 (E 辑), 1997, 27(2): 154 - 164.

## 作者简介:



陈小平 1965 年出生, 1998 年于南京航空航天大学获硕士学位, 现为该校测试计量技术及仪器专业博士研究生. 研究领域为进化算法、信号处理. 曾获一项江苏省科技进步二等奖. 已发表论文数篇.



于盛林 1941 年出生, 1964 年毕业于南京航空学院, 现为南京航空航天大学测试工程系主任, 教授, 博士生导师, 研究领域为信号处理, 混沌分形理论及应用. 曾获多项省部级科技进步奖.