

一类新子波的稳定性和正交条件研究

袁 晓^{1,2}, 何小海¹, 陶德元¹

(1. 四川大学电子信息学院, 成都 610064; 2. 空军工程大学航空电子工程系, 西安 710038)

摘 要: 从子波分析的基函数(即母波)构造条件入手, 提出本文研究目的. 文中首先讨论子波分析数值计算稳定性一般问题, 引进稳定度概念来刻画母波数值反演的稳定程度; 接着研究一类品质因素可控的复解析母波——Y-母波的稳定度; 最后分析 Y-母波的正交条件. 理论分析和数值计算结果表明: 母波的稳定度与其频率选择性是一对矛盾, 但选择适当的尺度伸缩因子可以适当缓解这一矛盾; 由于品质因素的限制, 二进 Y-母波的高稳定度区域是十分狭窄的; 对于(复) Y-母波, 不存在正交的整数平移基, 仅有 Y-母波的实部(即实 Y-母波)存在正交的整数平移基.

关键词: Y-母波; 稳定度; 二进尺度; 品质因数; 正交条件

中图分类号: TN941 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 10-0056-04

On the Stability and Orthogonal Conditions of a Novel Class of Wavelet

YUAN Xiao^{1,2}, HE Xiao-hai¹, TAO De-yuan¹

(1. College of Electronic Information, Sichuan Univ., Chengdu 610064, China;

2. Dept. of Aeronautical Electronic Eng, The Air Force Univ. of Eng., Xi an 710038, China)

Abstract: Starting with the construction conditions of basic wavelet (or mother wavelet), three topics are studied in this paper. Firstly, the numerical computation stability of dyadic wavelets is discussed with a new concept—the stableness, which enables us to measure the stabilizing ability in numerical inverse of wavelet; And then the stableness of a novel class of complex analytic wavelet—Y-wavelet (whose quality factor is changeable) is analyzed. Finally, we investigate the orthogonal condition of Y-wavelet. Theoretical analysis and results of numerical simulation show that: The stableness and frequency selectivity of wavelets contradict each other in wavelet analysis, but this problem can be mitigated to some extent by changing the scaling dilation parameter; The stability region of dyadic Y-wavelet class is very narrow and limited by larger quality factor; It is impossible to construct an integral translation orthogonal basis by using Y-wavelets, except that the real Y-wavelet might exist on some integral translation orthogonal basis.

Key words: Y-wavelet; stableness; dyadic scale; quality factor; orthogonal condition

1 引言

实信号的复解析分析处理始终是一个引人入胜的课题^[1~4]. 复解析子波变换(Complex Analytic Wavelet Transform CAWT)在保留解析分析精髓同时, 又融进了子波分析的优势^[3,4,6,7], 因而它在非平稳信号^[6,7,13]、光学信息^[5]等分析和处理中得到逐步深入细致的理论研究和广泛应用. CAWT方法的一个关键问题在于如何构造适当的复解析母波(即基子波)以满足不同性能信号的解析分析. 文[7, 10]中在综合 Bubble(或墨西哥帽)子波^[8,9]和基于超高斯谱的子波构造^[7,15]基础上, 提出一类品质因数 Q 值可控且满足零相位条件的母波, 简称为 Y-母波, 表记为 $Y(t)$, 它在频域的表达方式为^[7,10]

$$\hat{Y}(\omega) = \begin{cases} K^{-1} \exp(-|\omega|/m), & \geq 0 \\ 0, & < 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 K 为能量归一因子, k 为震荡控制参变量, ω 为形状控制参变量, m 为超高斯谱阶数^[7,15]. 在时域 Y-母波也具有简明的解析表达式^[10]. Y-母波的时频基本性能: 峰值角频率 ω_p 、3dB 带宽 W 和 Q 值等由其三个参变量 k 、 ω 和 m 完全确定; 调整 k 、 ω 和 m 就可得到许许多多具有不同性能的解析母波, 并且某些经典的母波可归纳于 Y-母波类之中, 或者用 Y-母波类中的某一特定元素逼近^[10]; 在实信号解析分析和处理中 Y-母波具有良好表现. 因此进一步探讨 Y-母波的性质和特点在理论上很有意义, 在应用上十分必要.

2 问题的提出

对于任一给定的母波 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 作为非平稳信号的子波分析基函数, 应当逐步具备如下三个条件^[11~13]:

C1 完全重构条件或容许条件;

C2 稳定性条件

$$0 < A \leq \sum_{j=0}^{\infty} | \wedge(2^{-j}) |^2 \leq B < \infty, a. e. \quad (2)$$

C3 子波族 $\{ \phi_{k,j} \}$ 的线性独立性条件即 Riesz 基或线性独立基条件,它实际上是对偶子波的唯一性条件.

在子波分析中,人们经常对 $\phi(t)$ 的整数平移基的正交性感兴趣,因此 C3 可进一步限制为

C3 整数平移基 $\{ \phi(t-k) : k \in \mathbb{Z} \}$ 的正交性条件:

$$\langle \phi(t-k), \phi(t-l) \rangle = \delta_{k,l}, k, l \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

上述条件对于母波 $\phi(t)$ 的限制是逐步加强的.显然 ϕ -母波 $\phi(t)$ 满足 C1;根据文[7,9]的研究结果得知,当 $k=m=2$ 时, ϕ -母波 $\phi(t)$ 的实部(也即 Bubble 母波)存在式(3)意义下的正交基,从而引出如下问题:

q1 对于给定的母波 $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$,怎样度量其稳定性能以及稳定性能与其它性能的关系;

q2 ϕ -母波 $\phi(t)$ 的控制参变量 k 、和 m 对其稳定性能的控制作用问题;

q3 能否得到式(3)意义下的正交 ϕ -母波 $\phi(t)$.

3 子波稳定性问题:一般考虑

“稳定性条件”公式(2)是为了使信号重构时保证数值上稳定的手段,它对于 Mallat 和 Hwang 引入的二进制波反演公式是至关重要的^[11~13]. A/B 越接近于 1,其稳定性越强,当 $A/B=1$ 时,则称为最稳定条件.因此讨论母波 ϕ 的稳定性问题首先必须求解稳定性常数 A 和 B .

定义 1 母波 $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的稳定性函数定义为

$$S(A/B) := \sum_{j=0}^{\infty} | \wedge(2^{-j}) |^2 \quad (4)$$

显然 关于变量 ω 是 2 倍频程周期的,即 $S(2\omega) = S(\omega)$,从而可简化求解稳定性常数 A 和 B 时的搜索范围,并有

$$A = \min_{\omega} S(\omega) = \min_{\omega \in [0, 0.5]} S(\omega) \quad (5)$$

$$B = \max_{\omega} S(\omega) = \max_{\omega \in [0, 0.5]} S(\omega)$$

式中 ω_0 为 $\wedge(\omega)$ 的中心角频率或其它任一不为零的常数.

稳定性常数 A 和 B 是抽样速率 $b_0=1$ 时的框架界^[12],它的大小直接决定着信号重构的精度以及算法的收敛性质. Daubechies 在文[14]中引入两个指标:紧凑度 (Snugness) $S = [(B/A) - 1]^{-1} = (A/B) / [1 - A/B]$ 和收敛因子 (Convergence factor) $r = [(B/A) - 1] / [(B/A) + 1]$ 用来刻画一个(子波)框

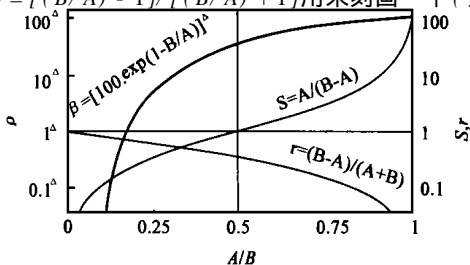


图 1 紧凑度 $S(A/B)$ 、收敛因子 $r(A/B)$ 和稳定度 A/B 曲线

架的性质.这两个指标用来表征母波 ϕ 的稳定性性能也应当是有效的,但是对于 ϕ 的稳定性程度的度量就不是很自然和直观了,因此本文引入如下稳定度概念.

定义 2 母波 $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的稳定性程度用稳定度 Q 来刻画,单位为“度”,用上标符号“ $+$ ”表示:

$$Q^+ = (100 \exp(-1/S)) = (100 \exp(1 - B/A)) \quad (6)$$

当 $0 < A = B < \infty$ 时, $Q^+ = 100$,表示最稳定;当 $A \rightarrow 0$ 且 $B < \infty$ 时 $Q^+ \rightarrow 0$,表示不稳定. $S(A/B)$ 、 $r(A/B)$ 和 A/B 如图 1 所示.

由式(6)墨西哥帽母波 $\phi_{hat}(t) = (2/\sqrt{3})^{-1/4} (1-t^2) \exp(-t^2/2)$ 的稳定度 $Q^+ = 92$, $\omega_0 = 1$ 时 Morlet 母波 $\phi_M(t) = \exp(i\omega_0 t) - \exp(-\omega_0^2 t^2/2)$ 的稳定度 $Q^+ = 47.46$.

众所周知,子波变换时-频窗口自适应特性相当于恒定品质因数 Q 值滤波技术,子波相当于恒 Q 带通滤波器, Q 值是母波的一个基本性能指标. Q 值越高频选性能越好,反之则越差.很不幸的是对于子波分析, Q 值和稳定度二者不能同时达到较高.设母波功率谱 $| \wedge(\omega) |^2$ 为如图 2(a) 所示三角形形状,峰值角频率为 ω_p ,3dB 带宽为 W ,则品质因数 $Q = \omega_p / W \geq 1$, $A(Q)$ 、 $B(Q)$ 和 $Q(Q)$ 曲线分别如图 2(b) 和 2(c) 所示.分析该图可定性得出:品质因数越大,稳定度则越低,也就是说母波的频选特性和稳定性是一对矛盾.

4 ϕ -子波的稳定性条件分析

从文[10]中得知,对于 ϕ -母波 $\phi(t)$,其 Q 值由参变量 k 和 m 完全确定,而与参变量 ω 无关: $Q = Q(k, m)$, 并且 k 和 m 对 Q 值几乎具有同等的控制作用,既有 $Q(k, m) = Q(m, k)$. 同样,关于 ϕ -母波的稳定性问题有如下定理.

定理 3 由式(1)定义的 ϕ -母波 $\phi(t)$,其稳定度 Q^+ 与形状参变量 ω 无关,完全由其振荡参变量 k 和阶数 m 所确定:

$$Q^+ = Q^+(k, m) \quad (7)$$

证明 从定义 2 知,稳定度 Q^+ 仅与稳定性常数 A 和 B 的比值 A/B 有关.对于 ϕ -母波有

$$\frac{A}{B} = \frac{\min_{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} | K^{-1}(2^{-j}) |^k \exp(-|2^{-j}\omega|/m)|^2}{\max_{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} | K^{-1}(2^{-j}) |^k \exp(-|2^{-j}\omega|/m)|^2}$$

$$= \frac{\min_{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} | (2^{-j}) |^k \exp(-(2^{-j})^m)|^2}{\max_{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} | (2^{-j}) |^k \exp(-(2^{-j})^m)|^2}$$

可见 A/B 由 k 和 m 确定,而与 ω 无关.证毕.

根据定理 3 可推知,(复)Bubble 母波 ($k=m=2, \omega > 0$) 与 (复)Mexican 帽母波 ($k=m=2, \omega = 1$) 具有相同的稳定度.

ϕ -母波的稳定度 $Q^+(k, m)$ 曲面如图 3(a) 所示,稳定度和品质因数 Q 值在平面 (m, k) 上的等高线如图 3(b) 所示.分析 Q 值在平面 (m, k) 上的等高线,当 $0.5 < m < 10$ 时,有

$$km \approx 4Q^2 \quad (8)$$

从图 3(b) 看出,满足一定稳定度要求的 k 和 m 取值范围是很小的,稳定度 Q^+ 越高, Q 值越小,这充分说明子波变换的稳定性和频选性是一对矛盾.分析图 3 可得出:

若要求 ≥ 10 ,则 $Q \leq 2.0$,且 $km < 16$;
 若要求 ≥ 50 ,则 $Q \leq 1.5$,且 $km < 9$;
 若要求 ≥ 90 ,则 $Q \leq 1.0$,且 $km < 4$.

5 Y-子波的正交性分析

正交条件式(3)在频域等价

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ij\omega} | \wedge_Y(\omega) |^2 d\omega = \begin{cases} 1, j=0 \\ 0, j=1,2,3 \dots \end{cases} \quad (9)$$

对于 Y-母波,定义函数

$$E(j; \omega, k, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ij\omega} | \wedge_Y(\omega) |^2 d\omega = \frac{1}{((2k+1)/m)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[\frac{2n+2k+1}{m} - 1 \right] \left[\frac{j}{2^{1/m}} \right]^{2n} \right. \\ & \left. - i \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{2n+2k+2}{m} - 1 \right] \left[\frac{j}{2^{1/m}} \right]^{2n+1} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$= E_{Re}(j; \omega, k, m) + i E_{Im}(j; \omega, k, m) \quad (10)$$

显然有 $E(0; \omega, k, m) = 1$,因此使 Y-母波正交的充要条件为

$$\begin{cases} E_{Re}(j; \omega, k, m) = 0 \\ E_{Im}(j; \omega, k, m) = 0 \end{cases} \quad j=1,2,3 \quad (11)$$

直接从式(10)和(11)讨论 Y-母波正交问题较难.因此从分析 $k=m=2.0$ 时复 Bubble 母波的正交条件入手. $E_{Re}(j; \omega, 2,2)$ 和 $E_{Im}(j; \omega, 2,2)$ 曲线如图 4(a) 所示,可见除 $\omega \rightarrow 0$ 以外,无论 j 取何值,均不能满足式(11),这说明不存在式(3)意义下的正交复解析 Bubble 母波.从理论上讲,函数 $E(j; \omega, k, m)$ 的实部 E_{Re} 和虚部 E_{Im} 关于变量 ω 是互为 Hilbert 变换的,虚部是实部的相位在 $\omega < 0$ 时超前 $\pi/2$, $\omega > 0$ 时滞后 $\pi/2$,实部 E_{Re}

关于的零点决不可能又是虚部 E_{Im} 的零点,即若存在 $0 < \omega < \infty$,使 $E_{Re}(j; \omega, k, m) = 0$,则 $E_{Im}(j; \omega, k, m) \neq 0$.

定理 4 对于 Y-母波的参变量 ω, k 和 m 来说,除 $\omega \rightarrow 0$ 以外,式(12)不成立,必有

$$E(j; \omega, k, m) \neq 0 \quad \omega > 0, k, m < \infty \quad (12)$$

定理 4 说明不可能存在式(3)意义下的正交 Y-母波 $\wedge_Y(t)$,但其实部 $Re\{\wedge_Y(t)\}$ (即实 Y-母波 $\wedge_{Re}(t)$)却存在式(3)意义下的正交情形,即存在 $\omega < \infty$ 满足正交条件

$$E_{Re}(j; \omega, k, m) = 0 \quad (13)$$

例如从图 4(a) 看出当 $k=m=2.0$ 时, $\omega = 1.48624$,这对应着正交的(实)Bubble 母波^[7-9].

引进新函数 $F(\omega, k, m) = | E_{Re}(j; \omega, k, m) |$,则式(13)可等价

$$F(\omega, k, m) = 0 \quad (14)$$

在一定稳定度 ρ 和 Q 值条件下,选定 k 和 m ,就可由上式求得 ω .图 4(a) 中也画出了 $F(\omega, 2,2)$ 曲线,该曲线在正实轴上除 $\omega \rightarrow 0$ 以外仅有一个零点 $\omega = 1.48624$ 在这一点及其小邻域内可得到正交的及其几乎正交的实 Y-母波.

当 $k=m$ 时,取 $2 \leq k=m \leq 4$,则 $90^\circ > \rho > 10^\circ, 1 < Q < 2$,此时 $F(\omega, k, m) |_{k=m}$ 曲面如图 4(b) 所示.从该图看出,随着 $k=m$ 的增加, F 表面上的极小值曲线也随之增多.图 4(c) 中画出了 $k=m=2,3$ 和 4 时的 $F(\omega)$ 曲线,从该图看出,当 $k=m=2$ 时, $F(\omega)$ 曲线只有一个极小值点,也即零点 ω ;当 $k=m=3$ 时, $F(\omega)$ 曲线至少有三个极小值点,当 $k=m=4$ 时, $F(\omega)$ 曲线至少有五个极小值点,它们分别在 $\omega = l + \omega_0$,

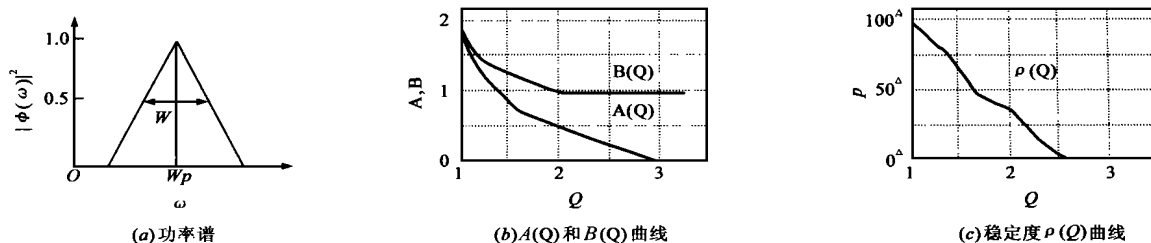


图 2 稳定度 ρ 与品质因素 Q

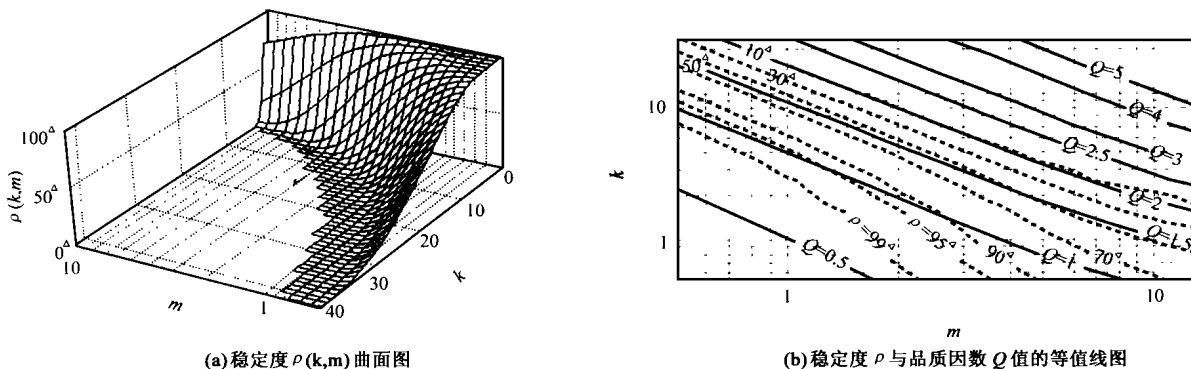


图 3 Y-母波的稳定性能分析

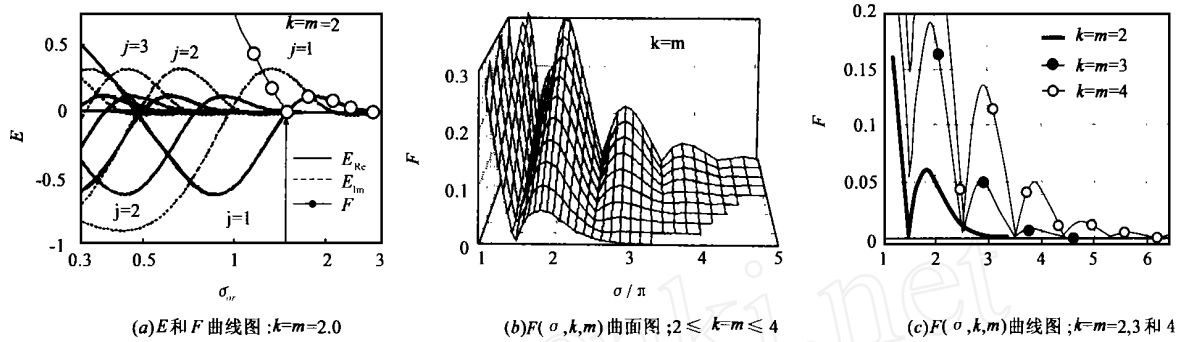


图 4 Y-母波的正交条件分析

$l=0, 1, 2, \dots$ 附近, 其 F 值均很小, 在这些点及其小邻域内就有可能得到正交的及其几乎正交的实 Y -母波 $y_{Re}(t)$.

对于其它 k 和 m 值的实 Y -母波, 采用上述方法同样可得满足正交条件的 σ 值.

6 结束语

子波分析数据重构的稳定性与其频域选择性是一对矛盾: 增加母波的品质因素 Q 值必定导致稳定度的下降, 而降低 Q 值以获得高的稳定度, 则必然会增加尺度间的频率混迭, 引起尺度间数据冗余度的增高.

对于 Y -母波来说, 其稳定度和 Q 值仅取决于参变量 k 和 m . 如果要求 $Q > 50$ ($Q < 1.5$), $Q > 1$ ($Q < 95$). 则 k 和 m 取值的范围为

$$4 < km < 9, 1 < m < 10 \quad (15)$$

本文讨论的稳定性问题是关于二进子波的情形, 即式(2)子中的尺度因子 $s=2$. 如果放宽二进尺度的限制, 取 $s > 1$, 则可将式(4)和式(5)定义的稳定性函数和稳定性常数推广成

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(s, \sigma) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha}(s^{-j} \sigma)|^2 \\ \tilde{A}(s) = \min_R \tilde{\alpha}(s, \sigma), \tilde{B}(s) = \max_R \tilde{\alpha}(s, \sigma) \end{cases} \quad (16)$$

由此得到的稳定度 $\tilde{\alpha}$ 是尺度因子 s 的函数, 即

$$\tilde{\alpha}(s) = [100 \exp(1 - \tilde{B}(s)/\tilde{A}(s))] \quad (17)$$

s 越接近于 1, 则在不降低 Q 值的前提下, 可提高稳定度. 例如当 $s=1.5$ 时, 对于 $\sigma=1$ 的 Morlet 母波, $\tilde{\alpha}=95.8$; 对于 Y -母波, 就可扩展 k 和 m 取值的范围到高 Q 区域.

分析 Y -母波的正交条件涉及到参变量 k 、 m 和 σ , 讨论起来较复杂. 本文从分析特殊的复 Bubble 母波的正交条件入手, 通过理论分析和精确的数值计算得出: 不可能存在式(3)意义下的正交(复) Y -母波 $y(t)$, 但其实部 $\text{Re}\{y(t)\}$ (即实 Y -母波 $Y_{Re}(t)$) 却存在式(3)意义下的正交情形.

对于(实的和复的) Y -母波的正交条件也可通过其 Riesz 界来判断和讨论^[9, 12], 限于篇幅, 本文不再详述.

参考文献:

[1] Poletti M. A. The homomorphic analytic signal [J]. IEEE Trans. SP, 1997, 45(8): 1943 - 1953.

[2] L. 科恩著, 白居宪译. 时-频分析: 理论和应用 [M]. 西安交大出版社, 1998.

[3] Riou O., Vetterli M. Wavelets and signal processing [J]. IEEE SP Mag., Oct. 1991: 14 - 38.

[4] Delprat N., Escudi ÉB., Guillemain P., et al. Asymptotic wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaneous frequencies [J]. IEEE Trans. IT, 1992, 38(2): 644 - 664.

[5] 倪明, 蒋志平, 陆启生. 一种光学子波变换的改进 [J]. 中国激光, 1997, 24A(3): 231 - 236.

[6] 袁晓, 虞厥邦. 复解析小波变换与语音信号包络提取和分析 [J]. 电子学报, 1999, 27(5): 142 - 144.

[7] 袁晓. 子波算法、构造、解析子波变换及其在信号处理中的应用 [D]. 博士学位论文. 成都: 电子科技大学, 1998, 5.

[8] 袁晓, 虞厥邦. 基于 Bubble 函数的子波构造 [J]. 信号处理, 1999, 15(1): 37 - 41.

[9] 袁晓, 虞厥邦. Bubble 小波的正交条件研究 [J]. 电子科技大学学报, 1998, 27(1): 25 - 28.

[10] 袁晓. 一类新的复解析子波构造及其性质研究. 电子学报, 2000, 28(4): 123 - 126.

[11] Daubechies I. Ten lectures on wavelets [Z]. Philadelphia: SIAM, 1992.

[12] 崔锦泰著, 程正兴译. 小波分析引论 [M]. 西安交通大学出版社, 1995.

[13] 张贤达, 保铮著. 非平稳信号分析和处理 [M]. 国防工业出版社, 1998.

[14] Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis [J]. IEEE Trans. IT, 1990, 36(5): 961 - 1005.

[15] 袁晓. 超高斯谱函数与子波构造 [J]. 信号处理, 1999, 15(增刊 CCSP 99): 65 - 69.

作者简介:



袁 晓 四川中江人. 1985 年、1991 年和 1998 年分别获得四川大学理学学士、理学硕士和电子科技大学工学博士学位. 现任教于空军工程大学. 感兴趣的领域有电路与系统、神经网络、智能计算、语音信号分析和处理和子波理论与应用等. 目前主要研究子波的构造与性质、快速算法与应用. 已发表论文二十余篇.

何小海 教授, 四川大学电子信息学院图像所副所长.

陶德元 教授, 四川大学电子信息学院图像所所长.