

# 一般的 9-7 小波滤波器及其图像压缩性能研究

王国秋<sup>1</sup>,袁卫卫<sup>2</sup>

(1. 湖南师范大学计算机系,长沙 410006;2. 国防科技大学系统工程与数学系,长沙 410073)

**摘 要:** 通过构造一个包含 Cohen 和 Daubechies 等人的著名 9-7 小波滤波器(CDF97)的超小波滤波器族,获得了新的 9-7 小波滤波器,它们不仅有很好的压缩性能,也有很好的计算性能,有利于 ASIC 的设计. 试验结果表明,新的小波滤波器几乎具有 CDF97 的客观压缩性能,并且能保留更多的图像细节. 因此,在标准化图像压缩系统中,本文的滤波器是 CDF97 理想的替代者.

**关键词:** 超小波; 滤波器; 循环矩阵; 图像压缩

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0130-03

## Generic 9-7-tap Wavelets Filters and Their Performances Studies on Image Compression

WANG Guo-qiu<sup>1</sup>, YUAN Wei-wei<sup>2</sup>

(1. Dept. of Computer, Hunan Normal University, Changsha 410006, China;

2. Dept. of System Engineering & Math, National University of Defense Tech, Changsha 410073, China)

**Abstract:** This paper constructs a class of 9-7-tap wavelets filters, in which the famous 9-7-tap wavelet (CDF97) of Cohen and Daubechies is contained. New wavelets filters obtained from the class not only have excellent compression performances but also easy computation and are very suitable for design of ASIC. The test results for compression performances have shown that new filters are good almost as CDF97 under PSNR and can save more details. Therefore, the filters constructed in this paper are ideal replacement of CDF97 in standardized image compression systems based on wavelets.

**Key words:** hyper wavelets; filters; circular matrix; image compression

### 1 引言

小波理论在图像压缩中已有成功的应用. 在小波压缩系统中,有两个因素是至关重要的:一是小波滤波器,二是压缩编码算法. 在滤波器的选择上, Cohen 和 Daubechies 等人的 9-7 基(CDF97)<sup>[1]</sup>是许多研究者的首选,这组双正交小波基不仅具有好的数学性质,也有良好的压缩性能. 与小波变换相配套的零树编码算法也以它的高效而写进了 MPEG4. 这些都标志着小波理论在图像压缩中的应用已进入成熟期,因而已有不少小波编码芯片问世.

尽管如此,小波理论及相应的压缩算法依旧在进一步发展,不仅不断有新的小波滤波器问世<sup>[2]</sup>,编码算法也在不断改进<sup>[3]</sup>. 文[2]提出了离散超小波(Hyper-wavelets)的概念,在该概念下,小波滤波器的构造变得更容易,并且能构造带有参数的滤波器族. 文[9~10]讨论了多小波在图像压缩中的应用,其研究结果很有意义.

许多研究表明, CDF97 压缩性能确实优良<sup>[4]</sup>. 美中不足的是,它的浮点系数加大了有关 ASIC 设计的难度. 当然,人们可以采用“近似整数化”的方法来解决这一问题. 但当 ASIC 中的字长较短(比如,短于 16 位)时,这种近似会带来不可忽略的误差. 所以,分母是 2 的幂的有理数滤波器也被广泛采用,它

们能简化 ASIC 的设计. 可惜的是,目前流行的这类滤波器的压缩性能离 CDF97 的还有一定的距离,并且,高通和低通滤波器的长度相差较大(如 9-3 型, 12-4 型),不利于算法的并行处理.

本文将在离散超小波的概念下,构造一个包含了 CDF97 的小波滤波器族,并从中选出既有好的压缩性能又有好的计算性能的小波滤波器.

### 2 一般的 9-7 小波滤波器的构造

沿用文[2]的一些基本术语,并考虑双正交情形. 假定分解端的高通滤波器是  $g_i = \{d, c, b, a, b, c, d\}$ , 它是对称的, 其支撑集是  $[-2, 4]$ . 如果要求它有 4 阶的消失矩 (Vanishing moments)<sup>[2]</sup>, 则它应该满足方程组:

$$\begin{cases} 2d + 2c + 2d + a = 0 \\ -2d - b + a + 2b + 3c + 4d = 0 \\ 4d + c + a + 4b + 9c + 16d = 0 \\ -8d - c + a + 8b + 27c + 64d = 0 \end{cases} \quad (1)$$

它们的解是:

$$\begin{cases} a = 6c + 16d \\ b = -4c - 9d \end{cases} \quad (2)$$

考虑所谓的“正规型(Normal Form)”<sup>[2]</sup>,  $\tilde{h}_i = (-1)^i g_{1-i}$ , 有

$$c = -2d + 1/16 \quad (3)$$

所以

$$g_i = \{ m/16, -(2m-1)/16, -(m+4)/16, (2m+3)/8, \\ -(m+4)/16, -(2m-1)/16, m/16 \} \quad (4)$$

这里  $m = 16d$ .

设其对偶  $\tilde{g}_i = \{ x, w, v, u, t, u, v, w, x \}$ , 它也是对称的, 其支撑集是  $[-3, 5]$ . 根据文[2]中的定理 2, 滤波器对构成的极小矩阵(Minimal Matrix)<sup>[2]</sup>的阶是 14. 所以, 需要构造一个 14 阶的 2-循环矩阵(2-circular Matrix)<sup>[2]</sup>. 基于文[2]的算法, 可以获得一个线性方程组

$$AX = L \quad (5)$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} 2m+3 & -m-4 & -2m+1 & m & 0 & \\ -2m+1 & -4 & 4m+6 & -m-4 & -2m+1 & \\ 0 & m & -2m+1 & -m-4 & 4m+6 & \\ 0 & 0 & 0 & m & -2m+1 & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{-T}, \quad X = \begin{bmatrix} i \\ u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix}^{-T}$$

式(5)的解是:

$$\tilde{g}_i = \left\{ \frac{1}{32} \frac{8m^2 - 6m + 3}{m}, \frac{1}{32} \frac{16m^3 - 20m^2 + 12m - 3}{2m+1}, \right. \\ \left. \frac{1}{8} \frac{2m-3}{2m+1}, \frac{1}{32} \frac{16m^3 - 20m^2 + 28m + 5}{2m+1}, \right. \\ \left. - \frac{1}{16} \frac{8m^3 - 6m^2 - 5m - 20}{2m+1}, \dots \right\} \quad (6)$$

这里只列出了一半系数, 另一半是对称的. 可以验证, 对一切  $m$ , 式(6)至少有 2 阶消失矩. 这样, 按照  $\tilde{h}_i = (-1)^i g_{1-i}$  和  $h_i = (-1)^i \tilde{g}_{1-i}$ , 得到一组低通滤波器如下:

$$h_i = \left\{ \frac{1}{32} \frac{8m^2 - 6m + 3}{m}, \frac{1}{32} \frac{16m^3 - 20m^2 + 12m - 3}{2m+1}, \right. \\ \left. \frac{1}{8} \frac{2m-3}{2m+1}, \frac{1}{32} \frac{16m^3 - 20m^2 + 28m + 5}{2m+1}, \right. \\ \left. - \frac{1}{16} \frac{8m^3 - 6m^2 - 5m - 20}{2m+1}, \dots \right\} \quad (7)$$

$$\tilde{h}_i = \left\{ -\frac{m}{16}, -\frac{2m-1}{16}, \frac{m+4}{16}, \frac{2m+3}{8}, \dots \right\} \quad (8)$$

它们都是对称的, 所以只列出了一半系数. 这样, 我们得到了一个双正交(超)小波滤波器族.

### 3 关于滤波器的一些讨论

根据构造过程, 式(4)无条件地有 4 阶消失矩, 式(6)无条件地有 2 阶消失矩. 为了让式(6)也有 4 阶消失矩, 根据消失矩的定义<sup>[2]</sup>, 略加整理, 参数  $m$  应当满足方程:

$$f(m) = 16m^3 - 16m^2 + 10m - 5 = 0 \quad (9)$$

它的唯一的一个近似实数解为  $m = 0.730173$ . 这时,  $m$  确定的就是 CDF97:

$$h_i = \{ 0.0267487, -0.016864, -0.0782234,$$

$$0.266864, 0.602949, \dots \} \quad (10)$$

$$\tilde{h}_i = \{ -0.0456358, -0.0287716, 0.295636, 0.557543, \dots \} \quad (11)$$

这里只列出了一半系数, 另一半是对称的. 其尺度函数和小波函数的图像见图[1].

在小波图像压缩系统中, 分解端和重构端并不要求具有相同的性质. 一般说来, 分解端要求较高的消失矩, 而重构端就没有如此严格的要求. 在这个滤波器族中, 分解端具有 4 阶消失矩, 对于重构端, 2 阶就足够了. 所以, 这里可以放松消失矩条件, 去寻求更合适的滤波器.

容易验证, 方程(9)的唯一实数解位于区间  $[0, 1]$  之间. 取它的中点  $m = 1/2$ , 这时对应一组滤波器(W97-1)为:

$$h_i = \{ 1/64, 0, -1/8, 1/4, 23/32, 1/4, -1/8, 0, 1/64 \} \quad (12)$$

$$\tilde{h}_i = \{ -1/32, 0, 9/32, 1/2, 9/32, 0, -1/32 \} \quad (13)$$

它们的尺度函数和小波函数图像为图 1~4.

从图中可以看出, 它们的数学性质已不如 CDF97 的好了, 但它们的计算性能却极大地改善了. 它们不仅是分母为 2 的幂的有理系数, 而且有两个系数是 0, 实际计算效果相当于一个 7-5 滤波器. 它的高通和低通滤波器的长度相仿, 完成小波变换时甚至只需要作整数加法, 因而适合 IC 的实现.

一个更靠近 CDF97 的滤波器(W97-2)是由区间  $[1/2, 1]$  的中点  $m = 3/4$  所确定的. 这时

$$h_i = \{ 9/32, -3/16, -12/16, 43/16, 190/32, \dots \} / 10 \quad (14)$$

$$\tilde{h}_i = \{ -3/64, -1/32, 19/64, 9/16, \dots \} \quad (15)$$

这里也只列出了一半系数, 因为它们是对称的. 它们的尺度函数和小波函数图像与 CDF97 的非常接近. 显然, 它们的计算性能也比 CDF97 的强.

当取不同的  $m$  时, 可以得到不同的小波滤波器, 这些滤波器有的构成传统意义下的小波, 有的则只能构成一个超小波. 受篇幅所限, 当  $m$  满足什么条件时这些滤波器构成传统小波不是本文讨论的重点. 本文仅讨论新滤波器的压缩性能.

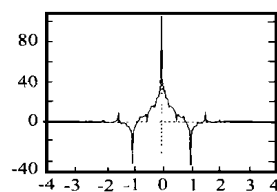


图 1 W97-1 的尺度函数

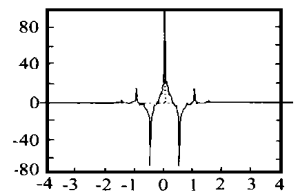


图 2 W97-1 的小波函数

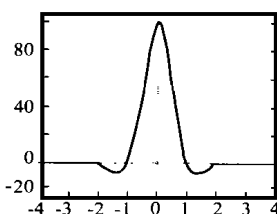


图 3 W97-1 的对偶尺度函数

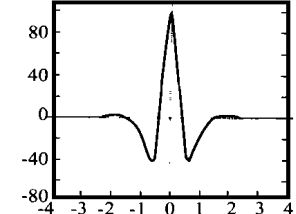


图 4 W97-1 的对偶小波函数

### 4 滤波器的压缩性能研究

我们的目标是为图像压缩系统寻求优秀的小波滤波器.

W97-1 和 W97-2 可以看成是 CDF97 的近似. 为检验它们的压缩性能, 本文采用一种改进的类似于文[3]的零树编码算法, 来对试验图像 Lena 和 Zelda 进行压缩测试. 设定  $bpp = 0.25$ , 即压缩比为 32, 采用 PSNR 来描述客观质量, 得到表 1 如下:

表 1 客观质量对比

	W97-1	W97-2	CDF97
Lena	33.31	33.46	33.47
Zelda	36.91	36.91	36.92

从表 1 中可以看出, 虽然 CDF97 的客观质量依然最优, 但它们的差距已经很小了. 图 5 是 Lena 在 W97-1 下的解压效果图.



图 5 (a) 是 Lena 原图, (b) 是 Lena 在 W97-1 下的解压图

## 5 结束语

在基于块的变换编码系统中, DCT 有快速算法, 这是 DCT 获得成功应用的关键. 本文中的 W97-1 在客观标准上与 CDF97 有细微的差异, 但主观质量较 CDF97 的为强, 况且, 它的计算量较 CDF97 小, 易于 ASIC 的廉价实现. 在 PI350 的微机上用 CDF97 的 W97-1 对 Lena 图像做 4 次分解, 时间分别是 0.15 秒和 0.0222 秒. 这个数量级是有显著差异的. 在 ASIC 的设计中, W97-1 和 CDF97 的设计难度更是有很大的差别. 因此, 在标准化图像压缩系统中, W97-1 是 CDF97 的理想替代者.

本文得到 CDF97 的方法是完全不同于原作者的. 在分解和重构的高通滤波器都有 4 阶消失矩的要求下, 这样的 9-7 滤波器是唯一的. 这有助于我们更好地理解 CDF97 的实质.

同时也看出, 我们构造滤波器的方法很简单, 无论是对数学工作者还是对工程技术人员, 该方法都是可理解和可学习的.

## 参考文献:

- [1] A. Cohen, I. Daubechies and J. C. Feauveau. Biorthogonal bases compactly supported wavelets [J]. *Comm. On Pure and Applied Math*, 1992, 45:485 - 560.
- [2] Guoqiu Wang. Matrix methods of constructing wavelets filters and discrete hyper-wavelet transforms [J]. *Optical Engineering*, 2000, 39(4).
- [3] A. Said and W. A. Pearlman. A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees [J]. *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, 1996, 6(3):243 - 250.
- [4] J. D. Villasenor. Wavelet filter evaluation for image compression [J]. *IEEE Trans. On Image Processing*, 1995, 4(8):1053 - 1059.
- [5] Guoqiu Wang. Multiresolution sampling applications [J]. *Optical Engineering*, 1998, 37(6):1703 - 1707.
- [6] M. Vetterli & C. Herley. Wavelets and filter banks: theory and design [J]. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1992, 40(9):2207 - 2232.
- [7] 袁卫卫, 王国秋. 混合量化与基于小波的图像压缩 [J]. *国防科技大学学报*, 19(4):77 - 80.
- [8] 袁卫卫, 王国秋. 一种快速、有效的量化与基于小波的图像压缩 [J]. *通信与发展技术*, 1997, 3:50 - 52.
- [9] T. Xia and Q. Jiang. Optimal multifilter Banks: design, related symmetric extension transform, and application to image compression [J]. *IEEE Trans. On Signal Processing*, 1999, 47(7):1878 - 1889.
- [10] S. Strela etc. The application of multiwavelet filterbanks to image processing [J]. *IEEE Trans. On Image Processing*, 1999, 8(4):548 - 563.

## 作者简介:

王国秋 1963 年出生. 1988 年在国防科技大学获工学硕士学位, 毕业后留校工作. 从 1999 年起, 在湖南师范大学理学院工作. 获部级科技进步二等奖、全军科技进步一等奖各一项. 先后在国内外发表论文 20 余篇. 主要研究兴趣: 小波理论及其在图像和视频压缩中的应用等. 目前, 承担了“863”计划、国家自然科学基金等项目的研究.