

一般阵列误差情况下空时谱分析的研究

陈志群, 权太范, 赵淑清

(哈尔滨工业大学电子工程技术研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要: 本文研究了一般阵列误差情况下的空时二维鲁棒参数估计方法. 首先本文给出了一般阵列误差模型, 然后基于该模型提出了空时加权子空间拟合(STWSF)算法, 并给出了信号参数, 即信号波达方向和频率的估计的Cramér-Rao下界. 仿真结果进一步验证了算法的有效性.

关键词: 阵列信号处理; 空时谱分析; 参数估计

中图分类号: TN957.52

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2001) 01-0093-03

Spatio-Temporal Spectral Analysis for General Array Error Models

CHEN Zhi-qun, QUAN Tai-fan, ZHAO Shu-qing

(Research Institute of Electronic Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The robust spatio-temporal signal parameter estimation is studied in this paper in the case of general array errors. First a general array error model is given. Then a spatio-temporal weighted subspace fitting (STWSF) method is proposed on the basis of the given model. And the Cramér-Rao lower bounds on signal parameters, i. e. directions of arrival and carrier frequencies are derived. Numerical experiments further verifies the effectiveness of the algorithm.

Key words: array signal processing; spatio-temporal spectral analysis; parameter estimation

1 引言

在阵列信号处理中, 多个非同频率信号源同时进入阵列的情况下, 一般的空间谱分析由于不能在角度估计的同时估计信号的频率, 所以会引入角度估计误差, 甚至导致空间谱估计算法失效. 因此这种情况下通常采用空时谱分析的方法^[1]. 而空时谱分析理论中所有经典的信号参数估计方法均依赖于阵列响应方面的信息. 但是在实际的阵列信号处理系统中, 阵列不可能完全较准. 而且随着天线位置、温度以及周围环境的改变, 阵列响应跟上一次校准时相比会有较大的测量值. 由于在实际系统中一般阵列误差的存在, 这些参数估计方法的性能都不可避免地严重下降. 例如, 在高频雷达中, 阵列误差对阵列信号处理算法的影响是一个实际存在的严重问题^[2].

为了解决此问题, 目前已经提出了许多方法. 其中一类称为自校准方法^[3]. 这种方法把阵列响应看作信号波达方向和描述阵列响应偏离其名义值的扰动参数的函数, 在此模型的基础上同时估计信号参数和未知的扰动参数. 因此这种方法要求信号和扰动参数必须是可以同时辨别的, 在实际中这个条件是不容易满足的. 另一类则应用基于误差的概率模型的统计最优加权来降低阵列处理算法对模型误差的敏感^[4]. 以上这些方法均未涉及到空时二维的情况.

本文首先给出了空时二维情况下的一般阵列误差模型,

然后基于该模型提出了空时加权子空间拟合算法, 并给出了信号参数估计的Cramér-Rao下界, 最后用仿真的方法验证了算法的有效性.

2 一般阵列误差模型

考虑一个有 m 个阵元的天线阵列, 每个阵元输出连接 L 个抽头延迟线, 阵列处理带宽内有 d 个窄带点源, 且 $d < mL$. 在时刻 t , 阵列输出可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{a}(\theta_1, \omega_1, \rho) \dots \mathbf{a}(\theta_d, \omega_d, \rho)] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_d(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t) \\ = \mathbf{A}(\theta, \omega, \rho) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{a}(\theta_i, \omega_i, \rho)$ 称为第 i 个信号的方向频率矢量, θ_i 和 ω_i 分别表示该信号的方向和频率, $i = 1, \dots, d$. $\mathbf{n}$ 维实矢量 ρ 表示方向频率矢量中的扰动参数, 这些参数可以是一般的阵列误差, 如阵元增益、相位、位置误差, 互耦, 以及抽头延迟线的延迟时间误差等. 并假设 ρ 是一个先验已知的高斯随机矢量, 且均值为 ρ_0 , 协方差矩阵为 Ω .

假设信号矢量 $\mathbf{s}(t)$ 是零均值的高斯随机矢量, 并具有二阶统计量

$$E\{\mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(\zeta)\} = \mathbf{P} \delta_{t,\zeta}, E\{\mathbf{s}(t) \mathbf{s}^T(\zeta)\} = 0$$

其中上标 H 和 T 分别表示复共轭转置和转置, $\delta_{\zeta, \zeta}$ 表示 Kronecker 函数.

假设 $n(t)$ 是零均值的高斯白噪声矢量, 并有二阶统计量

$$E\{n(t)n^H(\zeta)\} = \sigma^2 \delta_{\zeta, \zeta}, E\{n(t)n^T(\zeta)\} = 0$$

3 空时加权子空间拟合算法

3.1 最大后验概率估计

基于上述一般阵列误差模型的最大后验概率 (MAP) 估计器的代价函数可以表示为

$$V_{\text{MAP}}(\theta, \omega, \rho) = V_{\text{ML}}(\theta, \omega, \rho) + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^T \Omega^{-1}(\rho - \rho_0) \quad (2)$$

其中 V_{ML} 为负的对数似然函数. 忽略常数项, V_{ML} 可写成

$$V_{\text{ML}}(\theta, \omega, \rho) = N \log |A P A^H + \sigma^2 I| \quad (3)$$

其中 N 为快拍数, $| \cdot |$ 表示矩阵的行列式, P 和 σ^2 分别表示 P 和 σ^2 的最大似然估计, 即

$$P(\theta, \omega, \rho) = A^+(\theta, \omega, \rho) [R - \sigma^2(\theta, \omega, \rho) I] A^+(\theta, \omega, \rho)$$

$$\sigma^2(\theta, \omega, \rho) = \frac{1}{mL - d} \text{Tr} \left\{ \prod_A(\theta, \omega, \rho) R \right\}$$

其中 $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$, $\prod_A = I - A A^+$, $\text{Tr} \{ \cdot \}$ 表示矩阵的迹, R 为阵列输出协方差矩阵的估计, 且

$$R = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t) x^H(t).$$

为了简化计算, 可以进一步用加权子空间拟合代价函数来代替上面的最大似然函数 $V_{\text{ML}}(\theta, \omega, \rho)$, 因为它们在渐近意义上是等价的. 由于基于噪声子空间的加权子空间拟合^[5]在存在相干源的时候不是一致估计, 因此下面将基于信号子空间给出空时加权子空间拟合 (ST-WSF) 方法.

3.2 空时加权子空间拟合方法

阵列输出协方差矩阵 R 及其估计 R 的特征分解为

$$R = E_s \Lambda_s E_s^H + E_n \Lambda_n E_n^H \quad (4)$$

$$R = E_s \Lambda_s E_s^H + E_n \Lambda_n E_n^H$$

其中 E_s 即为信号子空间矩阵, E_s 为其估计. 定义剩余量

$$\varepsilon = \text{vec}(B^H(\theta, \omega) E_s)$$

其中 $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的向量化, $B(\theta, \omega)$ 为 $mL \times (mL - d)$ 阶满秩矩阵, 且 $B^H(\theta, \omega) A(\theta, \omega) = 0$, $B^H(\theta_0, \omega_0) E_s = 0$, θ_0 和 ω_0 表示信号参数 θ 和 ω 的真值.

对于一值的阵列误差模型, 为了得到信号参数的最小方差估计, 令

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^* \end{bmatrix} = \bar{B}^H \bar{e}_s \quad (5)$$

其中 $\bar{B} = \begin{bmatrix} I_d \odot B & 0 \\ 0 & I_d \odot B^* \end{bmatrix}$, $\bar{e}_s = \begin{bmatrix} \text{vec}(E_s) \\ \text{vec}(E_s^*) \end{bmatrix}$, $\odot$ 表示 Kronecker 积, $*$ 表示复共轭.

定义 ST-WSF 代价函数如下

$$V_{\text{ST-WSF}}(\theta, \omega) = \bar{\varepsilon}^H W \bar{\varepsilon} \quad (6)$$

其中 W 为正定的加权矩阵. 那么, 最小化 ST-WSF 代价函数, 就可以得到信号参数 θ, ω 的估计

$$\theta, \omega = \arg \min_{\theta, \omega} V_{\text{ST-WSF}}(\theta, \omega) \quad (7)$$

用 $C_{\bar{\varepsilon}}$ 表示剩余量 $\bar{\varepsilon}$ 的 (渐近的) 二阶矩, 即 $C_{\bar{\varepsilon}} = \lim_{N \rightarrow \infty} N E\{\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^H\}$, 那么使信号参数估计误差的方差最小的最佳加权矩阵为

$$W_{\text{ST-WSF}} = C_{\bar{\varepsilon}}^{-1} \quad (8)$$

将式 (5) 代入式 (6), 并重写 ST-WSF 代价函数如下

$$V_{\text{ST-WSF}}(\theta, \omega) = \bar{e}_s^H \prod_A \bar{W} \prod_A \bar{e}_s \quad (9)$$

其中 $\bar{W} = (\bar{B}^+ W^{-1} \bar{B}^+ + \bar{A} \bar{A}^H)^{-1}$ (10)

其中 $\bar{A} = \begin{bmatrix} I_d \odot A & 0 \\ 0 & I_d \odot A^* \end{bmatrix}$, $\bar{B}^+ W^{-1} \bar{B}^+ = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ 0 & \tilde{L}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}^* \end{bmatrix} (\tilde{G}^H \quad \tilde{G}^T)$, 而 $\tilde{L} = \sigma^2 \Lambda^{-2} \Lambda_s \odot \prod_A$, $\tilde{G} = \sqrt{N} (T^T \odot$

$$\prod_A) D_p \Omega^{1/2}, T = A^+ E_s,$$

$$D_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{a}(\theta, \omega, \rho)}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{a}(\theta, \omega, \rho)}{\partial \rho_n} \end{bmatrix}, \tilde{a}(\theta, \omega, \rho) = \text{vec}(A).$$

由此, 综合得出空时加权子空间拟合算法如下:

(1) 计算阵列输出协方差矩阵的估计 R , 并由式 (4) 计算 E_s, Λ_s , 进一步可以得出

$$\sigma^2 = \frac{1}{mL - d} \{ \text{Tr}(R) - \text{Tr}(\Lambda_s) \}, \hat{\Lambda} = \Lambda_s - \sigma^2 I$$

(2) 计算信号参数 θ 和 ω 的 ST-WSF 估计, $\theta, \omega = \arg$

$\min_{\theta, \omega} \bar{e}_s^H \prod_A \bar{W} \prod_A \bar{e}_s$, 其中 $\bar{W}$ 由式 (10) 计算.

4 Cramér-Rao 下界及扰动参数的构造

4.1 Cramér-Rao 下界

Cramér-Rao 界 (CRB) 给出了 (渐近) 无偏估计器的估计误差的 (渐近) 协方差矩阵的下界. 本文中, 整个参数集包括确定性的参数 θ, ω, P 和 σ^2 , 以及随机参数 ρ . 用矢量 η 集中表示确定性参数. 显然, η 和 ρ 的 CRB 是 Fisher 信息矩阵 Z 的逆. 假设信号和扰动参数是高斯分布的, 则有 $Z = Z_1 + Z_2$, 其中 Z_1 和 Z_2 的第 ij 个元素分别为

$$Z_{1,ij} = E_{x,\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} V_{\text{ML}} \right\}$$

$$Z_{2,ij} = \frac{1}{2} E_{\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} (\rho - \rho_0)^T \Omega^{-1} (\rho - \rho_0) \right\}$$

其中 Θ_i 表示复合参数矢量 $(\eta^T \quad \rho^T)^T$ 的第 i 个元素. 忽略关于 ρ 的期望并将 ρ_0 代入 Z_1 , 得出仅包含信号参数的渐近有效的 Cramér-Rao 下界如下.

推论: 设 θ 和 ω 分别为 θ_0 和 ω_0 的渐近无偏估计, 且 $s(t)$ 和 ρ 都是高斯分布的, 那么当快拍数 N 较大时, 有

$$E\{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_0)^T\} \geq \text{CRB}_{\theta} = \frac{\sigma^2}{2N} \{ J_{\theta} - Q J_{\omega}^{-1} Q^T \}^{-1} \quad (11)$$

$$E\{(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_0)^T\} \geq \text{CRB}_{\omega} = \frac{\sigma^2}{2N} \{ J_{\omega} - J_{\theta}^{-1} Q^T Q \}^{-1} \quad (12)$$

其中 $J_{\theta} = C_{\theta} - F_{\theta}^T \Gamma^{-1} F_{\theta}$, $J_{\omega} = C_{\omega} - F_{\omega}^T \Gamma^{-1} F_{\omega}$, $Q = \text{Re}\{D_{\theta}^H \text{MD}_{\omega}\} - F_{\theta}^T \Gamma^{-1} F_{\omega}$.

而 $D_{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{a}(\theta, \omega, \rho)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{a}(\theta, \omega, \rho)}{\partial \theta_d} \end{bmatrix}$, $D_{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{a}(\theta, \omega, \rho)}{\partial \omega_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{a}(\theta, \omega, \rho)}{\partial \omega_d} \end{bmatrix}$; $C_{\theta} = \text{Re}\{D_{\theta}^H \text{MD}_{\theta}\}$;

$C_{\omega} = \text{Re}\{D_{\omega}^H MD_{\omega}\}$; $F_{\theta} = \text{Re}\{D_{\theta}^H MD_{\theta}\}$; $F_{\omega} = \text{Re}\{D_{\rho}^H MD_{\rho}\}$;
 $\Gamma = \text{Re}\left\{D_{\rho}^H MD_{\rho} + \frac{\sigma^2}{2N} \Omega^{-1}\right\}$. 其中 $M = U^T \otimes \prod_A$, $U = A^+ E_s \tilde{\Lambda}^2 \Lambda_s^{-1} E_s^H A^+{}^H$, 而 $\Lambda = \Lambda_s - \sigma^2 I$. 计算 CRB 时将 θ_0 , ω_0 和 ρ_0 代入上述诸式求值.

4.2 扰动参数的构造

在延迟线存在延迟时间误差的情况下,扰动的阵列响应可以写成

$$a(\theta, \omega, \rho) = \left(e^{-j\omega \tilde{\tau}_{11}} \dots e^{-j\omega[(L-1)\tau + \sum_{l=1}^L \tilde{\tau}_{1l}]} \dots e^{-j\omega[(m-1)\tau + \sum_{l=1}^L \tilde{\tau}_{ml}]} \right)^T$$

其中 d 表示阵元间距, c 表示光速, τ 表示每段延迟线名义上的延迟时间,而 $\tilde{\tau}_{ij}$ 表示第 i 个阵元的第 j 个抽头的延迟时间的误差.

定义扰动参数矢量

$$\rho = (\tilde{\tau}_{11} \dots \tilde{\tau}_{1L} \dots \tilde{\tau}_{m1} \dots \tilde{\tau}_{mL})^T \quad (13)$$

显然,其均值为 $\rho_0 = 0$. 为简便起见,假设 $\Omega = \sigma_{\tau}^2 I$, 即每段延迟线的延迟时间误差是独立同分布的.

5 仿真结果

考虑一个 6 元均匀线性天线阵列,天线元间距为 10m,每个天线元均连接 5 个抽头,每段延迟线名义上的延迟时间为 50ns,并受方差 2.5×10^{-7} 的加性高斯随机变量扰动. 两个信号源频率分别为 8.95MHz 和 9MHz,方向分别为 10° 和 20° ,信噪比为 5dB.

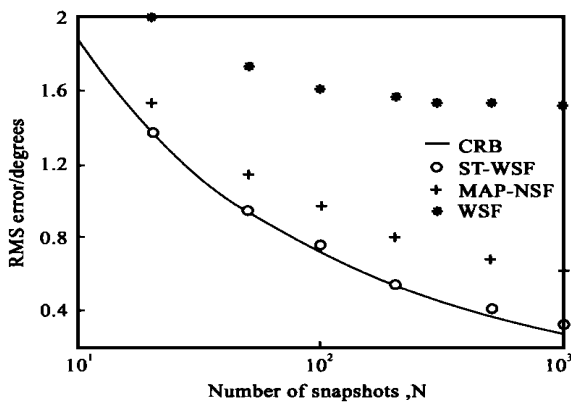


图 1 θ_1 估计的 RMS 误差对快拍数 N 的曲线图

下面比较 ST-WSF 方法和经典的 WSF 方法以及文献[5]中的 MAP-NSF 方法的仿真结果. 图 1 和图 2 分别给出了这三种方法得出的第一个信号的方向和频率估计的均方根(RMS)误差对快拍数的曲线图. 如图所示,当快拍数较少时,由于噪声的有限采样效应对参数估计的影响占优,这三种方法的性能相近;当快拍数较多,即阵列误差对参数估计的影响占优时,ST-WSF 方法的性能明显优于其它两种方法.

6 结论

本文研究了一般阵列误差情况下的空时谱分析问题,给

出了基于一般阵列误差模型的空时加权子空间拟合算法,且该算法是一种渐近无偏的鲁棒参数估计方法. 由于本算法考虑了实际阵列信号处理系统中存在的一般阵列误差,因此更适合于工程应用. 大量仿真结果表明,存在一般阵列误差时,该算法的性能显著优于其它的空间谱分析算法.

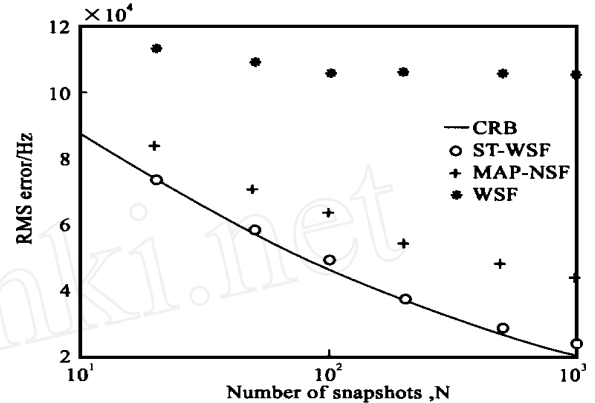


图 2 ω_1 估计的 RMS 误差对快拍数 N 的曲线图

参考文献:

- [1] M. Wax, T. Kailath. Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods [J]. IEEE Trans. on ASSP, Aug. 1984, 32(4): 817 - 827.
- [2] G. A. Fabrizio, D. A. Gray, M. D. Turley. Adaptive Correction of HF Antenna Arrays for Nonstationary Interference Rejection [A]. Proc. of International Radar Symposium [C], 1998, Munich, Germany, 1165 - 1174.
- [3] A. Flieller, A. Ferreol, P. Larzabal, H. Clergeot. Robust Bearing Estimation in the Presence of Direction-dependent Modeling Errors: Identifiability and Treatment [A]. Proc. of ICASSP [C], 1995, Detroit, U. S. A., 1884 - 1887.
- [4] A. Swindlehurst, T. Kailath. A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model errors-Part I: Multidimensional algorithms [J]. IEEE Trans. on SP, Sept. 1993, 41: 2882 - 2890.
- [5] Mats Viberg, A. Lee Swindlehurst. A Bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal processing [J]. IEEE Trans. on SP, Dec. 1994, 42: 3495 - 3507.

作者简介:



陈志群 1974 年出生,哈尔滨工业大学电子工程技术研究所博士研究生,感兴趣的研究方向为阵列信号处理、数字信号处理、数字波束形成和自适应信号处理等.

权太范 1949 年生,教授,博士生导师,哈尔滨工业大学电子工程技术研究所副所长.感兴趣的研究方向为近代信号处理、多目标跟踪、神经网络、模糊推理和数据融合等.