

# 高速采样信号数字内插理论与正弦内插算法研究

林茂六<sup>1</sup>, 尹宝智<sup>2</sup>, 刘治宇<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学电子与通信工程系, 哈尔滨 150001; 2. 深圳市工业学校, 深圳 518038)

**摘 要:** 高速宽带数字化示波器在高扫速工作时, 仅能采集信号的少数样点. 为了看清信号的全貌和精确测量其参数, 必须在每两个样点之间进行插值(波形重构). 本文从数字信号处理角度, 研究了高速采样信号数字内插理论、插值滤波器结构、正弦内插算法. 最后给出了计算机仿真的实例及其误差.

**关键词:** 高速采样; 数字内插; 正弦内插算法; 仿真

**中图分类号:** TP271+.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 12-0008-03

## Digital Interpolation Theory and Sinc Interpolation Algorithm on High-speed Sampling Signals

LIN Mao-liu<sup>1</sup>, YIN Bao-zhi<sup>2</sup>, LIU Zhi-yu<sup>1</sup>

(1. Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. Shenzhen Industry College, Shenzhen 518038, China)

**Abstract:** In high speed wide-band digitizer at high sweep speeds, only a few samples of the signals can be on screen. To give the user a reasonable view of the signals and measure their parameters accurately, interpolation is necessary. In this paper, the digital interpolation theory and the structure of interpolation multiphase filter are studied based on digital signal processing, and the algorithm of sinc interpolation is derived. At last, the computer simulation examples and RMS errors are given.

**Key words:** high speed sampling; interpolation theory; sinc interpolation algorithm; simulation

### 1 引言

随着微电子技术与工艺的飞速进步, 如今的电子系统(诸如通信、雷达、电子对抗、声纳等)除微波电路部分外, 均朝着实现数字化方向发展. 在这些数字系统中广泛使用 TTL、CMOS、ECL 与 GaAs 逻辑系列. 这些逻辑系列典型上升时间  $t_r$  和信号带宽如表 1 所示.

表 1 各种数字逻辑系列信号带宽及其测量系统带宽要求

逻辑系列	典型上升时间	计算的信号带宽	滚降误差为 3% 的测量带宽
TTL	5ns	70MHz	231MHz
CMOS	1.5ns	230MHz	767MHz
ECL	500ps	700MHz	2.33GHz
GaAs	200ps	1.75GHz	5.87GHz

高速数字系统中由于失配或未接终端传输线引起的反射、窜扰或地电位跳动、总线竞争产生的毛刺, 振荡往往是非周期性的. 因此用于捕捉它们的超高速数字化仪器必须以实时方式采样并显示出来.

高速数字电路中信号幅度的测量比模拟电路幅度测量要

求高得多. 模拟电路采用 -3dB 带宽, 其误差在 -3dB 点处接近 30%. 高速数字电路中信号幅度的测量误差要优于 3%, 因而, 对于测量数字系统最通用的仪器——数字化示波器提出了很高的要求, 其测量上述数字逻辑系列滚降误差优于 3% 的测量带宽分别见表 1 所示.

目前, 利用并行交替式 (Parallal interleaving) 技术, 超高速数字化示波器的实时采样速率以突破了  $10\text{Gsa/s}^{[2]}$ . 按照 Nyquist 定理, 这种系统的实时带宽可接近 5GHz. 在数字化示波器中, 由实时采样获得的样本数据原封不动地显示时, 因采样理论和显示技术等缘故, 可能会产生不同形式的视觉混淆. 对于数字化示波器而言, 除了要求有高的实时采样速率外, 还要求有较高的波形分析细节. 数字化示波器又规定了十分重要的指标——有效存储带宽 (Usable Store Bandwidth), 它的定义为:

$$USB = \frac{\text{最高实时采样速率 (MHz)}}{K}$$

式中 
$$K = \begin{cases} 25, & \text{用光点直接显示} \\ 10, & \text{用矢量显示} \\ 2.5, & \text{用正弦内插显示} \end{cases}$$

收稿日期: 1999-10-09; 修回日期: 1999-11-08

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 69872021); 深圳市华为公司科技基金

很明显,采用正弦内插显示可使 USB 接近或等于实时采样带宽,并且可以消除视觉混淆误差.本文从数字信号处理角度,研究了高速取样信号数字内插理论、内插滤波器的结构,详细推导了正弦内插算法,最后给出了计算机仿真及均方根误差.

## 2 数字内插的过程与结构

将信号采样频率从一个给定频率  $F = 1/T$  转换到另一频率  $F' = 1/T'$  的过程就称为采样频率转换.当新的采样频率高于原始频率,即  $F' > F$  或  $T' < T$  时,称为插值.

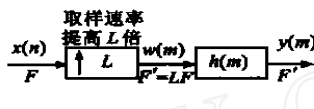


图 1 采样频率提高 L 倍的方框图

图 1 所示为一个采样频率变换系统.输入信号  $x(n)$  是经过采样速率为  $F = 1/T$  的采样脉冲采样得到的,而期望输出信号  $y(m)$  的采样速率为  $F' = 1/T'$ ,其中,  $T'/T = F/F' = 1/L$ ,  $L$  为整数.

$y(m)$  和  $x(m)$  的关系为<sup>[1]</sup>:

$$y(m) = \sum_{n} h(nL + m \odot L) x(\lfloor \frac{m}{L} \rfloor - n) \quad (1)$$

这里  $m \odot L$  表示  $m$  取模  $L$ ,  $\lfloor \frac{m}{L} \rfloor$  表示小于或等于  $\frac{m}{L}$  的取整.定义  $g_m(n)$  为:

$$g_m(n) = h(nL + m \odot L) \quad (2)$$

$g_m(n)$  是  $m$  的周期函数,且周期为  $L$ .

直接利用式(2)来实现插值时,滤波器  $h(n)$  工作于较高的采样频率  $F$  上,因此其效率是很低的.所以利用  $g_m(n)$  为周期函数的特性设计一种有效结构——多相滤波器(也称作多路网络)<sup>[1,4]</sup>.

基于式(2)的一个插值实现方法,如图 2 所示.

这个结构的工作过程如下所述:  $h(m)$  的子序列,  $g_0(n), g_1(n), \dots, g_{L-1}(n)$  等效于采样频率  $F$  的独立的线性时不变滤波器,它们均工作于较低的采样频率  $F$ ,将这些滤波器分别定义为:

$$p_r(n) = g_r(n) = h(nL + r), r=0,1,2, \dots, L-1 \quad (3)$$

这些滤波器就称为多相滤波器.对于每个输入  $x(n)$  都有  $L$  个输出采样值(见图 3).第  $r$  个通道的输出  $y_r(m)$  在  $m = nL + r, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时有非零值,这些非零值对应于输出序列中的  $y(nL + r), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  因此,对于每个输出样值  $x(n)$ ,  $L$  个支路的多相网络中的每一个支路都提供了一个非零输出,分别对应于网络的  $L$  个输出中的一个.其中所有的延时均为单位采样延时.原型滤波器的频率响应近似于理想低通特性.因为多相滤波器  $p_r(n)$  是  $h(m)$  的抽取值(抽样间隔为  $L$ ),因此,当原型滤波器的频率响应的频率范围为  $0$

$/L$  时,多相滤波器的频率响应的频率范围为  $0$

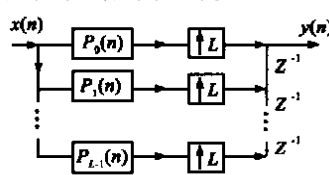


图 2 1 到 L 插值结构图

多相滤波器近似于全通函数,且每个  $r(r=0,1,2, \dots, L-1)$  对应不同的相移.如果原型滤波器  $h(n)$  是一个长度为  $N$  的 FIR 滤波器,那么  $p_r(n)$  将为  $N/L$  的 FIR 滤波器.

## 3 正弦内插算法

由以上的讨论可知,内插滤波器  $h(k)$  必须近似理想低通滤波器,即

$$\tilde{H}(e^j) = \begin{cases} L, & |k| \leq L/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

式(4)的反变换就是熟悉的  $\sin(x)/x$  特性:

$$\tilde{h}(k) = \frac{\sin(\pi k/L)}{(\pi k/L)}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

由式(3)得到内插多相滤波器的理想时间响应为:

$$\tilde{p}_r(n) = \frac{\sin[\pi(n+r/L)]}{\pi(n+r/L)}, r=0,1,2, \dots, L-1 \quad (6)$$

因为每  $L$  个  $\tilde{h}(k)$  的值为:

$$\tilde{h}(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k=qL, q=\pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

所以,第 0 个多相滤波器的冲激响应为一个单位脉冲,即

$$\tilde{p}_0(n) = \delta(n), \text{对于所有 } n$$

这意味着第 0 个多相的输出  $y_0(m)$  等于输入  $x(n)$  填入  $L-1$  个零,而这些值中间的另外  $L-1$  个采样值则必须通过多相滤波器  $p_r(n)(r=0,1,2, \dots, L-1)$  插值得到.从数字滤波器理论看,多相滤波器  $p_r(n)$  对于输入信号相当于一个全通滤波器,即它不改变输入信号  $x(n)$ ,仅仅起平滑作用.

图 3 为利用多相结构实现数字低通滤波器的内插示意图.设

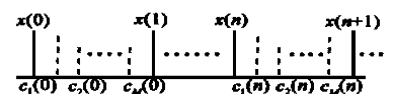


图 3 内插示意图

$x(n)$  为以  $T$  为间隔采样得到的已知序列,在

两个采样点之间插进  $M$  个点,构成长度为  $M$  的序列  $c_1(nT), c_2(nT), \dots, c_M(nT)$ ,可由式(1)和式(6)推导得:

$$\begin{aligned} c_m(nT) &= x(nT) * \frac{\sin[(n+m/(M+1))T]}{(n+m/(M+1))T} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin[(n-k)/(M+1)T]}{(n-k/(M+1))T} \end{aligned}$$

其中  $m$  取  $1, 2, \dots, M$ . 即

$$c\left[\left(n + \frac{m}{M+1}\right)T\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin[(n+m/(M+1)-k)T]}{(n+m/(M+1)-k)T} \quad (8)$$

式(8)就是正弦插值的公式,利用式(8)来插值的方法为正弦插值法.

因为这些滤波器的冲击响应在理论上是无限的,而在实际应用中只能用有限长的滤波器.因此,就存在内插误差,这些误差在  $m=0, \pm L, \pm 2L, \dots$  点上为零,而在这些点之间却往往不为零.式(8)中  $T$  为采样周期,可将其视为 1,  $k$  为采样点数,可取  $k$  为 0 到  $N-1$  之间,则式(8)可变为

$$c\left(n + \frac{m}{M+1}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \frac{\sin[(n+m/(M+1)-k)]}{(n+m/(M+1)-k)} \quad (9)$$

## 4 计算机仿真

本文以正弦波为例,对该插值算法作了仿真.并将计算出的插值与标准正弦波进行比较,算出 RMS 值.下面以每两个采样点之间插入 9 个点为例作了仿真,仿真结果如表 2 所示.

表 2 正弦插值仿真

每周原始采样点数	计算所用的采样点数 $N$	插值后的 RMS 值
3	3	0.007029
2.5	5	0.004878
2.5	10	0.003010
2.5	20	0.001454
2.5	30	0.000949

从表 2 可以看出,当  $f_s/f_0 = 3$  时(其中,  $f_s$  为采样频率,  $f_0$  为输入正弦波的频率),即使只用 3 个点来插值也能很好的恢复波形.可以看出,用正弦插值恢复正弦波时,在满足采样定理的条件下,用于计算的采样点数  $N$  越多,恢复的效果就越好.当  $f_s/f_0 = 2.5$  时,取 30 个点用来进行正弦插值计算,所得的标准误差小于 1%.但增加计算点数,势必会增加运算时间,因此在实际应用中,应从精度和速度两方面综合考虑.

图 4(a) 所示为未经过插值处理的每周期取 3 个点的正弦信号;图 4(b) 为  $N = 10$ , 每两点之间插入 25 个点后所得的波形.

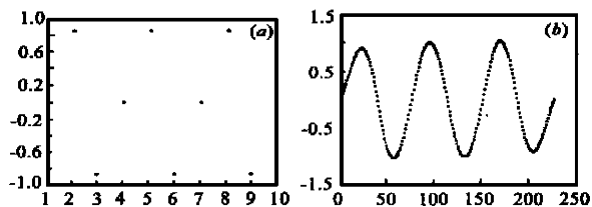


图 4 (a) 插值前的波形图, (b) 插值后的波形图

## 5 结论

在高速波形数字化系统(如数字化示波器、数字化记录仪)中,不仅需要超高速实时采样速率,还需要有较高的波形分析细节.为此需要在样本之间进行插值.本文从数字信号处理角度,比较系统地研究了高速采样数据内插理论、插值滤波器结构;推导出了正弦内插公式(8)和算法表达式(9).根据式(9)设计了正弦内插程序.并以正弦波为例作了计算机仿真.仿真结果如表 2 和图 4 所示.可见,在满足采样定理条件下,利用正弦内插方法可很好地恢复出正弦波波形.如果运用改进的正弦内插法还可以在显示脉冲时消除不精确性.关于这方面的内容将另文介绍.

## 参考文献:

- [1] R. E. Cochiere and L. Rabiner. Interpolation and decimation of digital signals [J]. A Tutorial Review, Proc. IEEE, March, 1981: 69(3).
- [2] John. A. Scharrer. An 8-Ggasample-per-second modular digitizing oscilloscope system [J]. HP Journal, Oct., 1993: 17 - 22.
- [3] Allen Montijo. Filter design for interpolation [J]. HP Journal, Oct., 1993: 44 - 45.
- [4] 刘益成, 罗维炳. 信号处理与过抽样转换器 [M]. 电子工业出版社, 1997.

## 作者简介:



林茂六 1943 年 10 月生于江西省泰和县, 1967 年毕业于成都电讯工程学院电讯系. 现任哈尔滨工业大学电子与通信工程系教授, 博士生导师. 目前主要研究领域为超高速数字化系统的体系结构, 非均匀取样信号理论及校准技术等.



尹宝智 1954 年 5 月生于哈尔滨, 1979 年毕业于哈尔滨工业大学自动控制专业. 现任深圳市工业学校副研究员. 获省部级科技进步奖 7 项, 国家专利四项, 发表论文 18 篇. 目前主要从事数字通信及测控技术研究.



刘治宇 1978 年 5 月生于沈阳, 1999 年毕业于哈尔滨工业大学电子与通信工程系. 现于哈尔滨工业大学电子与通信工程系攻读硕士学位. 目前研究方向为软件无线电和数字信号信息处理.