

乘法噪声中非线性耦合谐波分析

王宏志¹, 王树勋², 戴逸松²

(1. 吉林工学院计算机科学与工程学院, 长春 130012; 2. 吉林工业大学信息学院, 长春 130025)

摘 要: 针对信号的非平稳性质, 引入傅里叶级数多谱和比例多周期图的概念, 分别提出了零均值乘法噪声二次耦合及非零均值乘法噪声三次耦合谐波频率估计方法, 仅使用单个数据记录即可得到耦合频率估计, 并且可以抑制加性平稳噪声而无须假定其颜色和分布. 最后给出了仿真实验结果.

关键词: 乘法噪声; 耦合谐波频率估计; 傅里叶级数多谱; 比例多周期图

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0075-05

The Analysis of Nonlinear Coupled Harmonics in Multiplicative Noise

WANG Hong-zhi¹, WANG Shu-xun², DAI Yi-song²

(1. School of Computer Science and Engineering, Jilin Institute of Technology, Changchun 130012, China;

2. Information College, Jilin University of Technology, Changchun 130025, China)

Abstract: For the nonstationary property of the mixed process, Fourier series polyspectra and scaled polyperiodograms are introduced. We propose a new method to estimate frequencies of quadratic coupled harmonics in multiplicative noise with zero mean and ones of cubic coupled harmonics in multiplicative noise with non-zero mean. Coupled frequencies can be obtained only by single record data and additive stationary noise is restrained without assumption of noise color and distribution. Finally, the simulation results are given.

Key words: multiplicative noise; frequency estimation of coupled harmonics; fourier series polyspectra; scaled polyperiodograms

1 引言

乘法噪声中的谐波恢复和非线性耦合谐波分析是近年来出现的新的研究领域. 非线性耦合是一种非线性现象, 当谐波信号通过非线性系统时, 系统的输出除了包含原频率分量外, 还产生了新的频率分量, 这一现象可用于识别系统的非线性. 目前工作主要集中于二次非线性耦合的研究, 它在海洋地理^[1]、地震学^[2]、EEG分析^[3]、制造业^[4]、激光测速^[5]和等离子物理^[6]等很多领域具有广泛的应用. 最近, G. T. Zhou 提出了一种可用来分析非零均值乘法噪声中二次耦合谐波的特殊多谱方法^[7], 该方法的局限主要在于要求乘法噪声具有非零均值, 这在实际中往往是不能满足的. 本文基于傅里叶级数切片多谱和其估计比例多周期图的概念, 提出了一种新的方法. 该方法通过平方预处理, 适用于零均值乘法噪声情形. 三次非线性是阶次最低的奇数阶非线性, 其分析在很多领域中具有重要的意义, 特别是在通信领域. 本文提出了一种三次耦合谐波分析方法, 有效地解决了非零均值乘法噪声中三次耦合谐波频率的估计问题.

考虑如下的乘法和加性噪声同时存在的观测信号 $y(t)$ 为

$$y(t) = x(t) + v(t) = \sum_{l=1}^L s_l(t) e^{j(\sum_{l=1}^l \omega_l t)} + v(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (1)$$

对上述模型作如下假设:

(1) ω_l 各不相同, 并且 $\omega_l \neq 0$ ($l = 1, 2, \dots, L$).

(2) s_l 是 $(-1, 1)$ 上的确定性常数.

(3) 加性噪声 $v(t)$ 是零均值平稳随机过程, 且 $v(t)$ 是可混的.

(4) 乘法噪声 $s_l(t)$ 是相互独立的、平稳的可混实过程, 且和 $v(t)$ 相互独立.

其中 ω_l , ω_{-l} 和 $s_l(t)$ 分别表示所有的 ω_l , ω_{-l} 和 $s_l(t)$.

如果时间序列 $v(t)$ 满足

$$|c_{k+1, v}^{(p)}| < \epsilon, \quad p = (1, 2, \dots, k), \quad \forall k \quad (2)$$

则称 $v(t)$ 是可混的.

式(2)中 $c_{k+1, v}^{(p)} = \text{cum}[v^{(p_0)}(t), v^{(p_1)}(t+1), \dots, v^{(p_k)}(t+k)]$ 是 $v(t)$ 的 $(k+1)$ 阶累积量, $p_i \in \{-1, 1\}$,

$$v^{(p_i)}(t) = \begin{cases} v(t) & p_i = 1 \\ v^*(t) & p_i = -1 \end{cases}, \quad p = (p_0, p_1, \dots, p_k) \text{ 可取 } 2^{k+1} \text{ 种}$$

不同的值,式(2)意味 $v(t)$ 的所有可能的 2^{k+1} 种具有不同共振位置的累积量绝对可和,称为可混条件,满足式(2)的过程称为可混过程.从式(2)可以推断可混过程 $v(t)$ 的 $k+1$ 阶多谱存在并且是有限的,这是因为

$$S_{k+1,v}^{(p)}(\omega) = c_{k+1,v}^{(p)}(\omega) e^{-j\omega \tau} / c_{k+1,v}^{(p)}(\omega) < \infty, \quad \tau = (1, 2, \dots, k)$$

由于式(1)中 $y(t)$ 是由具有平滑谱的平稳噪声 $v(t)$ 和具有谱线的谐波信号 $x(t)$ 叠加而成的,故 $y(t)$ 常被称为混合过程.

2 傅里叶级数多谱和比例多周期图

对于一般的平稳噪声 $s_l(t)$,式(1)中的 $x(t)$ 是非平稳的,其 k 阶矩是时变的,即

$$m_{k+1,x}(t, \tau) = E[x^*(t)x(t+\tau_1)\dots x(t+\tau_k)] \quad (3)$$

是时间 t 的函数,对 $m_{k+1,x}(t, \tau)$ 作时间平均,得到相应的时间平均统计量

$$\overline{m}_{k+1,x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} m_{k+1,x}(t, \tau) dt \quad (4)$$

定义式(4)中的 $\overline{m}_{k+1,x}(\tau)$ 称为混合矩,即适用于混合过程的矩.如果 $x(t)$ 是平稳的,则 $\overline{m}_{k+1,x}(\tau) = m_{k+1,x}(\tau)$,即式(4)同样适用于平稳过程,所以有时也称为广义矩.

我们注意到,满足模型式(1)的 $x(t)$ 的 $k+1$ 阶累积量为

$$c_{k+1,x}(t, \tau) = \text{cum}[x^*(t), x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_k)] \\ = \int_{l=1}^L c_{k+1,s_l}(t, \tau) e^{j(k-1)(t+\tau_1)} e^{j(t+\tau_1+\dots+\tau_k)}$$

上式说明, $c_{k+1,x}(t, \tau)$ 是 t 和 τ 的(几乎)周期序列,因此 $x(t)$ 是循环平稳的.循环平稳过程的 $k+1$ 阶矩 $m_{k+1,x}(t, \tau)$ 也是 t 和 τ 的(几乎)周期序列.由于 $\exp(j\omega t)$ 不是绝对可和的,所以 $\overline{m}_{k+1,x}(\tau)$ 的傅里叶级数不存在,除非引入 Dirac delta 函数.但同时 $\exp(j\omega t)$ 是 t 的(几乎)周期序列提示我们使用 $\overline{M}_{k+1,x}(\omega)$ 的(广义)傅里叶级数系数,它被定义为:

$$\overline{M}_{k+1,x}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} \overline{m}_{k+1,x}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (5)$$

其中对 τ 的求和是 k 重的.于是,称 $\overline{M}_{k+1,x}(\omega)$ 为傅里叶级数多谱,全称是广义傅里叶级数时间平均多矩谱.

将式(3)和式(4)代入式(5),得傅里叶级数多谱的另一种定义方式

$$\overline{M}_{k+1,x}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T^{k+1}} X_T(\omega_1) \dots X_T(\omega_k) X_T^*(\omega_1 + \dots + \omega_k) \right] \quad (6)$$

其估计称为比例多周期图

$$\hat{\overline{M}}_{k+1,x}(\omega) = \frac{1}{T^{k+1}} X_T(\omega_1) \dots X_T(\omega_k) X_T^*(\omega_1 + \dots + \omega_k) \quad (7)$$

它是通常的多周期图

$$I_{k+1,x}(\omega) = \frac{1}{T} X_T(\omega_1) \dots X_T(\omega_k) X_T^*(\omega_1 + \dots + \omega_k)$$

的 T^{-k} 倍.易证 $\hat{\overline{M}}_{k+1,x}(\omega)$ 是 $\overline{M}_{k+1,x}(\omega)$ 的渐近无偏估计

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\hat{\overline{M}}_{k+1,x}(\omega)] = \overline{M}_{k+1,x}(\omega) \quad (8)$$

应用信号处理手段解决实际问题时,需要用采样平均来

代替统计期望,然后再建立估计的一致性.对于平稳过程,已经建立了三阶和四阶矩(累积量)采样估计的一致性,最近 Dandawate 和 Giannakis^[8] 发展了 Parzen 的渐近平稳理论,在可混条件下,对于一类由确定信号、平稳和非平稳随机过程混合组成的复数时间序列,提出了其时间采样平均以均方意义收敛于统计平均的理论,并证明了采样平均满足正态分布,同时给出了方差表达式.对混合过程式(1)中的 $y(t)$,其混合高阶矩满足

$$\overline{m}_{k+1,x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E[x^*(t)x(t+\tau_1)\dots x(t+\tau_k)] dt \\ \stackrel{m.s.s.}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} x^*(t)x(t+\tau_1)\dots x(t+\tau_k) dt \quad (9)$$

式中 $\stackrel{m.s.s.}{=}$ 代表以均方意义收敛.于是即可得到 $\overline{m}_{k+1,x}(\tau)$ 的采样估计

$$\hat{\overline{m}}_{k+1,x}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-1} x^*(t)x(t+\tau_1)\dots x(t+\tau_k) dt \quad (10)$$

3 乘法噪声中二次耦合谐波频率估计

如果存在整数 $(l_1, l_2, l_3) [1, L]$ 使 $l_1 + l_2 = l_3$, 则模型式(1)中出现二次频率耦合.当式(1)中的乘法噪声 $s_l(t)$ s 具有非零均值时, G. T. Zhou 提出如果 $l_1 + l_2 = l_3 \pmod{2}$ 仅当 l_1, l_2, l_3 时成立,耦合频率可由广义傅里叶级数双谱求得^[7]

$$\overline{M}_{3,y}(\omega_1, \omega_2) = \int_{l_1, l_2, l_3=1}^L m_{l_1} m_{l_2} m_{l_3} e^{j(l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2 - l_3 \omega_3)} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ \times \delta(\omega_2 - \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \quad (11)$$

其中 $m_l = E[s_l(t)]$ 为乘法噪声均值, $\delta(\cdot)$ 表示 Kronecker delta 函数

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

但是实际中乘法噪声常常具有零均值,即 $m_l = 0$. 此时显而易见 $\overline{M}_{3,y}(\omega_1, \omega_2) = 0$. 则 G. T. Zhou 的方法失效.

本文提出了一种方法可以有效地估计零均值乘法噪声中的二次耦合谐波频率.

定义 1: 定义复数过程 $x(t)$ 的广义 6 阶矩为

$$\overline{m}_{6,x}(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} m_{6,x}(t; \omega_1, \omega_2) dt \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E[x^*(t)x^*(t)\dots x(t+\tau_1) \\ \dots x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)x(t+\tau_2)] dt \quad (13)$$

定义 2: 定义 $x(t)$ 对应式(13)的广义傅里叶级数多谱为

$$\overline{M}_{6,x}(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{\omega_1, \omega_2=0}^{T-1} \overline{m}_{6,x}(\omega_1, \omega_2) e^{-j\omega_1 \tau_1} e^{-j\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (14)$$

应该注意的是, $\overline{m}_{6,x}(\omega_1, \omega_2)$ 实际上是六阶矩的二维切片,因此式(14)中仅需求二维傅里叶级数. $\overline{M}_{6,x}(\omega_1, \omega_2)$ 在形式上同傅里叶级数双谱相似,它实质上是切片谱,与式(11)中的 $\overline{M}_{3,y}(\omega_1, \omega_2)$ 有本质不同.

首先忽略式(1)中加性噪声 $v(t)$ 的影响而仅考虑 $x(t)$, 然后再讨论傅里叶级数多谱如何抑制平稳加性噪声.

定理 1: 对于式(1)中 $x(t)$, 如果 $l_1 + l_2 = l_3 \pmod{2}$ 仅当 l_1, l_2, l_3 时成立, 且对任意 $(l_i, l_j) \in [1, L], l_i + l_j = 0$, 则有

$$\overline{M_{6,x}(l_1, l_2)} = \lim_{l_1, l_2, l_3=1}^L \frac{1}{s_{l_1}^2 s_{l_2}^2 s_{l_3}^2} E \{ v^{2(l_1 + l_2 - l_3)} \cdot (l_1 - 2l_1) (l_2 - 2l_2) \cdot (l_1 + l_2 - l_3) \} \quad (15)$$

其中 $s_{l_j}^2 = E \{ s_{l_j}^2(t) \}$ 为噪声 $s_{l_j}(t)$ 的方差. 证明参见文献[9].

定理 2: 对于式(1)中的 $y(t)$, 有

$$\overline{M_{6,y}(l_1, l_2)} = \overline{M_{6,x}(l_1, l_2)} \quad (16)$$

证明: 由式(13)有

$$\overline{m_{6,y}(l_1, l_2)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E \{ y^*(t) y^*(t) \cdot y(t+1) y(t+1) \cdot y(t+2) y(t+2) \}$$

由于 $x(t)$ 和 $v(t)$ 相互独立, 且为平稳零均值随机过程, 易证

$$\begin{aligned} \overline{m_{6,y}(l_1, l_2)} &= \overline{m_{6,x}(l_1, l_2)} \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E \{ v^{*2}(t) v^2(t+1) v^2(t+2) \} \\ &= \overline{m_{6,x}(l_1, l_2)} \\ &+ E \{ v^{*2}(t) v^2(t+1) v^2(t+2) \} \end{aligned}$$

再由式(14)

$$\begin{aligned} \overline{M_{6,y}(l_1, l_2)} &= \overline{M_{6,x}(l_1, l_2)} \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{l_1, l_2=0}^{T-1} E \{ v^{*2}(t) v^2(t+1) v^2(t+2) \cdot v^2(t+2) \} e^{-j l_1 t} e^{-j l_2 t} \end{aligned}$$

由于 $v(t)$ 可混,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{l_1, l_2=0}^{T-1} E \{ v^{*2}(t) v^2(t+1) v^2(t+2) \} e^{-j l_1 t} e^{-j l_2 t} \right| \\ &< \left| \int_{l_1, l_2=0}^{T-1} E \{ v^{*2}(t) v^2(t+1) v^2(t+2) \} \right| < \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{l_1, l_2=0}^{T-1} E \{ v^{*2}(t) v^2(t+1) v^2(t+2) \} e^{-j l_1 t} e^{-j l_2 t} = 0$$

则定理 2 成立.

由定理 1、定理 2 和式(13)、(14), 零均值乘法噪声中的二次耦合谐波频率可由傅里叶级数多谱 $\overline{M_{6,y}(l_1, l_2)}$ 估计得到. 当不存在二次耦合时, $\overline{M_{6,y}(l_1, l_2)} = 0$. 而当存在二次频率耦合 $l_3 = l_1 + l_2$ 时, $\overline{M_{6,y}(l_1, l_2)}$ 在 $(2l_1, 2l_2)$ 处有一谱峰, 由谱峰的位置即可确定耦合谐波频率.

如果令 $z(t) = y^2(t)$, 即对观测信号进行平方预处理, 则由定义式(13)、(14)有

$$\overline{m_{6,y}(l_1, l_2)} = \overline{m_{3,z}(l_1, l_2)} \quad (17)$$

$$\overline{M_{6,y}(l_1, l_2)} = \overline{M_{3,z}(l_1, l_2)} \quad (18)$$

即 $z(t)$ 的广义三阶矩傅里叶级数双谱与 $y(t)$ 的广义六阶矩傅里叶级数多谱相等. 这也说明 $\overline{m_{6,y}(l_1, l_2)}$ 是六阶矩的二维切片, $\overline{M_{6,y}(l_1, l_2)}$ 是切片谱.

给出同时存在乘法和加性噪声的含噪观测值 $y(t)$, 通过下面的步骤可估计二次耦合谐波频率.

(1) 将 $y(t)$ 平方后得到 $z(t)$, 这相当于一个非线性预处理过程.

(2) 估计 $z(t)$ 的广义傅里叶级数双谱 $\overline{M_{3,z}(l_1, l_2)}$, 既可使用式(7)定义的比例多周期图, 亦可先由式(10)求得广义三阶矩, 然后通过二维 FFT 求得 $\overline{M_{3,z}(l_1, l_2)}$.

(3) 耦合频率估计如下

$$(\hat{l}_1, \hat{l}_2) = \frac{1}{2} \arg \max_{l_1, l_2} \overline{M_{3,z}(l_1, l_2)} \quad (19)$$

4 乘法噪声中三次耦合谐波频率估计

如果存在整数 $(l_1, l_2, l_3, l_4) \in [1, L]$ 使 $l_1 + l_2 + l_3 = l_4$, 则模型式(1)中出现三次频率耦合. 当式(1)中乘法噪声 $s_l(t)$ 具有非零均值时, 本文提出一种方法可以有效地估计三次耦合谐波频率.

定义 3: 定义复数过程 $x(t)$ 的广义四阶矩为

$$\begin{aligned} \overline{m_{4,x}(l_1, l_2)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} m_{4,x}(t; l_1, l_2, 2) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E \{ x^*(t) x(t+1) \cdot x(t+2) x(t+2) \} \end{aligned} \quad (20)$$

定义 4: 定义 $x(t)$ 对应式(20)的傅里叶级数多谱为

$$\overline{M_{4,x}(l_1, l_2)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{l_1, l_2=0}^{T-1} \overline{m_{4,x}(l_1, l_2)} e^{-j l_1 t} e^{-j l_2 t} \quad (21)$$

实际上 $\overline{m_{4,x}(l_1, l_2)}$ 是四阶矩的二维切片, $\overline{M_{4,x}(l_1, l_2)}$ 是傅里叶级数切片多谱.

与二次耦合分析时相似, 首先忽略式(1)中加性噪声 $v(t)$ 的影响而仅考虑 $x(t)$, 然后再讨论傅里叶级数多谱如何抑制平稳加性噪声.

定理 3: 对于式(1)中的 $x(t)$, 若 $l_1 + l_2 + l_3 = l_4 \pmod{2}$ (2) 仅当 l_1, l_2, l_3, l_4 时成立, 且对任意 $(l_i, l_j) \in [1, L], l_i + l_j = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \overline{M_{4,x}(l_1, l_2)} &= \lim_{l_1, l_2, l_3, l_4=1}^L m_{l_1} m_{l_2} m_{l_3} m_{l_4} e^{j(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)t} \\ &\cdot (l_1 - l_1) (l_2 - l_2 - l_3) \\ &\cdot (l_1 + l_2 + l_3 - l_4) \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $m_{l_i} = E \{ s_{l_i}(t) \}$ 为乘法噪声均值.

证明: 将式(1)中的 $x(t)$ 代入式(20)

$$\begin{aligned} \overline{m_{4,x}(l_1, l_2)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E \{ x^*(t) x(t+1) \cdot x(t+2) x(t+2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_T \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4=1}^L E[s_{l_1}(t+1) s_{l_2}(t+2) \\
 &\quad \cdot s_{l_3}(t+3) s_{l_4}(t)] e^{j(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)t} \\
 &\quad \cdot e^{j(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)'} e^{j(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)'} \\
 &= \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4=1}^L E[s_{l_1}(t+1) s_{l_2}(t+2) \\
 &\quad \cdot s_{l_3}(t+3) s_{l_4}(t)] e^{j(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)t} \\
 &\quad \cdot e^{j(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)'} \\
 &\quad \cdot (l_1 + l_2 + l_3 - l_4) \quad (23)
 \end{aligned}$$

由于假设 $l_1 + l_2 + l_3 = l_4$, 当且仅当 l_1, l_2, l_3, l_4 时成立及假设(A4), 有

$$\begin{aligned}
 &E[s_{l_1}(t+1) s_{l_2}(t+2) s_{l_3}(t+3) s_{l_4}(t)] \\
 &= m_{l_1} m_{l_2} m_{l_3} m_{l_4} \quad (24)
 \end{aligned}$$

将式(23)代入式(21), 则

$$\begin{aligned}
 \overline{M}_{4,x}(1, 2) &= \lim_T \frac{1}{T^2} \sum_{l_1, l_2=0}^{T-1} \overline{m}_{4,x}(1, 2) e^{-j l_1} e^{-j l_2} \\
 &= \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4=1}^L m_{l_1} m_{l_2} m_{l_3} m_{l_4} e^{j(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)} \\
 &\quad \cdot (1 - l_1) (2 - l_2 - l_3) \\
 &\quad \cdot (l_1 + l_2 + l_3 - l_4)
 \end{aligned}$$

定理 3 成立.

定理 4: 对于式(1)中的 $y(t)$, 有

$$\overline{M}_{4,y}(1, 2) = \overline{M}_{4,x}(1, 2) \quad (25)$$

证明过程与定理 2 相似, 故略.

由定理 3、4 和式(20)、(21), 非零均值乘法噪声中的三次耦合谐波频率可由傅里叶级数多谱 $\overline{M}_{4,y}(1, 2)$ 估计得到. 当不存在三次耦合时, $\overline{M}_{4,y}(1, 2) = 0$, 而当存在三次频率耦合 $l_4 = l_1 + l_2 + l_3$ 时, $\overline{M}_{4,y}(1, 2)$ 在 $(l_1, l_2 + l_3)$ 、 $(l_2, l_1 + l_3)$ 、 $(l_3, l_1 + l_2)$ 处出现三个谱峰, 可确定耦合谐波频率 l_1, l_2 和 l_3 , 任一峰值对应坐标之和即为 l_4 .

三次耦合谐波频率估计步骤如下:

(1) 估计含噪观测值 $y(t)$ 的广义傅里叶级数切片多谱 $\overline{M}_{4,y}(1, 2)$, 可使用式(7)定义的比例多周期周, 亦可先由式(10)求得广义四阶矩切片, 然后通过二维 FFT 求得 $\overline{M}_{4,y}(1, 2)$.

(2) 估计耦合频率

$$(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3) = \arg \max_{l_1, l_2, l_3} \overline{M}_{4,y}(1, 2, 3) \quad (26)$$

只要满足假设(A1)~(A4), 三次耦合谐波频率的估计方法可推广到任意 k 次耦合情况, 并可结合平方预处理方法, 估计零均值乘法噪声中三次以上耦合谐波频率.

5 仿真实验结果

为了说明本文提出的傅里叶级数多谱方法估计耦合频率的有效性, 在这一节给出仿真结果. 给出含噪观测值为

$$y(n) = x(n) + v(n) = \sum_{l=1}^L s_l(n) e^{j(p+l)n} + v(n) \quad (27)$$

信噪比定义为

$$SNR \triangleq 10 \log_{10} \frac{\sum_{t=0}^{T-1} |y(t)|^2}{\sum_{t=0}^{T-1} v^2(t)} \quad (28)$$

加性噪声 $v(n)$ 为非高斯有色噪声, 由噪声模型 $v(n) = 0.8253v(n-1) + 0.25v(n-2) + w(n)$ 产生, $w(n)$ 为指数分布 i.i.d. 过程.

实验 1: 非零均值乘法噪声中二次耦合谐波频率估计, $L = 3, l_1 = 0.5, l_2 = 1.5, l_3 = 2.0, m_1 = 0.4, m_2 = 0.5, m_3 = 0.9, m_1 = 1.5, m_2 = 1.2, m_3 = 1$, 乘法噪声 $s_1(t), s_2(t)$ 和 $s_3(t)$ 分别服从高斯、高斯和指数分布, 且方差均为 1, 由式(11) G. T. Zhou 方法估计耦合频率, 数据长度 256, 结果见图 1(a) 和 (b).

实验表明 G. T. Zhou 方法在零均值乘法噪声时失效.

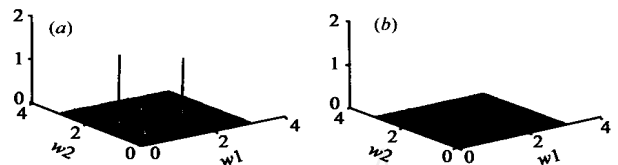


图 1 二次耦合谐波频率估计 G. T. Zhou 方法. (a) 乘法噪声为非零均值; (b) 零均值

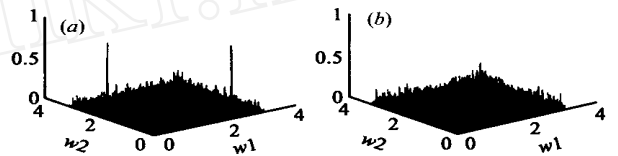


图 2 二次耦合谐波频率估计本文方法, 零均值乘法噪声. (a) 存在二次耦合; (b) 不存在二次耦合

实验 2: 零均值乘法噪声中二次耦合谐波频率估计, 即 $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, 其它条件与实验 1 相同, 数据长度 1024. 实验结果见图 2(a) 和 (b). 实验结果表明, 本文提出的方法是有效的, 但为达到与实验 1 相似的效果, 需要更多的观测数据.

实验 3: 三次耦合谐波估计, $L = 4, l_1 = 0.7, l_2 = 0.8, l_3 = 0.9, l_4 = 2.4$

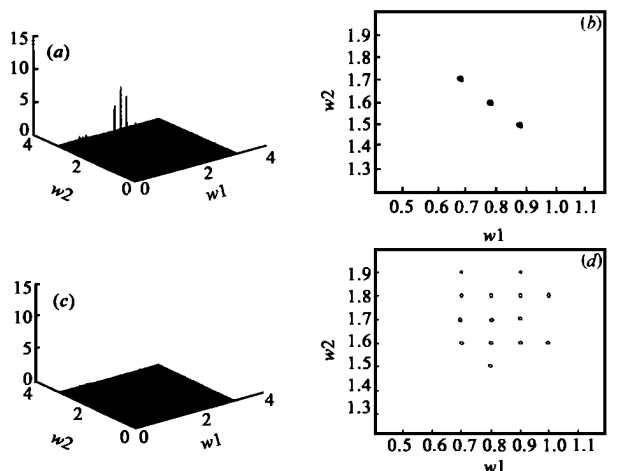


图 3 三次耦合谐波频率估计. 非零均值乘法噪声 (a)、(b) 存在三次耦合, (c)、(d) 不存在三次耦合, (c)、(d) 是等高图

$=0.9$, $\alpha_4 = 2.4$, $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha_3 = 1.3$, $\alpha_4 = 2.2$, $m_1 = 1.5$, $m_2 = 1.2$, $m_3 = 1.7$, $m_4 = 1$, 乘法噪声 $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ 服从高斯分布, $s_4(t)$ 服从指数分布, 方差均为 1, 数据长度 512. 实验结果见图 3(a) ~ (d), 其中 (c)、(d) 为无三次耦合情况 ($\alpha_4 = 1.0$). 实验表明, 本文方法可有效估计三次耦合谐波频率.

6 结论

本文针对乘法和加性噪声共存时信号的非平稳性, 引入傅里叶级数多谱和比例多周期图概念, 对二次和三次非线性耦合谐波频率估计问题进行了分析, 通过平方预处理提出了零均值乘法噪声二次耦合频率估计和非零均值三次耦合频率估计的傅里叶级数多谱方法, 证明了傅里叶级数多谱对平稳加性噪声的抑制作用. 所得结论可推广到 k 次耦合情况.

参考文献:

- [1] K. Hasselman, W. Munk, and G. MacDonald, Bispectrum of ocean waves, in Time Series Analysis [M], M. Rosenblatt, Ed. New York: Wiley, 1963: 125 - 139.
- [2] M. B. Zadro and M. Caputo. Spectral, bispectral analysis and Q of the free oscillations of the earth [J]. Suppl. al Nuovo Cimento, 1968, 6: 67 - 81.
- [3] P. J. Huber, B. Kleiner, T. Gasser, and G. Dumermuth. Statistical methods for investigating phase relations in stationary stochastic processes [J]. IEEE Trans. Audio Electroacoust., 1971, AU-19: 78 - 86.
- [4] T. Sato, K. Sasaki, and Y. Nakamura. Real-time bispectral analysis of gear noise and its applications to contactless diagnosis [J]. J. Acoust. Soc. Amer., 1977, 62: 382 - 387.
- [5] T. Sato, T. Kishimoto, and K. Sasaki. Laser Doppler particle measuring system using nonsinusoidal forced vibration and bispectral analysis [J]. Appl. Opt., 1978, 17: 667 - 670.

- [6] Y. C. Kim and E. J. Powers. Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions [J]. IEEE Trans. Plasma Sci., 1979, PS-7: 120 - 131.
- [7] G. T. Zhou and G. B. Gannakis. Polyspectral analysis of mixed processes and coupled harmonics [J]. IEEE Trans. Sig. Process., 1996, 42: 943 - 958.
- [8] A. V. Dandawate, G. B. Gannakis. Asymptotic theory of mixed time averages and kth-order cyclic moment and cumulant statistics [J]. IEEE Trans. Information Theory Jan. 1995, 41: 216 - 232.
- [9] 王宏志. 乘性噪声中谐波恢复及耦合谐波估计算法研究 [D]. 博士学位论文, 长春: 吉林工业大学, 2000.

作者简介:



王宏志 1961 年生, 1983 年毕业于天津大学电子工程系, 分别于 1993 年和 2000 年在吉林工业大学获硕士和博士学位. 现为吉林学院计算机科学与工程学院教授. 研究方向为高阶统计量和高阶循环统计量的理论及应用. 发表论文 20 余篇.

王树勋 1946 年生, 1970 年毕业于清华大学电机系, 1983 年在吉林工业大学电子工程系获工学硕士学位. 现为吉林工业大学副校长、教授、博士生导师. 主要研究方向为高阶统计量在数字信号处理中的应用及微计算机应用. 已出版著作 3 部, 发表论文 50 余篇.



戴逸松 1936 年生, 1958 年清华大学无线电系毕业. 现为吉林工业大学信息学院教授、博士生导师. 研究方向为噪声测量与应用、微弱信号检测技术. 多次获国家及部委奖励, 发表论文 80 余篇.