

快速递归傅里叶变换的误差分析及高精度实现

曹珍富

(哈尔滨工业大学数学系, 哈尔滨 150001)

摘要: 本文主要研究单系数递归傅里叶变换算法的快速实现所带来的误差问题, 例如, 讨论了由于系数误差而产生的对递归运算的误差以及对整个系统的频率输出所产生的影响, 证明了该算法的替代误差无论在幅值上还是相位上都具有阶 $O(\sqrt{N})$. 在此基础上, 在限制输出精度的情况下, 找出对系数差应有的限制, 从而找出“高精度实现”的途径.

关键词: 单系数递归傅里叶变换算法; 快速实现; 误差分析; 高精度实现

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0133-03

Error Analysis and High-Precision Realization of Fast Speed Recursive DFTs

CAO Zhen-fu

(Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: In this paper, we mainly discuss error problem which was brought about by fast speed realization of recursively computing DFTs. For example, we discuss the effect of coefficient error on the error of recursively computing and frequency output of the whole system. And we prove that the error of fast speed recursively computing of N length DFTs has order of $O(\sqrt{N})$.

Key words: recursively computing DFTs; fast speed realization; error analysis; high-precision realization

1 引言

1987年前后,著名学者张彦仲在他的一些文章里^[1-3]提出了一种单系数递归傅里叶变换算法,这种算法仅需一个复系数就可以计算全部 N 个频率分量值,而且具有形式简单、成本低、便于硬件实现等特点,引起了数字信号处理界的广泛关注^[4]. 本文作者在研究中发现^[5,6],这一算法限制序列长度为素数的条件太苛刻,它不便于与序列长度为 2^n 的 FFT 进行比较. 所以,本文将这一算法进行了全面推广,使该算法的应用范围扩大,并与以往的算法具有可比性.

本文将对上述提到的一般算法中的误差问题进行研究,讨论由于系数误差而产生的对递归运算的误差以及对整个系统的频率输出所产生的影响. 在此基础上,在限制输出精度的情况下,找出对系数差应有的限制,从而找出“高精度实现”的途径.

2 单系数递归傅里叶变换算法

这是熟知的^[4],输入序列 $x(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$) 的 N 点离散傅里叶变换为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, k=0, 1, \dots, N-1$$

其中 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$, $j = \sqrt{-1}$. 如果长度 $N = p$ 为素数时,上

述 DFT 运算中的非零频率分量可以仅用一个复系数 W_p^D 按下列方式作 $(p-1)$ 次递归求出:

$$\begin{cases} y_k(m) = W_p^D y_k(m-1) + u_k(m) \\ y_k(0) = u_k(0) \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, (p-1), m=1, 2, \dots, (p-1)$$

即 $X(k) = y_k(p-1)$, 其中 $\{u_k(m)\}$ 是输入序列的重排, 由 $u_k(m) = x((p-1-m)k^{-1}D_p)$ 决定, 这里的 k^{-1} 是 k 在域 $GF(p)$ 中的逆, D 是一个可选择的参数, 满足 $1 \leq D < p$.

这就是张彦仲算法. 可以看出该算法仅适用于输入序列长为素数的 DFT. 为了扩大它的应用范围, 文献^[5,6]对上述算法作了进一步推广, 其推广算法如下:

$$\begin{cases} y_k(n) = W_N^D y_k(n-1) + v_k(n) \\ y_k(1) = v_k(1), k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

式中 $v_k(N-j) = u_k((i-1)N_p + j)$

$$u_k(j) = \begin{cases} x((m-1)N_p + j), 1 \leq j \leq N_p \\ 0, N_p < j \leq N \end{cases}$$

$$D = (N, k), N_p = N/D, k_p = k/D, i-1 \cdot q \pmod{D}, j \cdot k_p^{-1} \left(\frac{-q - (j-1)}{D} \right) \pmod{N_p}, k_p^{-1} k_p \cdot 1 \pmod{N_p}$$

$$\text{其中} \begin{cases} X(N) = X(0) = \sum_{n=1}^N x(n), \\ X(k) = y_k(N-1), k=1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

可以看出,张彦仲算法和文献[5,6]对它的推广算法虽然适用范围不同,但却有几乎相同的形式,这对误差分析将带来方便.如果认为输入序列及其线性组合是绝对精确的,在考虑误差时将这两种算法不加区别.

3 单系数递归傅里叶变换误差分析

本文研究的对象是这样一个递归运算式:

$$\begin{cases} y_k(n) = W_N^D y_k(n-1) + u_k(n) \\ y_k(0) = u_k(0) \end{cases}$$

$$k=1, 2, \dots, (N-1), n=0, 1, 2, \dots, (N-1),$$

可以把这个形式看作一个系数是 W_N^D 的一阶无限冲激响应数字滤波器(IIR),这一滤波器的系统函数为:

$$H(z) = \frac{1}{1 - W_N^D z^{-1}}$$

而第 k 个频率值 $X(k)$ 则可以看作是对序列 $u_k(n)$ 的第 $(N-1)$ 个输出值,即 $H(z)$ 系统的最后一个递归值.

为了便于分析,将 $H(z)$ 变成一个具有实系数的函数:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - W_N^D z^{-1}} \cdot \frac{1 - W_N^{-D} z^{-1}}{1 - W_N^{-D} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - \cos(2D/N)z^{-1} - j\sin(2D/N)z^{-1}}{1 - 2\cos(2D/N)z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned} \quad (1)$$

根据式(1),可将系统看作是一个实系数二阶无限冲激响应数字滤波器.其简单结构见图1.

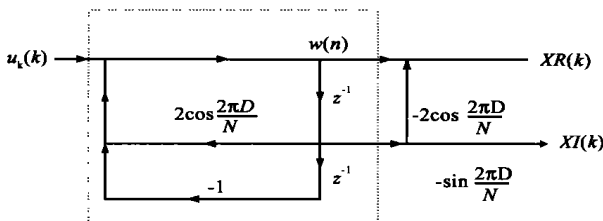


图1 实系数二阶无限冲激响应数字滤波器

在图1中, $XR(k)$ 和 $XI(k)$ 分别代表 DFT 运算后输出的实部分量和虚部分量,其核心部分就是虚线框内的二阶滤波器.引入 $w(n)$, 则式(1)给出

$$\begin{cases} w(n) = 2\cos(2D/N)w(n-1) - w(n-2) + u(n) \\ XR(k) = w(N-1) - \cos(2D/N)w(N-2) \\ XI(k) = -\sin(2D/N)w(N-2) \end{cases}$$

在输入序列长度 N 很大的情况下,计算 $w(N-1)$, $w(N-2)$ 的乘法次数很多,足以忽略掉 $XR(k)$ 与 $XI(k)$ 增加的 2 次

$$\text{tg}(\theta) = \text{tg}(\theta_0) = \frac{\sin \theta_0 w_0(N-2)(w(N-1) - \cos \theta_0 w(N-2)) - \sin \theta_0 w(N-2)(w_0(N-1) - \cos \theta_0 w_0(N-2))}{(w(N-1) - \cos \theta_0 w(N-2))(w_0(N-1) - \cos \theta_0 w_0(N-2)) + \sin^2 \theta_0 w(N-2)w_0(N-2)}$$

由于 $\text{tg} \theta_0 = \frac{-\sin \theta_0 w_0(N-2)}{w_0(N-1) - \cos \theta_0 w_0(N-2)}$, 则

$$\theta = \theta_0 + \frac{\sin^2 \theta_0 w(N-2)w_0(N-2)}{w(N-1) - \cos \theta_0 w(N-2) + \frac{\sin^2 \theta_0 w(N-2)w_0(N-2)}{w_0(N-1) - \cos \theta_0 w_0(N-2)}}$$

系数乘法.为了减少 $w(n)$ 递归运算的乘法次数,适当选择 D 值,使 $\cos(2D/N) \approx 2^{-m}$ (m 为正整数),这样,在计算 $w(N-1)$ 所须的 $N-2$ 次乘法运算就可以用 $N-2$ 次移位代替了(2 进制移位).在实际应用中,移位运算所须时间要比乘法运算时间少许多,从而使整个系统在结构不复杂的情况下成为一个高速实现系统,其结构见图2.

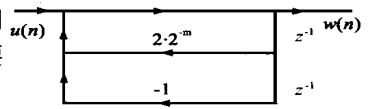


图2 快速实现系统

但是,作为代价,该系统被迫牺牲了它原来的精度.很明显用 2^{-m} 代替 $\cos(2D/N)$ 作为系数,必会使输出结果产生误差.这里假定原系统的输出是绝对精确的.现在就讨论系数差所引起的系统误差.由于替代误差会对系统最后的结果的幅值和相位都会产生误差,本文将重点分析幅度误差.

定理 快速递归傅里叶变换算法替代误差,无论在幅值上还是相位上都具有阶 $O(\sqrt{N})$.

证明:

$$\begin{cases} \theta = \cos(2D/N) - 2^{-m}, \text{ 设} \\ \theta_0 = (2D/N) = D_0, \text{ 为理想相角} \\ \theta = \arccos(2^{-m}) = \theta_0 + \Delta\theta, \text{ 为实际相角} \\ \theta = \cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \sin \theta_0 \Delta\theta \end{cases}$$

每次递归运算的误差都受 $\Delta\theta$ 的影响.首先讨论一下一次递归运算产生的误差,进而同 $N-1$ 递归运算相比较.

易见一次递归误差(相对) $\Delta\theta \approx 2^{-k} / k_0$, 其中 $k_0 = 2\cos(2D/N)$; 故是 $\Delta\theta$ 的同阶收敛.

可以想象,递归 $N-1$ 次误差,将是以上 $\Delta\theta$ 的累积值.又由于系统是一个闭环过程,对大的误差有一定的抑制能力,因此递归 $N-1$ 次误差的输出误差将是二者的折衷.

设 $\epsilon = \frac{\sqrt{XR^2 + XI^2}}{X(k)}$ 为系统输出的相对误差.令 $\frac{1}{\sqrt{2}\sin \theta_0} = F_1$, 则可得 $\epsilon \leq 2F_1 \sqrt{N}$. 可见输出频域值误差与 \sqrt{N} 同阶.

下面讨论相位误差:

原来的相位

$$\theta_0 = \arccos \frac{XR_0(k)}{X(k)} = \arccos \frac{1 - \sin \theta_0 w_0(N-2)}{w_0(N-1) - \cos \theta_0 w_0(N-2)}$$

现在的相位

$$\theta = \arccos \frac{XR(k)}{X(k)} = \arccos \frac{1 - \sin \theta w(N-2)}{w(N-1) - \cos \theta w(N-2)}$$

相位正切

$$\leq \frac{(N-1)(1 - \cos \theta_0)}{w(N-1) - \cos \theta_0 w(N-2) \sin^2 \theta_0 w(N-2)} \leq \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \sqrt{N} k$$

又 $\Delta\theta = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0}$, 所以 $\Delta\theta \leq 2(1 - \cos \theta_0) \sqrt{N}$.

从此可以看出,快速递归傅里叶变换算法替代误差,无论在幅

值上还是相位上都与 $O(\sqrt{N})$ 同阶. 证毕.

这个定理给出的结果是比较精确的, 证明过程也给出了实现的手段. 一般工程分析手段大约只能达到阶 $O(N)$. 下面以工程上的系数量化法为例来具体说明这个问题.

这类分析方法是利用有限字长效应理论, 将原系统看作线性系统, 把量化误差看作噪声干扰信号. 在输出端作用的结果, 用线性系统的分析方法来分析, 用数理统计方法通过对噪声信号的处理找出误差 (方均值). 这里把系数替代看作是系数的量化, 现分析如下:

原系统的系统函数 $H(z) = \frac{w_0(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 - k_0 z^{-1} + z^{-2}}$, 量化后的实际系统函数

$H(z) = \frac{w(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 - kz^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{(1 - k_0 z^{-1} + z^{-2}) - kz^{-1}}$
 设 $H(z) = H(z) + E(z)$, 则

$E(z) = H(z) - H(z) = \frac{1}{(1 - k_0 z^{-1} + z^{-2}) - kz^{-1}} - \frac{1}{1 - k_0 z^{-1} + z^{-2}} = \frac{kz^{-1}/(1 - k_0 z^{-1} + z^{-2})}{1 - k_0 z^{-1} + z^{-2}}$, 即一个实际系统 $H(z)$ 可以看作是由一个理想系统 $H(z)$ 与一个偏差系统 $E(z)$ 并联组成. 求偏差系统的方均值

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(j\omega)|^2 \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{E(z)E(z^{-1}) \cdot dz}{z} \\ &= \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^3}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2} dz = k^2 \left(\frac{\sin 3\theta_0}{2\sin^3 \theta_0} - \frac{3\cos \theta_0}{2\sin^2 \theta_0} \right) \\ &= \frac{k^2}{\sin^2 \theta_0} \left(2k_0^2 - \frac{3}{2}k_0 - 1 \right) \end{aligned}$$

则 $\sigma = \frac{k}{\sin \theta_0} \sqrt{2k_0^2 - \frac{3}{2}k_0 - 1}$. 递归 $(N-1)$ 次相对误差

$$\begin{aligned} \sigma &\leq (N-1) \cdot \frac{(N-1)k}{\sin \theta_0} \sqrt{2k_0^2 - \frac{3}{2}k_0 - 1} \\ &\leq \frac{\sqrt{2N}k}{\sin \theta_0} \cdot k_0 = \frac{2\sqrt{2N}}{\text{tg } \theta_0} \end{aligned}$$

4 高精度实现方法

根据前面对误差的讨论, 可以看出, 序列长度增加, 使 D 的取值范围灵活, 就有机会使 $\cos \theta_0$ 更接近 2^{-m} 来减少; 另一方面序列长度增加本身就意味着 N 值增加, 而误差恰与 N 有关. 因此要获得较高的精度, 要考虑选择 N 值和 D 值,

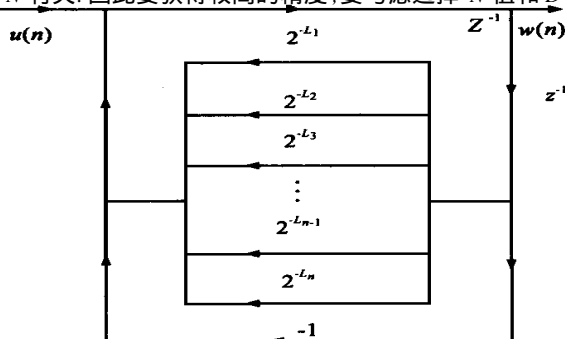


图 3 多个并行移位寄存器实现

一般最佳的 N 值和 D 值是要靠经验来获得的. 尽管如此, N 和 D 的选择是提高精度的一个途径.

另一方面, 从改善系统结构入手, 可以证明, 任何一个实数都可用下面级数表示:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} a(i)2^i, a(i) \in \{0, 1\}$$

那么 $2\cos \theta_0$ 也不例外. 用多个并行移位寄存器的线性组合来代替 $2\cos \theta_0$. 寄存器的个数越多, 误差越小, 输出的精度就越高. 如图 3 所示. 其中 $2\cos \theta_0 = \sum_{i=1}^n 2^{-L_i}$, 系数为 0 的项就不必列出. 由于一位寄存器是并行排列的, 其位移时间不会增加, 但精度却大大提高了.

由 $\sigma \leq 2F_1 \sqrt{N}$, 如果对误差限制是 $|\sigma| < \epsilon$, 那么必须 $N < (\epsilon / (2F_1 \sqrt{N}))^2$. 其中, $F_1 = 1/(\sqrt{2} \sin \theta_0)$, N 值已知, 因此就得出系数差的范围. 又由式 $2\cos \theta_0 = \sum_{i=1}^n 2^{-L_i}$ 就能确定所需移位寄存器的个数及结构.

由于数字信号系统本身存在着如舍入、截尾、溢出等误差, 因此在确定移位寄存器的个数时要考虑这个因素, 把替代误差限制在上述几个误差的同一数量级内就可以了. 否则, 不顾这些因素增加寄存器个数也是徒劳的, 不仅不会把误差限制在应有的精度, 还会使系统结构复杂, 造价昂贵.

参考文献:

[1] Zhang Y Z. Optimum Recursive Computation of Prime Length DFTs [R]. Digest of Papers, the 20th International Electronics Convention of IREE, Melbourne, Australia, Oct. 1985:583-586.

[2] Zhang Y Z. Fast Implementation of Recursive DFTs [A]. 27. D6. 3. Proc. Of IEEE International Conference on ASSP [C], Glasgow, U. K., May 1989.

[3] 张彦仲. 递归傅里叶变换的最佳系数 [J]. 信号处理学报, 1987, 3(1):31-36.

[4] 张彦仲. 数字信号处理系统及其实现 [M]. 科学出版社, 1989, 167-183.

[5] 曹珍富, 傅唯大. 长为 p^l 的快速递归傅里叶变换算法 [J]. 计算机应用研究, 1989, 6(6):1-2.

[6] 曹珍富. 基于递归计算的 DFT 反卷积高速算法 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 1997, 29(6):4-6.

作者简介:



曹珍富 1962 年出生, 1983 年和 1999 年分别获哈尔滨工业大学工学学士和理学博士学位; 1987 年和 1991 年分别被破格由助教越级晋升为副教授和教授. 现任哈尔滨工业大学博士生导师, 国家信息安全技术专家组成员、国家信息化专家咨询组成员等. 主要研究领域: 数论、现代密码学、信息安全、网络安全以及数字信号处理等. 已发表学术论文 200 余篇, 独立出版专著 4 部.