基于梯形波分析信号的一种新方法

张其善, 王 钢, 韦玉川
(北京航空航天大学电子工程系, 北京 100083)

摘 要: 本文以电子学中的一种常见波形——梯形波为研究对象, 考虑了它的主要性质, 并利用双正交性质, 研究了一个信号如何才能表示成梯形波形式的问题. 对非正交函数的研究是信号分析理论的有益补充.

关键词: 梯形波; 双正交函数; 信号分析
中图分类号: TN911.7 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2001) 04-0560-03

A New Method of Signal Analysis Based on Trapezoidal Wave

ZHANG Qi-shan, WANG Gang, WEI Yu-chuan
(Department of Electronic Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Trapezoidal wave is a familiar wave in electronics. This paper considers its main properties, and by using biorthogonal function, a signal under certain conditions can be easily expanded as a trapezoidal wave series. It is used for the theory of signal analysis to research nonorthogonal function.

Key words: trapezoidal wave; biorthogonal function; signal analysis

1 引言

信号分析的一个基本问题是把一个复杂信号分解为一系列基本信号的叠加, 选择不同的基本函数, 可以得到不同的分析方法. 半个世纪以来, 在无线电技术领域之中, 正余弦函数得到普遍应用, 以正余弦函数为基础的傅立叶变换方法一直被视为信号与系统分析的主要工具, 在信号分析和信息传输中一直起着主导作用. 然而随着电子技术特别是脉冲技术和计算机技术的飞速发展, 人们发现仅有传统的傅立叶分析是远远不够的, 随即开始积极寻找适应各种情况的新的分析方法, 用到的基本函数包括 Rademacher 函数、Walsh 函数[1], 以及最新定义的各种各样的小波函数. 在探索研究新的分析理论与技术方面, 关于 Walsh 函数的复制理论[2], 桥函数理论[3]也相继提出.

由于正交函数在数学上的简单性, 传统的信号分析方法一直以正交函数为基础. 象正余弦函数一样, 方波、三角波、梯形波, 虽然也是现代电子学的基本波形, 但由于缺乏象正余弦函数一样的正交性, 如何把一个任意信号分解为不同频率的电子学常见波形在理论上和技术上一直是一个难题, 所以, 人们只能利用傅立叶变换把信号从频域变到时域来研究, 这就严重地制约了常见电子波形在信号处理和信息传输中的实际应用. 借助数论工具, 首先把正余弦函数表示为不同频率的常见波形的叠加, 并进一步利用泛函分析中双正交函数的概念, 找到了把任意信号分解为常见波形的方法, 在原则上初步回答了这个问题. 文[5]对方波进行了详细的分析. 文[6]对一般周期函数进行了分析. 本文将以梯形波为研究对象, 考虑它的主要性质, 回答了如何才能把一个信号表示成梯形波形式等问题.

2 梯形波系及其性质

定义1 函数 $X(x)$、$Y(x)$、分别称作偶梯形波、奇梯形波:

$$X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & -\frac{\pi}{2}\le x\le-\frac{\pi}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3}{4}\pi\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi\\ \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right), & \frac{5}{4}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi\end{cases}$$

$$Y(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3}{4}\pi\\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(\pi-x), & \frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{5}{4}\pi\le x\le\frac{7}{4}\pi\\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(x-2\pi), & \frac{7}{4}\pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

收稿日期: 1999-09-28; 修回日期: 2000-05-20
基金项目: 国家自然科学重点基金(No.69931050); 国家自然科学基金(No.69972002)

梯形波的傅立叶级数表达式为:

$$X(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}A(n)\cos nx$$

$$Y(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}B(n)\sin nx$$

其中:
$$A(n)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n-1}\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n^2}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$B(n)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n^2}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

由 $A(m)A(n)=A(mn)$, $B(m)B(n)=B(mn)$ 知道: $A(m)$, $B(m)$ 为完全积性函数.

定义 2　称由 $\frac{8}{\pi^2}$, $X(x)$, $Y(x)$, $X(2x)$, $Y(2x)$, ……, $X(nx)$, $Y(nx)$ ……组成的函数系为梯形波函数系.

下面讨论梯形波系的基本性质:

性质 1　线性无关性, 即梯形波系为线性无关的.

证明**:** 利用数学归纳法, 结论易证, 过程从略.

性质 2　完备性

首先介绍一个函数, 即墨比乌斯函数:

$$\mu(d)=\begin{cases}1, & d=1\\ (-1)^r, & d=p_1\cdots p_r\quad p_1,\cdots,p_r\text{ 是两两不同的素数}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

墨比乌斯函数有一个十分重要的性质:

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n=2,3,\cdots\end{cases}$$

利用墨比乌斯函数可以得到如下两个级数:

$$\sin x=\frac{\pi^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)B(n)Y(nx)$$

$$\cos x=\frac{\pi^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)A(n)X(nx)$$

由于正余弦函数系在 $L^2(-\pi,\pi)$ 上是完备的, 且能有梯形波系来表示, 所以梯形波系也是完备的.

性质 3　非正交性:

$$\langle X(mx),X(nx)\rangle=\frac{2\pi}{3}A\left(\frac{[m,n]^2}{mn}\right)$$

$$\langle Y(mx),Y(nx)\rangle=\frac{2\pi}{3}B\left(\frac{[m,n]^2}{mn}\right)$$

其中: $[m,n]$ 表示 m 和 n 的最小公倍数.

3　信号分解的方法

首先定义两个函数: $g_n(x)=\frac{\pi}{8}\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})B(\frac{n}{d})\sin(dx)$, $n=1,2,\cdots$

$$h_n(x)=\frac{\pi}{8}\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})A(\frac{n}{d})\cos(dx),\ n=1,2,\cdots$$

结论 1　对任意的两个自然数 m, n, 有如下结论:

$$\langle X(mx),h_n(x)\rangle=\delta_{mn},\ \langle Y(mx),g_n(x)\rangle=\delta_{mn}$$

这里: $\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$.

结论 2　梯形波系 $\frac{8}{\pi^2}$, $X(x)$, $Y(x)$, $X(2x)$, $Y(2x)$, …… $X(nx)$, $Y(nx)$ ……和函数系 $\frac{\pi}{16}$, $h_1(x)$, $g_1(x)$, $h_2(x)$, $g_2(x)$, ……, $h_n(x)$, $g_n(x)$, ……是双正交的.

结论 3　若在 $L^2(-\pi,\pi)$ 中, $f(x)$ 有梯形波级数:

$$f(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}[C(n)X(nx)+D(n)Y(nx)]\tag{1}$$

则梯形波的系数由以下各式决定:

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$C(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)h_n(x)dx,\ D(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx$$

并且系数是唯一的.

证明　由结论 2, 易知 $C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $C(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)h_n(x)dx$, $D(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx$ 三式均成立.

下面证明唯一性:

假设 $f(x)=C'_0+\sum_{n=1}^{\infty}[C'(n)X(nx)+D'(n)Y(nx)]$ (2)

由式(1)~(2), 得到:

$$0=(C_0-C'_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(C(n)-C'(n))X(nx)+(D(n)-D'(n))Y(nx)]$$

对上式两端分别从 $-\pi$ 到 π 积分, 得到 $C_0-C'_0=0$. 把 $X(nx)$ 和 $Y(nx)$ 代入上式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{d|n}(C(d)-C'(d))A(\frac{n}{d})\cos(nx)+\sum_{d|n}(D(d)-D'(d))B(\frac{n}{d})\sin(nx)\right]=0.$$

则 $\sum_{d|n}(C(d)-C'(d))A(\frac{n}{d})=0$,

$$\sum_{d|n}(D(d)-D'(d))B(\frac{n}{d})=0.$$

由文[7]知道:

$$C(d)-C'(d)=\sum_{d|n}0\cdot\mu(\frac{n}{d})\cdot A(\frac{n}{d})=0,$$

$$D(d)-D'(d)=\sum_{d|n}0\cdot\mu(\frac{n}{d})\cdot B(\frac{n}{d})=0.$$

综合以上结论, 得到: $C_0=C'_0$, $C(d)=C'(d)$, $D(d)=D'(d)$. 所以, $f(x)$ 满足唯一性. 证毕

推论: 若 $f(x)\in L^2(-\pi,\pi)$, $f(x)$ 的梯形波级数:

$$f(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}[C(n)X(nx)+D(n)Y(nx)]$$

若 $f(x)$ 的傅立叶级数为: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a(n)\cos nx+$

$b(n)\sin nx]$

则 $a_0 = C_0$, $a(n) = \sum_{d|n} A\left(\frac{n}{d}\right) C(d)$, $b(n) = \sum_{d|n} B\left(\frac{n}{d}\right) D(d)$.

4 总结

本文从信号处理中的常见波形——梯形波出发,研究了它所组成的函数系的一些重要性质,并利用数论中的一个古老定理:墨比乌斯变换及其反演公式,得到了一种基于梯形波系的信号处理的新方法.

参考文献:

[1] H.Harmuth 著,张其善,柳重堪译.序率理论基础与应用[M].人民邮电出版社,1992.

[2] 张其善,张有光.桥函数理论及应用[M].国防工业出版社,1992.

[3] 饶雪芳,张其善.广义桥函数理论及应用[M].国防工业出版社,1998.

[4] 郑君里,杨为里,应启珩.信号与系统[M].高等教育出版社,1981.

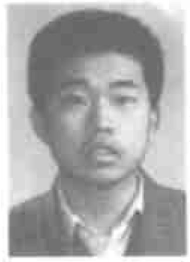
[5] Yuchuan Wei, Nanxian Chen. Square wave analysis [J]. Journal of Mathematical Physics, 1998, 39(8).

[6] Yuchuan Wei, Frequency analysis based on general periodic functions [J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 40(6).

[7] 潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京大学出版社,1992.

作者简介:

张其善 北京航空航天大学教授、博士生导师,国家级有突出贡献的科学技术专家.中国电子学会会士、美国 IEEE 高级会员.



王 钢 1999 年毕业于北京科技大学,获理学硕士学位.现在北京航空航天大学电子工程系通信与信息系统博士点攻读博士学位.主要从事信息传输与处理、编码等方面的研究.