

非对称周期查询限定服务系统解析

李俊生¹, 彭兵¹, 赵东风²

(1. 云南省蒙自师范专科学校计算机科学与技术系, 蒙自 661100; 2. 云南大学信息与电子科学系, 昆明 650091)

摘要: 本文利用嵌入马尔可夫链理论和概率母函数的方法, 对局域网络中离散时间状态下, 有限缓冲器的非对称周期查询限定 ($k=1$) 服务系统 $\prod_i G_i / \prod_i G_i / 1(\prod_i G_i) / \prod_i S_i$ (FCFS) 模型进行了解析, 获得了系统第 i 队列的查询周期、信息分组平均队长、信息分组平均延时和信息分组丢失率的数学解析表达式. 计算机模拟的结果表明了仿真与理论的一致性.

关键词: 非对称周期查询; 概率母函数; 队长; 延时; 丢失率

中图分类号: TN913.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 04-0503-08

Analysis of the Asymmetric Cyclic Polling System with Limited Service

LI Jun-sheng¹, PENG Bing¹, ZHAO Dong-feng²

(1. Mengzi Junior College Level Normal School, Mengzi, Yunnan 661100, China;

2. Department of Information and Electronics Science, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: A new queueing model $\prod_i G_i / \prod_i G_i / 1(\prod_i G_i) / \prod_i S_i$ (FCFS) is set up for the support of an asymmetric polling model with limited ($k=1$) service in discrete time, and with limited buffers in LAN (Local area network). According to the embedded Markov chain theory and the generating function, a mathematical analysis has been developed in this paper. The mean polling cycle, the mean values of queue length, the mean delay, and the packet loss rate of the polling system are explicitly obtained. The results of computer simulation are in concordance with the theoretical analysis.

Key words: asymmetric cyclic polling; probability generating function; queue length; delay time; loss rate

1 引言

周期查询式系统的出现至今已有 20 多年. 该理论在计算机集成制造系统 (CIMS)、通信网络、ATM 等方面都得到了广泛应用. 因此, 该课题的研究一直受到国内外学者关注, 并取得了巨大的进步^[1~7]. 本文在此基础上, 以一种全新的角度, 用系统第 i 队列为特殊研究对象, 再通过查询周期将其与其他队列有机地联系起来, 使理论分析获得巨大的简化, 从而建立了局域网络中离散时间状态下, 有限缓冲器的非对称周期查询限定 ($k=1$) 服务 $\prod_i G_i$ (一般到达) / $\prod_i G_i$ (一般服务) / 1 (一个服务器) / $\prod_i G_i$ (一般转换时间) / $\prod_{i=1}^N S_i$ (有限缓冲器) / FCFS (先到先服务) 模型:

- (1) 不同的业务进入不同的队列, 所以其缓冲区容量也可根据业务不同而异.
- (2) 到达任一队列的信息分组数是任意分布的.
- (3) 服务为一般服务.
- (4) 队列数为 N , 服务窗口数为 $k(k=1)$, 但由于其对称

性 (即其参数相等) 所以为简单计只分析任一服务台即可.

(5) 服务台对 N 个队列的服务是限定 ($k=1$) 服务, 即对任一队列 i , 服务器服务一个信息分组 (至多只 1 个) 后, 就转向服务下一个队列 (若队列是空时, 则直接转向下一队列), 而服务时间可视业务不同而异.

(6) 对于某一具体队列, 服务规则为先到先服务 (FCFS).

2 解析参量的设定

(1) 系统的状态是统计平稳的.

(2) 在单位时间内到达第 i 个输入缓冲队列的信息分组数是独立、同分布的, 其分布的概率母函数、均值和方差分别为 $A_i(z)$, $i = A_i(1)$, $\sigma_i^2 = A_i(1) - \frac{A_i^2}{i} + A_i(1)$.

(3) 对第 i 个输入缓冲队列成功服务一个信息分组的时问分布的概率母函数、均值和方差分别为 $B_i(z)$, $i = B_i(1)$, $\sigma_i^2 = B_i(1) - \frac{B_i^2}{i} + B_i(1)$.

(4) 第 i 队列到第 $i+1$ 队列之间的查询转换时间变量服从于一个相互独立的概率分布, 其分布的概率母函数、均值和方差分别是 $i(z)$, $i = i(1)$, $\sigma_i^2 = i(1) - \frac{i^2}{i} + i(1)$.

3 数学解析

3.1 查询周期

首先, 设 t_n 时刻系统第 i 队列的状态概率母函数为 $G_{i_n}(z)$, 它的查询周期定义为服务器连续两次服务于第 i 队列的时间间隔, 其分布的概率母函数和均值可表为:

$$i(z) = \prod_{j=1}^N j(z) \{ B_j(z) [1 - G_{j_n}(z)] + G_{j_n}(0) \} \quad (1)$$

$$i = \prod_{j=1}^N \{ j + [1 - G_{j_n}(0)] j \} \quad (2)$$

其次, 设 t_n 时刻系统第 i 队列缓冲器中某一信息分组开始接受服务, 此时缓冲器中的信息分组数为 $i(t_n) = i$, 其概率为 $p_i(i(t_n) = i)$, t_{n+1} 时刻系统的服务器为其成功地服务了一个信息分组, 并转向其他队列服务, 最后又回到该队列. 如此期间 (即一个查询周期内) 到达系统的第 i 队列的信息分组数为 $i(t_n)$, 则此时该队列的状态为 $i(t_n) + i(t_n) - 1$; 其概率记为 $p_i(i(t_{n+1}) = n)$. 即在稳态下, 查询周期内系统第 i 队列到达 j 个信息分组的概率为 $P_{a_i, n_i}(j)$. 则在负载 $\rho = \sum_{i=1}^N (\rho_i + \rho_i) < 1$ 的条件下, t_{n+1} 时刻系统第 i 队列的状态概率母函数为:

$$G_{i_{n+1}}(z) = \{ i(A_i(z)) - B_i(A_i(z)) [1 - G_{i_n}(0)] \} \{ \frac{1}{z} B_i(A_i(z)) [G_{i_n}(z) - G_{i_n}(0)] + G_{i_n}(0) \}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

由式(1)~(3)有 $1 - G_{i_n}(z) = i_i \quad (4)$

由此可得系统第 i 队列的平均查询周期 i_i :

$$i_i = \left[\prod_{j=1}^N j + \prod_{j=1}^N j j \right] [1 - j j]^{-1}, i=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

3.2 输入缓冲器的容量为无限情况时的系统性能

3.2.1 缓冲器的平均队长 首先定义缓冲器的信息分组排队队长, 它等于稳态时某时刻缓冲器中还有的等待服务的信息分组数的平均. 利用式(3)、(4)可得系统第 i 队列的信息分组的平均排队队长:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{2} (1 - \rho_i)^{-1} (1 - \rho_i)^{-1} \{ \rho_i [2(1 - \rho_i - \rho_i + \frac{2}{i} \rho_i) + \frac{2}{i} \rho_i - \frac{3}{i} \rho_i + \frac{2}{i} (1 - \rho_i) B_i(1)] + \rho_i A_i(1) + \frac{2}{i} \rho_i (1) \} \quad (6)$$

3.2.2 系统中信息分组平均时延 \bar{w} 时延定义为一个信息分组进入缓冲器到其被传出去前这段时间, 即这一信息分组在该缓冲器中的排队时延与服务时间之和的均值, 则可得^[7]:

$$W_i(A_i(z)) = \frac{B_i(A_i(z)) [G_{i_n}(z) - G_{i_n}(0)]}{z[1 - G_{i_n}(0)]} \quad (7)$$

由此信息分组在系统中的平均时延为:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{2} \rho_i^{-2} \rho_i^{-1} (1 - \rho_i)^{-1} (1 - \rho_i)^{-1} \{ \rho_i [2(1 - \rho_i - \rho_i + \frac{2}{i} \rho_i) + \frac{2}{i} \rho_i + \frac{2}{i} \rho_i - \frac{3}{i} \rho_i + \frac{2}{i} (1 - \rho_i) B_i(1)] + \rho_i A_i(1) + \frac{2}{i} \rho_i (1) \} - \frac{1}{i} + \rho_i \quad (8)$$

3.3 输入缓冲器的容量为有限情况时的系统性能 (S_i)

3.3.1 信息分组丢失率 由于缓冲器容量有限, 并考虑到业务的突发性, 当进入第 i 队列的突发信息分组数总和一旦超过其缓冲区容量 S_i 时, 信息分组将丢失. 因此, 系统第 i 队列的信息分组丢失率:

$$p_{Si} = 1 - \frac{1}{j!} G_{i_n}^{(j)}(0) \quad (9)$$

将式(3)计算出的 $G_{i_n}^{(j)}(0)$ (可通过数学机械化而实现^[8,9]), 代入式(9)即可获得第 i 队列的信息分组丢失率.

3.3.2 平均队长 \bar{q} 与平均时延 \bar{w} 由于队长长于 S_i 时将造成溢出, 所以在第 i 队列此时的实际信息分组到达率为:

$$\tilde{i} = i(1 - L_i) = i(1 - p_{Si}) \quad (10)$$

在此实际信息分组到达率下, 对缓冲容量为 S_i 的排队室, 其丢失率相对于原丢失率而言应视为接近于零, 然而丢失率不可视为零 (因为从式(9)即可看出, 但详细的分析情况及模拟结果我们将在后继文章中给出). 即此时可用无限缓冲容量的模型来近似估计系统的性能. 令此时有效到达第 i 队列的信息分组数的概率母函数、均值和方差分别为 $\tilde{A}_i(z)$, $\tilde{i} = \tilde{A}_i(1)$, $\tilde{i}^2 = \tilde{A}_i'(1) - \tilde{i}^2 + \tilde{A}_i(1)$. 利用前面 3.1, 3.2 的方法可估计系统第 i 队列的查询周期、缓冲器中信息分组平均排队队长和系统中信息分组平均时延分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{i}_i &= \left[\prod_{j=1}^N j + \prod_{j=1}^N j j \right] [1 - j j]^{-1} \quad (11) \\ \bar{q}_i &= \frac{1}{2} (1 - \tilde{\rho}_i)^{-1} (1 - \tilde{\rho}_i)^{-1} \{ \tilde{\rho}_i [2(1 - \tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_i + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i) + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i - \frac{3}{i} \tilde{\rho}_i + \frac{2}{i} (1 - \tilde{\rho}_i) B_i(1)] + \tilde{\rho}_i \tilde{A}_i(1) + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i (1) \} \quad (12) \\ \bar{w}_i &= \frac{1}{2} \tilde{\rho}_i^{-2} \tilde{\rho}_i^{-1} (1 - \tilde{\rho}_i)^{-1} (1 - \tilde{\rho}_i)^{-1} \{ \tilde{\rho}_i [2(1 - \tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_i + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i) + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i - \frac{3}{i} \tilde{\rho}_i + \frac{2}{i} (1 - \tilde{\rho}_i) B_i(1)] + \tilde{\rho}_i \tilde{A}_i(1) + \frac{2}{i} \tilde{\rho}_i (1) \} - \frac{1}{i} + \tilde{\rho}_i \quad (13) \end{aligned}$$

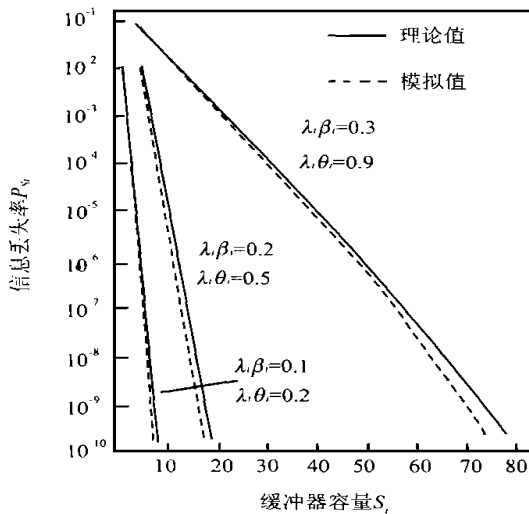


图1 第 i 终端的缓冲器容量与其丢失率的关系. 终端数 $N=5$, 负荷: $\rho = \sum_{i=1}^N (\rho_i + \rho_i) = 0.96$ 平均查询周期: $i = 25$ slots

4 数值计算与计算机模拟结果

抵达第 i 队列缓冲区的信息分组服从泊松分布,服务时间与查询转换时间服从定长分布,理论与计算采取相同的参数,结果如表 1、表 2 和图 1 所示。

为了检验理论的正确性,这里进行了计算机模拟,并假设

表 1 终端数 $N=6$, $\sum_{i=1}^N i(i+1) = 0.32$,缓冲区为无限,平均周期: (理) = 10.000000slots

i	λ_i	μ_i	ρ_i	\bar{q}_i (理)	\bar{q}_i (模)	\bar{w}_i (slots)(理)	\bar{w}_i (slots)(模)	\bar{w}_i (slots)(模)
1	0.01	1	1	0.105729	0.105664 ±0.000241	6.72900	6.73890 ±0.05810	10.000178 ±0.000181
2	0.01	1	2	0.105729	0.105839 ±0.000238	6.72900	6.74173 ±0.06018	10.000178 ±0.000180
3	0.01	2	1	0.105803	0.105988 ±0.000257	7.80300	7.83609 ±0.06420	10.000178 ±0.000180
4	0.02	2	2	0.226729	0.226920 ±0.000439	8.68229	8.71961 ±0.07001	10.000178 ±0.000180
5	0.01	3	1	0.105888	0.105817 ±0.000260	8.88800	8.91980 ±0.07156	10.000179 ±0.000180
6	0.03	3	2	0.373392	0.372224 ±0.000882	11.15467	11.18711 ±0.08464	10.000179 ±0.000181

表 2 令负荷 $\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i / \sum_{i=1}^N \mu_i = 0.75$,且 $\sum_{i=1}^N \mu_i = N$ slots,缓冲区为无限。

终端数	平均查询周期(理)(slots)	平均查询周期(模)(slots)	终端数	平均查询周期(理)(slots)	平均查询周期(模)(slots)
4	8.000000	7.999627 ±0.001574	25	50.000000	49.996790 ±0.009210
5	10.000000	10.000980 ±0.001980	40	80.000000	79.997670 ±0.013330
8	16.000000	15.998050 ±0.002950	50	100.000000	100.014000 ±0.02040
10	20.000000	20.003470 ±0.004100	80	160.000000	160.014800 ±0.029800
16	32.000000	32.003597 ±0.006070	100	200.000000	199.971900 ±0.038100
20	40.000000	40.003640 ±0.007530	200	400.000000	399.946600 ±0.073400

5 结束语

本文以一种全新的方法,建立了一种局域网中离散时间情况下、有限缓冲器的非对称周期查询限定 ($k=1$) 服务 $\sum_{i=1}^N G_i / \sum_{i=1}^N G_i / \sum_{i=1}^N S_i$ (FCFS) 模型,并得出了系统的第 i 队列的查询周期、平均队长、平均延时和信息分组丢失率的数学解析表达式,与一般现有的模型^[1,2,4]比较,具有表达式简单,处理问题更一般化的特点(其中 i 可变时,本模型将支持不同长度的信息分组)。在计算机模拟实验中,选取置信度为 95% 的概率取值的置信区。模拟实验结果显示了理论分析与仿真的一致性,进一步支持了理论分析的可行性。但若再考虑其它因素,比如优先权等,则需进一步研究。

参考文献:

[1] Hanoch Levy, Moshe Sidi, Polling systems: Application, modeling, and optimization [J]. IEEE Transactions on Communications, October 1990, 38(10):1750 - 1759.
 [2] 赵东风,李必海,郑苏民. 周期查询式限定服务排队系统研究 [J]. 电子科学学刊,1997,19(1):44 - 49.
 [3] A. C. Lavelha, J. Moreira de Souza, J. B. Ribeiro do Val. Approximate analysis of multiqueue systems with multiple cyclic servers [J]. Performance Evaluation, 1994, 20:391 - 412.
 [4] 逯昭义,王思明. 环形 LAN 存取方式建模的研究 [J]. 电子科学学刊,1994,3:148 - 157.
 [5] 杜光东,刘增基,胡征. 多种呼叫批到达多窗口排队模型 [J]. 电子学报,1992,20(1):11 - 16.

[6] Suit H., An analysis of statistical multiplexing in an ATM transport network [J]. IEEE JSAC, 1991, 9(3).
 [7] 李俊生,彭兵,赵东风等. 环形 LAN 多业务模型解析 [J]. 通信学报,1999,20(11):1 - 6.
 [8] 沈凤贤,丁英仁,赵文晖. Mathematica 手册 [M]. 北京:海洋出版社,1992.
 [9] 董安明. Mathematica 高级编程人员实例参考 [M]. 北京:学苑出版社,1994.

作者简介:



李俊生 1961 年生,硕士,副教授,主要从事计算机网络和宽带综合业务数字网的科研教学,已发表论文十多篇。



彭兵 1954 年生,硕士,副教授,主要从事 Internet 及计算机网络的科研教学,已发表论文十余篇。

赵东风 1957 年生,教授,主要从事计算机网络、一点多址通信、ISDN 和 CIMS 的科研教学,已发表论文四十余篇。