

椭圆锥带线的严格解

阮成礼

(电子科技大学, 四川成都 610054)

摘要: 本文研究椭圆锥带线的特性阻抗等基本参数. 假定中心导体带是无限薄理想导体, 传输的主模是 TEM 模, 通过坐标变换和共形映射, 椭圆锥带线变为平面周期性结构, 然后用椭圆积分变换处理变换后的有限宽带线问题, 得到了椭圆锥带线的严格解.

关键词: 椭圆锥带线; 坐标变换; 共形映射; 特性阻抗; 严格解

中图分类号: TN015; TN811 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 06-0829-03

Exact Solution of the Elliptic Cone Stripline

RUAN Cheng-li

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: The exact solution of the elliptic cone stripline is derived. The formulas are based on the TEM mode and perfect conductor assumptions. Using the coordinate transform and conformal mapping technique the elliptic cone stripline becomes a plane periodic structure, then using elliptic integral transform to handle the finite width stripline, the exact solutions including the characteristic impedance and capacitance per unit length are obtained.

Key words: elliptic cone stripline; coordinate system transform; conformal mapping; characteristic impedance; exact solution

1 引言

共形天线和共形传输线的深入研究, 使圆柱带线微带线^[1]、椭圆柱带线微带线^[2-4]、圆锥带线微带线以及椭圆锥带线微带线^[5]等在馈电和传输线过渡等方面得到应用, 成为必须解决的课题. 文献[5]首次给出了椭圆锥带线微带线的特性阻抗. 现在看来文献[5]是个近似解, 因为没有考虑坐标变换后有限宽带线问题, 而是当成无限宽处理. 这一近似解只有当导体带张角 $2\theta \ll 2\pi$ 时是正确的. 事实上考虑到场解是方位坐标的周期函数, 通过式(15)和(16)的坐标变换后得到一个周期性结构. 用 $\phi = \pm \pi$ 或 $\phi = \pm L/2$ 处的磁壁把周期结构带线分离成单一的带线, 然后用椭圆积分变换^[6,7]处理矩形区域内的电磁问题, 可得主模的严格解.

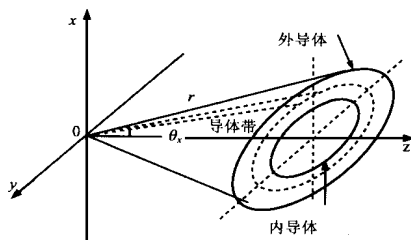


图1 椭圆锥带线

2 椭圆锥坐标系的变换

如图1所示, 椭圆锥带线由“共焦”的椭圆锥内导体、外导

体和椭圆弧导体带组成, 它们都是由理想导体制成. 椭圆弧导体带的厚度为无限薄, 椭圆弧导体带把填充介质分为两层, 介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 . 内导体, 导体薄带和外导体的椭圆锥角分别是 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 . 导体带横剖面对 z 轴的张角为 2θ . 内、外导体和导体带在 r 方向均是无限长的. 在以下的讨论中采用球锥坐标系. 直角坐标系与球锥坐标系之间的关系为

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (1)$$

$$y = r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta} \sin \phi \quad (2)$$

$$z = r \cos \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (3)$$

$$0 \leq k, k \leq 1, k^2 + k'^2 = 1 \quad (4)$$

$$0 \leq \theta \leq \theta_0 \leq \pi/2, \theta_0 = \arccos(k \cos \theta_0) \leq \pi/2 \quad (5)$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (6)$$

在 $y=0$ 的坐标平面上 $\sin \phi = 0$, 有

$$x = r \sin \theta, y = 0, z = r \cos \theta \quad (7)$$

在 $x=0$ 的坐标平面上, $\theta = \pi/2, \sin \theta = 1$, 有

$$x = 0, y = r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}, z = kr \cos \theta \quad (8)$$

在 $z = \text{常数}$ 的平面上, 由式(7)和(8)得 $r = kr$, 相应的半短轴和半长轴分别为 $kr \sin \theta$ 和 $r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}$. 于是 z 为常数的平面与 θ 为常数的椭圆锥面相交得

$$\left(\frac{x}{kr \sin \theta} \right)^2 + \left(\frac{y}{r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 = 1 \quad (9)$$

是椭圆方程.若焦点联线张角为 2θ , 则

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{y^2 - x^2} / z = k / k \cos \quad (10)$$

$$k = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta \cos^2 \theta)^{-1/2} \quad (11)$$

对于圆锥带线, 内导体, 导体带和外导体在不同的圆锥面上, 但它们有相同的 k 值, 称之为“共焦”的.

在球锥坐标系中 Helmholtz 方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + k_0^2 + \frac{1}{k^2 \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta} \left\{ \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} = 0 \quad (12)$$

其中 $k_0 = \sqrt{\mu} = 2 / \lambda$ 是波数. 圆锥带线中传播的主模是 TEM 波, 其形式解为

$$(r, \theta, \phi) = \frac{E(\theta, \phi) \exp(\pm k_0 r)}{r} \quad (13)$$

于是式(12)可简化为

$$\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right\} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (14)$$

应用勒让德不完全椭圆积分 $F(\theta, k)$ 和完全椭圆积分 $K(k)$ 作变换

$$x = \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 x}} = K(k) - F\left(\frac{\pi}{2} - x, k\right) \quad (15)$$

$$x = \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = F(x, k) \quad (16)$$

则式(14)变为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} = 0 \quad (17)$$

3 共形映射

式(17)是 x 平面上的二维拉氏方程, 即式(15)和(16)把圆锥带线变成了平行板带线, 如图 2 所示. 考虑到式(5)和(6)所规定的 x 和 θ 的取值范围, 可以得到 x 平面上带线的尺寸:

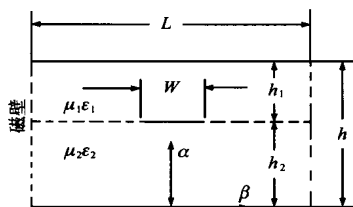


图 2 坐标变换后带线剖面结构

$$h = F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1, k\right) - F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_3, k\right) \quad (18)$$

$$h_1 = F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1, k\right) - F\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2, k\right) \quad (19)$$

$$l = 4K(k) \quad (20)$$

$$w = 2F(\theta_2, k) \quad (21)$$

其中 h 为两接地板间距, h_1 为带线与下接地板间距, l 为地板

宽度, w 导体带宽度. 参见图 2, 可见整个电磁场被约束在宽为 l , 高为 h 的矩形区域内. 这种接地板宽度为有限值的平行板带线的单位长度电容 C 可表示为上下两部分电容之和, $C = C_1 + C_2$. C_1 是导体带与上接地板之间的单位长度线电容, C_2 是导体带与下接地板之间的单位长度线电容. 因两部分结构相同, 可用同一方法求出, 如图 3 所示. 做变换

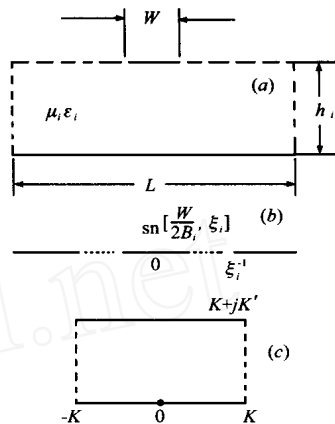


图 3 电磁场约束在矩形区域内的共形映射

$$z = B_i \operatorname{sn}^{-1}(l, k_i), B_i = l/2 K(k_i), i = 1, 2 \quad (22)$$

即把 z 平面上的微带形结构映射到 t 平面上的共面波导结构, 利用共面波导 (CPW) 的公式可得

$$C_i = 2 \epsilon_0 \epsilon_i \frac{K(k_i)}{K(k_i)}, i = 1, 2 \quad (23)$$

$$k_i = \operatorname{sn}\left(\frac{w}{2B_i}, k_i\right) \quad (24)$$

$$i = (e^{1/2 h_i} - 2)^2 / (e^{1/2 h_i} + 2)^2, \frac{1}{2} \leq \frac{h_i}{h} \leq 1 \quad (25)$$

$$i = (e^{2 h_i / l} - 2)^2 / (e^{2 h_i / l} + 2)^2, 0 \leq \frac{h_i}{l} \leq \frac{1}{2} \quad (26)$$

$$k_1^2 + k_2^2 = 1, \frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} = 1 \quad (27)$$

于是圆锥带线的单位长度电容 C , 有效介电常数 ϵ_e 和特性阻抗 Z 分别为

$$C = 2 \epsilon_0 \epsilon_e C_0, \epsilon_e = N/D \quad (28)$$

其中 C_0 是自由空间情况下的电容,

$$N = \frac{K(k_1)}{K(k_1)} + 2 \frac{K(k_2)}{K(k_2)} \quad (29)$$

$$D = \frac{K(k_1)}{K(k_1)} + \frac{K(k_2)}{K(k_2)} \quad (30)$$

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \sqrt{\frac{K(k_1)}{K(k_1)} + \frac{K(k_2)}{K(k_2)}} \quad (31)$$

4 结论

式(21)给出的是圆锥带线位于以 x 轴为对称的位置时导体带宽度的公式. 当导体带是任意放置在圆锥面上时, 则导体带宽度 w 为

$$w = F(\theta_2, k) - F(\theta_1, k) \quad (32)$$

这时将得到一个不同于图 2 的非对称带线, 如图 4(a) 所示. 这时仍可仿前面的分析方法处理, 先把带线分为上下两部分,

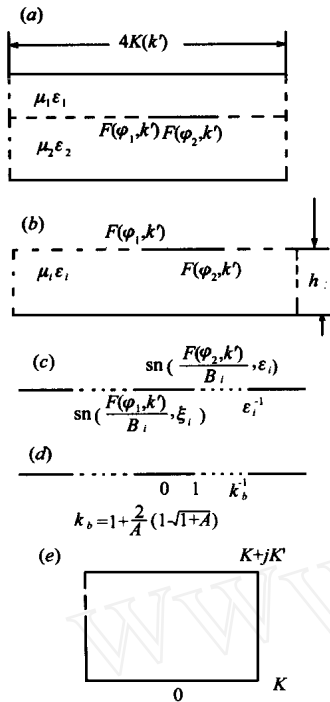


图 4 一般情况下的椭圆锥带线

应用椭圆积分变换把矩形区域变为半平面如图 4(c) 所示. 图 4(c) 中得到的是非对称共面波导, 利用分式线性变换可把非对称共面波导映射为对称结构的共面波导^[8], 这时可利用对称共面波导公式求解, 全部公式已在图 4 中给出.

参考文献:

[1] 郑家骏, 梁昌洪. 圆柱形微带线的准静态解 [J]. 微波学报, 1998, 14(3) : 221 - 226.

[2] Li Zeng, Wang Y. Accurate solutions of elliptic and cylindrical stripline and microstrip lines [J]. IEEE Trans. 1986, MTT-34(2) : 259 - 265.

[3] Josh K K and B N Das. Analysis of elliptic and cylindrical striplines using Laplace 's equations [J]. IEEE Trans. 1980, MTT-28(4) : 381 - 386.

[4] Tsai R B and K L Wong. Characterization of cylindrical microstrip lines mounted inside a ground cylindrical surface [J]. IEEE Trans. 1995, MTT-43(7) : 1607 - 1610.

[5] Yuan N, et al. The characteristic impedance of the stripline and microstrip line of the elliptic cone [J]. Microwave and Optical Technology Letters. 1992, 5(10) : 506 - 509.

[6] 阮成礼. 悬置共面波导的基本参数 [J]. 电子科学学刊, 2000, 22(4) : 632 - 638.

[7] 阮成礼. 有限尺寸介质基片上的共面波导 [J]. 电子学报, 2000, 28(3) : 104 - 105.

[8] 阮成礼. 非对称共面线的特性阻抗 [J]. 电子科技大学学报, 1999, 29(2) : 136 - 139.

作者简介:



阮成礼 男, 1944 年生于湖北襄樊. 教授, 博士生导师, 研究方向为电磁场与微波技术, 超宽带电磁学, 电磁导弹理论与技术等, 发表论著 170 余篇, 专著两部, 获国家级和部级科技进步奖 6 项, 获“中国有突出贡献博士学位获得者”奖章等国家和部级荣誉奖 4 项. 现正从事时域电磁波(电磁导弹)在雷达、通信和电子战等领域中的应用研究.