一种全解耦的Volterra自适应滤波器

魏瑞轩, 韩崇昭
(西安交通大学电子与信息工程学院, 陕西西安 710049)

摘 要: 本文研究了Volterra自适应滤波的解耦问题. 通过对Volterra滤波器的伪线性组合结构的提出和分析, 得到了一个新的关于均方误差MSE的表达式, 并将Volterra自适应滤波问题描述为一个约束优化问题, 从而导出了满足最小均方误差(MMSE)指标的具有分块对角型输入相关矩阵的全解耦Volterra标准方程, 据此设计了一种全解耦的Volterra自适应滤波器, 给出了滤波器权向量的自适应修正公式. 仿真结果验证了本文方法的有效性.

关键词: 非线性系统; Volterra级数; 自适应滤波; 全解耦滤波器
中图分类号: TN713 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2001)06-0839-03

A Fully Decoupled Volterra Adaptive Filter

WEI Rui-xuan, HAN Chong-zhao
(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

Abstract: The decoupling problem for Volterra adaptive filter is discussed in this paper. By proposing and analyzing the pseudo-linear combination structure of Volterra filter, a new MSE (mean square error) expression can be obtained. Because the Volterra adaptive filter problem can be described as a constrained optimization one, a fully decoupled Volterra normal equation with block-diagonal input correlation matrix satisfying the MMSE (minimum mean square error) criterion is educed. Then a fully decoupled Volterra filter is designed and the adaptive regulating formulation for the weight vectors of the filter is given out. Simulation results indicate that the proposed method in this paper is efficient.

Key words: nonlinear system; Volterra series; adaptive filtering; fully decoupled filter

1 引言

基于Volterra级数模型的非线性系统自适应滤波是研究过程建模、自适应噪音均衡等的一种重要方法[1,2]. 此类研究的一个共同的基本出发点是把Volterra级数模型看作一个伪线性算子, 由此导出的滤波算法在自适应过程中无法避免各阶非线性因素之间的较强耦合, 从而影响了算法的收敛性能. 本文通过提出并分析Volterra滤波器的伪线性组合结构, 应用约束优化理论的分析方法, 研究了自适应过程的解耦问题, 提出了一种全解耦的Volterra自适应滤波算法.

2 Volterra自适应滤波

由于SISO连续时不变非线性因果系统的输出响应$y(t)$可用Volterra泛函级数表示为[5]:

$$y(t)=h_0+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n}u(t-\tau_i)d\tau_i$$

因而在对这类非线性系统进行滤波分析时, 可将系统用截断的Volterra级数模型描述为:

$$y(k)=\sum_{n=1}^{N}y_n(k)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m_1=0}^{M-1}\cdots\sum_{m_n=0}^{M-1}h_n(m_1,m_2,\cdots,m_n)\prod_{i=1}^{n}u(k-m_i)$$

此式即为N阶Volterra滤波器. 称$y_n(k)$为滤波器在k时的第n级输出, $\{h_n(m_1,m_2,\cdots,m_n)\mid m_1,m_2,\cdots,m_n=0,\cdots,M-1\}$为第$n$阶Volterra核序列或第$n$阶脉冲响应序列, N为Volterra滤波器的最高阶次, M为Volterra核的记忆长度. 自适应滤波的任务就是在线调整各阶核序列, 使滤波器的均方误差(MSE)达到最小. 由于Volterra滤波器是一个多维卷积序列之和, 因此, 通过构造Volterra输入观测向量和核向量, 就可将Volterra滤波器描述为一个伪线性算子, 从而直接类比线性系统LMS(最小均方)自适应滤波算法[3], 即可得到一种基于LMS方法的全耦合的Volterra自适应滤波器, 滤波器权向量的修正公式为:

$$H_V(k+1)=H_V(k)+\mu\varepsilon(k)X_V(k)$$

其中: $H_V=[h_1^T\mid h_2^T\mid\cdots\mid h_N^T]^T$; $X_V(k)$为输入观测向量; $\varepsilon(k)$为残差; μ为学习因子, 它控制着自适应滤波过程的稳定性和收敛速度. 这种滤波器满足最小均方误差(MMSE)指标的标准方程为: $R_VH_V=P_V$. 这是一种全耦合形式的标准方程, 它的输入自相关矩阵R_V具有如下形式:

$$R_V=E\{X_V(k)X_V^T(k)\}=\begin{bmatrix}R_{1,1}&\cdots&R_{1,N}\\\vdots&\ddots&\vdots\\R_{N,1}&\cdots&R_{N,N}\end{bmatrix}$$

$$P_V=E\{d(k)X_V(k)\}=[P_1^T\quad P_2^T\quad\cdots\quad P_N^T]^T$$

收稿日期: 2000-03-20; 修回日期: 2000-07-05

由于这种全耦合滤波器使用同一残差对各阶权系数进行同步的修正,从而造成了各阶非线性因素之间的较强耦合,导致了算法递推复杂且收敛慢,对较强非线性和较大噪音干扰甚至难以收敛,而且,使得学习因子的稳定的取值范围较小.为此,文[4]应用约束优化问题的分析方法研究 Volterra 自适应滤波过程,提出了一种部分解耦的 Volterra 自适应滤波器,在它的标准方程中,输入自相关矩阵是一个分块下三角形矩阵.

3 全解耦 Volterra 自适应滤波器

3.1 Volterra 滤波器的伪线性组合结构

由于 Volterra 级数的时域核具有对称性,即对于任意的 $n \in N$,均有:

$$h_n(m_1, m_2, \cdots, m_n) = h_n(m'_1, m'_2, \cdots, m'_n) \Big|_{m'_1, m'_2, \cdots, m'_n \text{是} m_1, m_2, \cdots, m_n \text{的任意重排}}$$

因此,在第 n 阶脉冲响应序列中,仅有 C^n_{M+n-1} 个元素是不重复的.这样对于 Volterra 滤波器的第 n 阶级数,在任意 k 时刻,可以根据对称性分别重构长度为 C^n_{M+n-1} 的输入向量 X^n_k 和脉冲响应向量 H_n,则滤波器在 k 时的第 n 级输出 $y_n(k)$ 就是这两个向量的内积:$y_n(k) = (H_n)^T X^n_k$.据此可将 Volterra 滤波器的第 n 阶级数看作为一个伪线性系统.由于 Volterra 级数的对称核是唯一的,因此对于 Volterra 滤波器来讲,向量 H_n $(n = 1, 2, \cdots, N)$ 也是唯一确定的,所以 Volterra 滤波器具有唯一确定的伪线性组合结构:N 阶 Volterra 滤波器是一个线性子系统和 $N-1$ 个伪线性子系统的唯一组合.记 Volterra 滤波器在 k 时的期望输出为 d_k,实际输出为 y_k,第 n 阶 Volterra 伪线性子系统的输出为 y^n_k,再记 ε^n_k $(n = 1, 2, \cdots, N)$ 为第 n 阶 Volterra 子系统在 k 时的误差输出,并定义:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1_k &= d_k - \sum_{n=2}^{N} y^{n*}_k - y^1_k = d^1_k - y^1_k \\
\varepsilon^2_k &= d_k - \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{N} y^{n*}_k - y^2_k = d^2_k - y^2_k \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
\varepsilon^N_k &= d_k - \sum_{n=1}^{N-1} y^{n*}_k - y^N_k = d^N_k - y^N_k
\end{aligned}$$

其中,y^{n*}_k 为第 n 阶子系统的核向量达到真实值 H^*_n 时它所产生的输出.上式建立了各阶 Volterra 子系统在滤波过程中的一组关系式.根据这组关系,可为 MSE 导出一个新的表达式.

3.2 全解耦 Volterra 标准方程

将各阶 Volterra 子系统均用线性组合器网络构造[6],任意第 n 阶子系统的脉冲响应向量 H_n 即为其网络的权向量,则 k 时的输出为 $y^n_k = (H_n)^T X^n_k$.假设在 k 时刻自适应过程已使前 $N-1$ 个子系统的权值收敛于其真值,而仅有第 N 阶子系统的权值未达收敛,则 N 阶 Volterra 滤波器的输出误差可表示为:

$$\varepsilon_k = d_k - \sum_{n=1}^{N} y^n_k = d^N_k - y^N_k = \varepsilon^N_k$$

如果把 Volterra 滤波器满足最小均方误差(MMSE)指标的自适应滤波问题,看作是一个在低阶 Volterra 子系统满足 MMSE 的条件下使高阶子系统再满足 MMSE 的约束优化问题,就可为 Volterra 自适应滤波问题建立一个约束优化形式的描述.以 2 阶 Volterra 滤波器为例,考虑到第一阶子系统是一个真正的线性子系统,按照线性系统的结论[3],我们强制它满足 MMSE 的条件是:$R_{1,1}H_1 = P_1$,其中:$R_{1,1} = E\{X^1_k(X^1_k)^T\}$,$P_1 = E\{d^1_k X^1_k\}$.这里,设输入信号和期望信号是平稳的,并假设在短时间内 y^{n*}_k 为平稳的,则 d^1_k 亦为平稳的.从而 2 阶 Volterra 滤波器满足 MMSE 指标的自适应滤波问题可以描述为:

$$\min_{(H_1, H_2)} \ \text{MSE} \qquad s.t. \quad R_{1,1}H_1 = P_1$$

基于上面的分析,在同样的假设条件下,可为 2 阶 Volterra 滤波器建立一个新的 MSE 表达式为:

$$\begin{aligned}
\text{MSE} &= E\{(\varepsilon_k)^2\} = E\{(\varepsilon^2_k)^2\} \\
&= E\{(d^2_k)^2 - 2d^2_k(X^2_k)^T H_2 + (H_2)^T X^2_k (X^2_k)^T H_2\} \\
&= E\{(d^2_k)^2\} - 2E\{d^2_k(X^2_k)^T\}H_2 + (H_2)^T E\{X^2_k(X^2_k)^T\}H_2 \\
&= E\{(d^2_k)^2\} - 2(P_2)^T H_2 + (H_2)^T R_{2,2} H_2
\end{aligned}$$

对于上述约束优化问题,通过引入一个 Lagrange 乘子向量,即可将其转化为无约束优化问题进行求解.按照无约束优化问题的分析方法对其求解,即可得到 2 阶 Volterra 滤波器满足 MMSE 指标的标准方程为:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ & R_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

其中:$\begin{cases} R_{j,j} = E\{X^j_k(X^j_k)^T\}, & j = 1, 2 \\ P_j = E\{d^j_k X^j_k\}, & j = 1, 2 \end{cases}$

以上式为基础,对于任意 N 阶 Volterra 滤波器,使用同样的分析方法,从低阶到高阶逐次分析,即可得到 N 阶 Volterra 滤波器满足 MMSE 指标的标准方程为:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ & R_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}$$

其中:$\begin{cases} R_{n,n} = E\{X^n_k(X^n_k)^T\}, & n = 1, 2, \cdots, N \\ P_n = E\{d^n_k X^n_k\}, & n = 1, 2, \cdots, N \end{cases}$

在上述标准方程中,Volterra 输入相关矩阵具有分块对角形式,因此称它为全解耦的 Volterra 标准方程,它说明设计一种全解耦的 Volterra 自适应滤波器是可行的.

3.3 全解耦 Volterra 自适应滤波器

根据上述分析,设计了全解耦的 Volterra 自适应滤波器,该滤波器的结构如图 1 所示,自适应滤波过程按照实时在线循环的方式组织.图中的进阶开关用于控制滤波过程的进度,误差信号 ε^{*n}_k 表示低阶 Volterra 子系统的权值固定在最佳值后所得到的误差输出信号.$d^1(k) = d^1_k$.采用 LMS 方法按照全解耦原理对滤波器的权向量进行自适应修正,各阶权向量的修正公式为:

$$H_n(k+1) = H_n(k) + \mu_n \varepsilon^n_k X^n_k, \ n = 1, \cdots, N$$

3.4 全解耦滤波器的收敛性

考察任意第 n 阶子系统的权向量的收敛性.在滤波过程中,权向量按照梯度下降原理进行修正,即:$H_n(k+1) = H_n(k) + \mu_n(-\nabla_n(k))$,$n = 1, \cdots, N$.这里,$\nabla_n(k)$ 是 k 时的

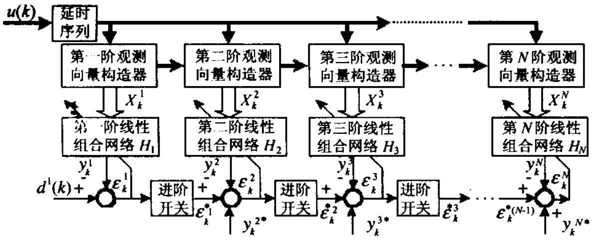


图 1　全解耦 Volterra 自适应滤波器的结构图

真实梯度, 在实际的修正公式中, 则采用的是瞬时估计梯度. 记 k 时权向量 H_n 的偏差为: $V_n(k)=H_n(k)-H_n^*$, 则可导出:

$$\nabla_n(k)=\partial(MSE)/\partial H_n(k)=2R_{n,n}V_n(k)$$

由于 $R_{n,n}$ 是正定对称矩阵, 可令: $R_{n,n}=Q\Lambda_nQ^{-1}$, $V_n^{\#}(k)=Q^{-1}V_n(k)$, 则推得: $V_n^{\#}(k)=(1-2\mu_n\Lambda_n)^kV_n^{\#}(0)$, 其中 $V_n^{\#}(0)$ 是 $V_n^{\#}(k)$ 的初值, Λ_n 是由 $R_{n,n}$ 的特征值组成的对角阵, 所以, 当学习因子满足条件:

$$0<\mu_n<1/\lambda_{n-max},\ n=1,2,\cdots,N$$

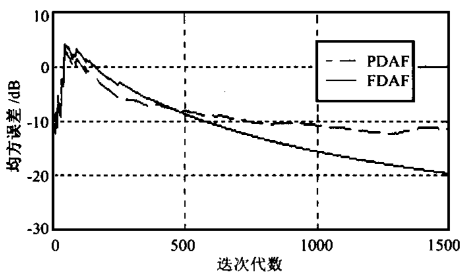
时, 全解耦滤波器在均值意义下是收敛的. 这里 λ_{n-max} 是 $R_{n,n}$ 的最大特征值.

4　仿真算例

期望信号由如下非线性过程产生:

$$y(k)=0.62u(k)-0.25u(k-1)+0.64u(k-2)$$
$$+0.60u^2(k)-0.12u(k-1)u(k-2)$$

输入信号和叠加在输出端的扰动均是方差为 1 的标准白噪声序列, 采用二阶 Volterra 滤波器进行自适应滤波, 滤波器记忆长度为 5. 分别使用文[4]的部分解耦自适应滤波(PDAF)方法和本文提出的全解耦自适应滤波(FDAF)方法进行自适应滤波, 仿真实验分别考察了 SNR = 20dB 和 SNR = 5dB 时两种方法的学习曲线, 图 2 给出了仿真结果. 其中两种解耦方法的学习因子均为: $\mu_1=0.03$, $\mu_2=0.006$. 仿真实验的结果显示了本文的方法在提高滤波过程的收敛速度和精度方面是有效的.



(a) SNR = 20dB 时自适应滤波的学习曲线

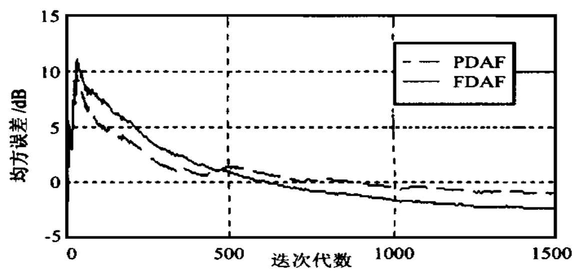


图 2　(b) SNR= 5dB 时自适应滤波的学习曲线

5　结论

本文为非线性滤波建立了一种具有全解耦结构的 Volterra 自适应滤波器, 在与部分解耦自适应滤波器有着相同的学习因子取值范围的情况下, 提高了滤波过程的收敛速度和精度, 改善了滤波器对较强干扰的适应能力, 仿真实验验证了本文方法的有效性. 本文的研究对于非线性过程的自适应建模、控制、噪音均衡、在线故障监测等都是有意义的.

参考文献:

[1]　M V Dokic. Adaptive Volterra filters with application to echo cancellation [J/OL]. PHD dissertation. Illinois Institute of Technology. 1993, http://wwwlib.umi.com/dissertations.

[2]　L X Hui. Fast algorithms for Volterra series based nonlinear adaptive filters [J/OL]. PHD dissertation. University of Illinois at Urbana-Champaign. 1998. http://wwwlib.umi.com/dissertations.

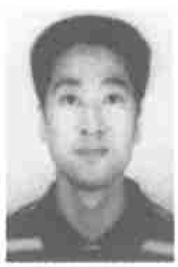
[3]　S Haykin. Adaptive Filter Theory [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

[4]　D W Griffith, G R Arce. Partially decoupled volterra filters: formulation and LMS adaptation [J]. IEEE Trans. on Signal Processing. 1997, 45(6): 1485-1494.

[5]　M Schetzen. The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems [M]. New York: Wiley, 1980.

[6]　B Widrow and E Walach. Adaptive Inverse Control [M]. Prentice Hall, 1996.

作者简介:



魏瑞轩　男. 1968 年生于陕西. 现为西安交通大学博士研究生, 讲师, 主要研究方向为非线性系统的自适应辨识与控制、信号处理和故障诊断.

韩崇昭　男. 1943 年生于陕西省乾县. 教授, 博士生导师, 主要研究领域为非线性系统频谱分析及其应用、信息融合及其应用、非线性系统辨识与控制、智能决策系统.