

基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法

齐国清¹, 贾欣乐²

(1. 大连海事大学电子信息与通信工程学院, 辽宁大连 116026; 2. 大连海事大学轮机工程研究所, 辽宁大连 116026)

摘 要: 提出一种新的基于 DFT 相位的正弦波信号频率和初相的高精度估计方法. 利用分段 DFT 频谱的相位差消除了初相对频率估计的影响且避免了相位测量模糊问题. 给出了频率和初相估计的均方根误差计算公式. 理论分析和 Monte Carlo 模拟结果显示频率估计均方根误差接近 Cramer-Rao(CR)下限, 初相估计均方根误差略高于 CR 下限的 2 倍. 阈值信噪比远远低于基于时域瞬时相位的频率和初相估计方法. 在信噪比为 6dB、采样点数为 1024 的情况下, 频率估计均方根误差约为 DFT 频率分辨率的 1%, 初相估计均方根误差约为 2 度. 该方法已用于 FMCW 液位测量雷达并取得 1mm 距离测量精度.

关键词: 频率估计; 相位估计; 雷达测距; DFT

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 09-1164-04

High-Accuracy Frequency and Phase Estimation of Single-Tone Based on Phase of DFT

QI Guo-qing¹, JIA Xin-le²

(1. Electronic and Information Engineering Dept., Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China;
2. Marine Engineering Institute, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China)

Abstract: A fast and accurate estimation technique of frequency and initial phase of single-tone signal based on the phase of the DFT spectrum is proposed. To eliminate the ambiguity in DFT phase measurement, the sampled data are divided into two segments and the DFT is applied on them individually, then the frequency and initial phase of the signal are estimated with the phase difference of the two DFT spectra at their maximum amplitude position. Computer simulation results show that the variance of frequency estimation is close to the Cramer-Rao bound, and the SNR threshold is much lower than that of the ML estimators for moderate N (length of DFT). For $SNR = 6\text{dB}$ and $N = 1024$, the RMS error of frequency estimation is about 1% of the frequency resolution of the DFT, and the RMS error of the initial phase estimation is about 2 degrees. Formulas for evaluating the RMS errors of frequency and phase estimation in white Gaussian noise for different SNR and N are also presented, which fit well with computer simulation results. This technique has been used in FMCW level radar and 1mm range measurement accuracy has been achieved.

Key words: frequency estimation; phase estimation; microwave ranging; DFT

1 引言

正弦波信号频率的估计是通信、雷达、声纳以及电子对抗等领域信号处理中的一个重要问题. 基于参数模型的谱估计、最大熵谱估计等方法具有频率分辨率高的优点, 但对于长序列, 其运算量大, 不利于实时处理. 而基于 DFT 的谱分析方法, 可采用快速算法, 即 FFT, 因此运算速度快, 特别适合于实时信号处理. 但 DFT 的频率分辨率和频率估计精度取决于信号的测量时间长度, 信号测量时间过长不但给实时处理带来困难, 而且在一些应用中信号的持续时间是有限的, 不能任意延长, 使得 DFT 的频率分辨率和估计精度受到限制, 因此一般只利用 DFT 实现频率的粗测^[1,2]. 文献[3]提出了利用数值

搜索方法提高 DFT 频率估计精度. 由于栅栏效应 DFT 频谱在主瓣之内有 2 条谱线, 利用这两条谱线的幅度可以实现频率插值以提高频率测量精度^[4]. 文献[5]提出了直接在时域采用最小二乘线性回归的方法, 利用瞬时相位估计信号频率和初相. 为了避免直接测量瞬时相位的整周模糊问题, 文献[6]提出了相位差分方法. 在时域测量瞬时相位估计信号频率和初相的缺点是需要较高的信噪比. 文献[7]提出了一种利用 DFT 频谱的相位和频率插值的综合算法提高频率测量精度的方法. 本文提出一种利用信号 DFT 频谱相位提高频率测量精度的新方法, 利用分段 DFT 消除了相位测量中的整周模糊问题. 理论分析和计算机模拟结果表明, 该方法的信噪比阈值比

收稿日期: 2000-07-13; 修回日期: 2001-01-07

基金项目: 教育部博士学科点专项研究基金 (No. 98015101)

基于时域瞬时相位的频率估计方法低很多,在很低信噪比情况下,仍能得到很高的频率和初相估计精度,频率估计均方根误差接近 CR 下限.该方法还可以估计信号的初相,初相估计均方根误差略高于 CR 下限的 2 倍.

2 FFT 相位差法估计频率和初相原理

设观测信号为单一频率复正弦波信号

$$s(t) = a \cdot \exp[j(2\pi f_0 t + \phi_0)] \quad (1)$$

其中, a 、 f_0 和 ϕ_0 分别为信号的幅度、频率和初相. 对上述信号进行采样, 设信号的记录时间长度为 T , 总采样点数为 N , 将采样序列分为两个长度相同的序列, $s_1(n)$ 对应前 $N/2$ 点, 则采样序列可记为

$$s(n) = a \cdot \exp[j(2\pi f_0 Tn/N + \phi_0)], n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

$s_2(n)$ 对应后 $N/2$ 点, 则

$$s_1(n) = a \cdot \exp[j(2\pi f_0 Tn/N + \phi_0)], n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3)$$

$$s_2(n) = s_1(n) \exp(j\pi f_0 T), n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (4)$$

分别对 $s_1(n)$ 和 $s_2(n)$ 进行 $N/2$ 点 DFT, 得到离散频谱

$$S_1(k) = A_k \exp(j\varphi_k), k = 0, 1, 2, \dots, (N/2-1) \quad (5)$$

$$S_2(k) = S_1(k) \exp(j\pi f_0 T), k = 0, 1, 2, \dots, (N/2-1) \quad (6)$$

其中 A_k 和 φ_k 分别为 $S_1(k)$ 的幅度项与相位项

$$A_k = \frac{a \cdot \sin[\pi(k - f_0 T/2)]}{\sin[2\pi(k - f_0 T/2)/N]} \quad (7)$$

$$\varphi_k = \phi_0 + (1 - 2/N)(f_0 T/2 - k)\pi \quad (8)$$

根据式(6)知, $S_1(k)$ 与 $S_2(k)$ 的幅度项完全一样. 由式(7), 幅度最大值处对应的离散频率为 $k_0 = [f_0 T/2]$ ($[x]$ 表示取最接近 x 的整数). 利用 DFT 的最大谱线粗测频率为 $\hat{f}_k = k_0 \Delta f$, $\Delta f = 2/T$ 为 DFT 的频率分辨率. 从式(8)可见, DFT 最大谱线的相位包含信号频率与 DFT 最大谱线位置的偏差信息, 但由于 ϕ_0 未知, 不能直接利用 DFT 的相位来估计频率. 用 φ_1 和 φ_2 分别表示 $S_1(k)$ 和 $S_2(k)$ 在最大谱线处的相位, 则两者的差值为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi f_0 T - 2k_0\pi \quad (9)$$

当 f_0 在 $(k_0 \pm 0.5)\Delta f$ 范围内变化时, 由式(9)知, $\Delta\varphi$ 在 $-\pi$ 到 π 之间变化. 因此利用 $\Delta\varphi$ 可以对 f_0 与 DFT 最大谱线对应的频率 $k_0 \Delta f$ 的偏差 $f_\delta = f_0 - k_0 \Delta f$ 进行估计

$$\hat{f}_\delta = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Delta f = \frac{\Delta\varphi}{\pi T} \quad (10)$$

也可以定义与 T 无关的相对频率偏差 $\delta = f_\delta / \Delta f$, 当 f_0 在 $(k_0 \pm 0.5)\Delta f$ 范围内变化时, δ 在 ± 0.5 范围内变化. 可以利用 $\Delta\varphi$ 直接得到 δ 的估计值 $\hat{\delta} = \Delta\varphi / 2\pi$. 然后按下式计算 f_0 的估值

$$\hat{f}_0 = \hat{f}_k + \hat{f}_\delta = (k_0 + \hat{\delta}) \Delta f \quad (11)$$

由于首先利用 DFT 的最大谱线位置对频率进行了粗测, DFT 相位差只用来估计信号频率在两条谱线之间的位置, 因而相位测量不会出现模糊. 将式(9)代入式(8), 得

$$\varphi_k = \phi_0 + \frac{N-2}{2N} \Delta\varphi \quad (12)$$

于是初相 ϕ_0 的估计为

$$\hat{\phi}_0 = \varphi_1 - \frac{N-2}{2N} \Delta\varphi = \frac{3N-2}{2N} \varphi_1 - \frac{N-2}{2N} \varphi_2 \quad (13)$$

当 N 较大时, 上式可近似为

$$\hat{\phi}_0 \approx \frac{3}{2} \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_2 \quad (14)$$

3 噪声对测量精度的影响

在加性白噪声背景下, 观测信号可表示为 $r(t) = s(t) + z(t)$. 其中 $s(t)$ 为式(1)所表示的纯信号, $z(t)$ 为复白噪声, 其均值为 0, 功率谱密度为 N_0 . 前 $N/2$ 点采样序列记为 $r_1(n) = s_1(n) + z(n)$. 设系统的等效带宽为 f_Δ , 则 $z(n)$ 的功率(方差)为 $\sigma_z^2 = f_\Delta N_0$. 采样后的信噪比为 $SNR_i = a^2 / \sigma_z^2$. 白噪声为平稳随机过程, 不满足 Fourier 变换的绝对可积条件, 不能对其进行 Fourier 变换, 因此一般只分析其功率谱密度. 但功率谱密度不包含相位信息, 无法分析噪声对相位测量的影响. 对于采样后的白噪声序列, 可将其 DFT 变换看作是若干个随机变量的线性组合, 每项 DFT 系数仍为随机变量, 所以噪声序列的 DFT 仍为随机序列. 因此我们可以定义噪声序列 $z(n)$ 在概率意义上的 $N/2$ 点 DFT 变换

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} z(n) \exp(-j4\pi kn/N) = b \cdot \exp(j\varphi_z), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 \quad (15)$$

上式只在概率意义上成立, 因为对于 $z(n)$ 的不同次实现, $Z(k)$ 的值是随机变化的. b 和 φ_z 分别表示 $Z(k)$ 的幅度和相位, 均为随机量. 可以通过上式分析 $Z(k)$ 的统计特性. 当 $z(n)$ 为高斯白噪声序列时, $Z(k)$ 也服从高斯分布, 而且对于同一次 DFT 变换, 不同的 k , 或同一个离散频率 k 不同次的 DFT 变换(每次 DFT 对不同的采样序列进行), $Z(k)$ 均为不相关的, 即也为高斯白噪声序列, 易知 $Z(k)$ 的均值为 0, 方差为 $\text{var}(Z) = N\sigma_z^2/2$.

于是 $r_1(n)$ 的 DFT 可表示为

$$R_1(k) = S_1(k) + Z(k) = A_k \exp(j\varphi_k) + b \exp(j\varphi_z) \quad (16)$$

整理式(16), 得 $R_1(k)$ 的幅度和相位分别为

$$|R_1(k)| = A_k \sqrt{1 + \frac{b^2}{A_k^2} + \frac{2b}{A_k} \cos(\varphi_z - \varphi_k)} \quad (17)$$

$$\varphi_R(k) = \varphi_k - \tan^{-1} \left[\frac{b \sin(\varphi_z - \varphi_k)}{A_k + b \cos(\varphi_z - \varphi_k)} \right] \quad (18)$$

对于较大的 DFT 输出信噪比, 上式可近似为

$$\varphi_R(k) = \varphi_k - \frac{b}{A_k} \sin(\varphi_z - \varphi_k) \quad (19)$$

由 $\text{var}[b \sin(\varphi_z - \varphi_k)] = \text{var}[b \cos(\varphi_z - \varphi_k)] = \text{var}(Z)/2$, 得 DFT 相位测量均方根误差为

$$\sigma_\varphi = \frac{\sqrt{N\sigma_z^2}}{2A_k} \quad (20)$$

对于较大的 N , 在主瓣附近, A_k 可近似为

$$A_k \approx (N/2) a \cdot \text{sinc}(\delta) \quad (21)$$

式中 $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$. 当信噪比较大时, 在 DFT 幅度最大值处, $R(k_0)$ 仍近似为正态分布, 其方差为 $\text{var}(R) = \text{var}(Z)$, 所以, 在幅度最大值处, DFT 频谱的信噪比为

$$SNR_0 = \frac{A_k^2}{\text{var}(Z)} = \text{sinc}^2(\delta) (N/2) SNR_i = PG \cdot SNR_i \quad (22)$$

式中 $PG = SNR_0/SNR_i = \text{sinc}^2(\delta) \cdot (N/2)$ 为 $N/2$ 点 DFT 的信噪比增益. 将式(21)和式(22)代入式(20), DFT 最大谱线处相位 φ_1 的均方根误差为可表示为

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\sqrt{N \cdot SNR_i \text{sinc}(\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{2SNR_0}} \quad (23)$$

对于平稳白噪声,第二段采样序列 $r_2(n)$ 的 DFT 的相位 φ_2 的测量误差与 φ_1 的测量误差是统计独立的,而且方差相同,因此相位差 $\Delta\varphi$ 的均方根误差为 $\sigma_{\Delta\varphi} = \sqrt{2}\sigma_\varphi$. 于是,相对频率偏差估计和初相估计的均方根误差分别为

$$\sigma_\delta = \frac{1}{2\pi \sqrt{SNR_0}} \quad (24)$$

$$\sigma_{\phi_0} = \frac{\sqrt{5}}{2 \sqrt{SNR_0}} \quad (25)$$

根据相对频偏 δ 的均方根误差便可得到 f_δ 的均方根误差为 $2\sigma_\delta/T$. 由于 SNR_0 一般较大, DFT 最大谱线位置错误造成的频率估计误差可以忽略,因此 f_0 的估计误差主要取决于 f_δ 的估计误差. 由式(24)、(25)可见,频率与初相估计误差和被测信号频率与 DFT 最大谱线的偏差有关,当被测信号的频率正好位于最大谱线上时,频率和初相估计误差最小,分别为 $\sqrt{2/(N \cdot SNR_i)}/(\pi T)$ 和 $\sqrt{5/(2N \cdot SNR_i)}$, 频率估计均方根误差略大于 CR 下限,初相估计均方根误差为 CR 下限的 $\sqrt{5}$ 倍. 当被测信号的频率正好位于 DFT 两条离散谱线中间时,频率和初相估计误差最大,分别为 $1/(T \sqrt{(2N \cdot SNR_i)})$ 和 $\pi \sqrt{5/(8N \cdot SNR_i)}$. 当信号频率位于 DFT 两条谱线中间时,信号的 DFT 系数有两项幅度接近,信号的能量平均分布在两条谱线上. 由于上面的相位估计方法只利用了信号的一条谱线,因此频率和初相估计的均方根误差均为最好情况的 $\pi/2$ 倍. 信号在两个相邻离散谱线上的相位差 180 度,而噪声在两个频率上是不相关的,因此 DFT 两条最大谱线相位取加权平均,可以使相位及频率的估计均方根误差降低到原来的 $1/\sqrt{2}$,与最好情况接近.

4 计算机模拟结果

采用单频率的实正弦波信号迭加高斯白噪声对本文提出的频率和初相估计的 FFT 相位差法进行了 Monte Carlo 模拟. 由于 DFT 对实信号的信噪比增益为对应的复信号的一半,因此实正弦信号频率及相位估计的方差为对应的复信号的 2 倍. 所以,对于实信号,前面推导的计算频率和初相估计的均方根误差的公式都要乘上 $\sqrt{2}$. 实信号的频率和初相估计均方根误差 CR 下限也为复信号 CR 下限的 $\sqrt{2}$ 倍. 模拟中信号的频率用 DFT 频率分辨率 Δf 的倍数表示,频率估计是对相对频率偏差 δ 进行的,可利用 $\sigma_f = 2\sigma_\delta/T$ 将 σ_δ 换算成频率估计的均方根误差.

对于不同的 f_0 和 ϕ_0 值的正弦信号在不同的信噪比和 DFT 长度条件下进行 Monte Carlo 模拟,模拟结果显示对于任意的 ϕ_0 和从 Δf 到 $N\Delta f/4$ 的范围内变化的 f_0 值,本文提出的

相位差法可得到很好的频率和初相估计,估计误差与本文给出的公式计算结果吻合. 表 1 列出的为一个 DFT 的频率分辨率内的若干个频率上, $SNR_i = 6\text{dB}$, $N = 256$, 经 100 次 Monte Carlo 模拟,频率偏差估计的均值和均方根误差. 表 1 最后一行为将文献[7]中表 1 中同样情况下的 $RMS(f_0)$ 折算成 σ_δ 的结果,可见两者基本相同,但本文的方法只需利用 DFT 系数的相位就可以对位于 DFT 离散谱线之间任意位置的频率进行估计,而不需利用 DFT 频谱的幅度估计频率. 对于给定的参数,根据上面得到的公式,可以算出 $\delta = 0$ 时, $\sigma_\delta = 0.0095$,可见模拟结果与理论计算结果基本吻合. 表中最后两行括号内为 $\delta \geq 0.3$ 时加 4 项 Blackman-Harris 窗后的结果,加窗对 DFT 频率插值法估计误差影响较大,频率估计均方根误差约增加一倍,而对 DFT 相位差法估计频率误差影响很小.

表 1 相对频偏估计的 100 次 Monte Carlo 模拟结果
($N = 256$, $SNR_i = 6\text{dB}$, $f_0 = (51 + \delta)\Delta f$, ϕ_0 随机)

δ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$E(\delta)$	0.001	0.097	0.198	0.299	0.402	0.501
σ_δ	0.009	0.011	0.011	0.011 (0.012)	0.010 (0.012)	0.010 (0.014)
σ_δ^*	0.010	0.011	0.014	0.009 (0.020)	0.008 (0.019)	0.009 (0.020)

注: σ_δ^* 为文[7]中表 1 的 $RMS(f_0)$ 折算为 σ_δ 的结果

表 2 列出的是在 $SNR_i = 6\text{dB}$, $N = 256$, $f_0 = 51.1\Delta f$ 条件下,对若干个给定的 ϕ_0 经 100 次 Monte Carlo 模拟得到的估计值的均值和均方根误差. 按本文给出的公式计算, $\sigma_{\phi_0} = 4.01^\circ$, 模拟结果与理论分析结果基本吻合.

表 2 初相估计的 100 次 Monte Carlo 模拟结果
($N = 256$, $SNR_i = 6\text{dB}$, $f_0 = 51.1\Delta f$)

$\phi_0/^\circ$	0	5	90	135	167	350
$E(\hat{\phi}_0)/^\circ$	-0.47	5.40	89.13	134.45	166.36	349.37
$\sigma_{\phi_0}/^\circ$	4.15	4.21	3.28	4.38	3.62	4.20

图 1 和图 2 所示分别为频率和初相估计均方根误差与信噪比及 DFT 长度的关系. 图中 ‘*’ 代表 Monte Carlo 模拟结果, 点线为按本文给出的公式(实信号)计算结果, 划线为对应实信号的频率和初相估计均方根误差 CR 下限. 图 1(a)和图 1(b)所示分别为 $f_0 = 51.5\Delta f$, $N = 128$ 情况下,频率和相位估计误差与信噪比的关系. 模拟结果与理论计算结果吻合,频率估计均方根误差接近 CR 下限. 信噪比增加 6dB, 估值均方根误差降低一半. 图 2(a)和 2(b)所示分别为在 $f_0 = (N/4 + 0.5)\Delta f$, $SNR_i = 6\text{dB}$ 条件下,频率估值和初相估值均方根误差随数据长度 N 变化的情况. 模拟结果与按公式计算结果基本吻合, N 增加 4 倍,频率和相位估计均方根误差降低一半. 从图 1 和图 2 可见,频率估计误差接近(实信号)CR 下限,初相估计均方根误差约为(实信号)CR 下限的 2 倍.

5 结论及实际应用

本文提出了一种利用 DFT 频谱的相位估计正弦信号的频率和初相的新方法,在信噪比为 6dB, 数据长度为 1024 的情况下,频率估计均方根误差约为对应的 DFT 的频率分辨率的

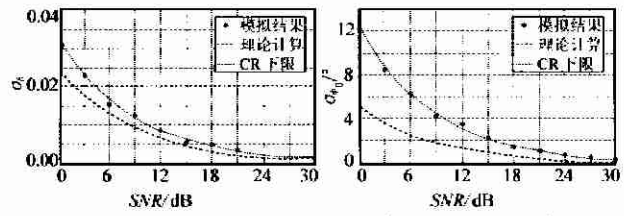


图 1 频率估计和初相估计均方根误差与信噪比的关系
($f_0 = 51.5\Delta f$, $N = 128$)

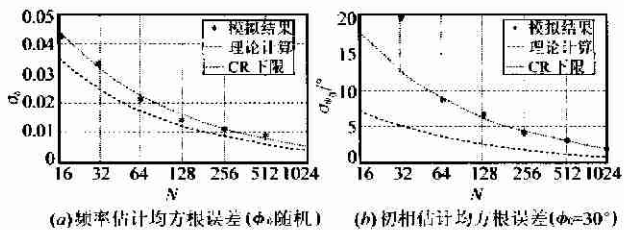


图 2 频率估计和初相估计的均方根误差与 N 的关系
($f_0 = (N/4 + 0.5)\Delta f$, $\text{SNR}_i = 6\text{dB}$)

1%。与文献[7]提出的利用 DFT 频谱的相位估计信号频率的方法相比,本文提出的方法避免了相位模糊问题,从而仅利用 DFT 最大谱线处的相位对位于两条谱线之间的任意位置的信号频率都能得到满意的估计,不需利用 DFT 频率插值法对相位法进行补偿,频率估计均方根误差接近 CR 下限,与文献[7]的综合方法基本相同。为了抑制频谱泄漏,通常在 FFT 之前对数据进行加窗处理,计算机模拟结果显示,加窗对 DFT 频率插值法估计误差影响较大,而对 DFT 相位差法估计误差影响很小。此外,本文提出的方法可以估计信号的初相,初相估计均方根误差略高于 CR 下限的 2 倍。本文提出的频率和初相估计方法比文献[5]和[6]采用的基于信号瞬时相位的频率估计方法的信噪比阈值低很多,在低信噪比情况下,适当增加采样点数,计算机模拟显示仍能得到很好的频率和初相的估计。本文还给出了白噪声背景下频率和初相估计均方根误差与信噪比及 DFT 长度的关系式,公式计算结果与计算机模拟结果很好地吻合。本文介绍的频率估计方法已在 FMCW 液位测量雷达中得到应用,该系统采用具有极高的频率稳定性和扫频线性度的集成微波组件作为扫频源,发射信号中心频率 10GHz,扫频带宽 1.5GHz,直接利用 DFT 频谱测量距离的分辨率为 10cm。在实验室内(差拍信号的信噪比在 10dB 以上)

实际测量结果显示采用本文提出的 DFT 相位差估计频率的方法测量距离的均方根误差小于 0.5mm,超过采用其它谱估计方法达到的距离测量精度。

参考文献:

- [1] D C Rife, C A Vincent. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones [J]. Bell Sys. Tech. J., Feb. 1970; 197-228.
- [2] L C Palmer. Coarse frequency estimation using the discrete Fourier transform [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 1974, IT-20(1): 104-109.
- [3] D C Rife, R R Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 1974, IT-20(5): 591-598.
- [4] V K Jain, W L Collins Jr, D C Davis. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT [J]. IEEE Trans. on IM, 1979, 28(2): 113-122.
- [5] S A Tretter. Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 1985, IT-31(6): 832-835.
- [6] S Kay. A fast and accurate single frequency estimator [J]. IEEE Trans. 1989, ASSP-37(12): 1987-1990.
- [7] 刘渝. 快速高精度正弦波频率估计综合算法 [J]. 电子学报, 1999, 27(6): 126-128.

作者简介:



达,船舶导航雷达。

齐国清 男, 1960 年 11 月生于辽宁凌海市, 教授, 在职博士研究生。1982 年毕业于大连工学院电子工程系, 1984 年在大连海运学院电子工程系获硕士学位。1993 年至 1995 年在新加坡标准与工业研究院从事 FMCW 液位测量雷达研究工作, 现任职于大连海事大学电子信息与通信工程学院。主要研究方向: 数字信号处理, FMCW 雷



贾欣乐 男, 1932 年生于辽宁辽阳市, 教授, 博士生导师。1959 年毕业于清华大学研究生班。现为大连海事大学控制工程教授。主要研究兴趣为智能控制用于船舶系统和船舶操纵运动。