

利用消失点列的射影不变量描述平面直线关系

刘方,王润生

(国防科技大学 ATR 国家重点实验室,湖南长沙 410073)

摘要: 消失点或消失直线蕴含了一组平行直线或一组平行平面的方向信息.同一平面上的所有直线对应的消失点共线于该平面的消失直线.消失线上的四点交比是射影不变量,该不变量与各点所对应的直线夹角存在内在联系.由此,本文提出了一种利用消失点列的射影不变量提取平面直线夹角的方法.在无需校准或 3D 重建的条件下,该方法可用于描述平面上直线间的相互关系,诸如平行、垂直、相交等.将本方法应用于真实图像的直线关系解释中,实验结果验证了方法的有效性.

关键词: 射影几何;无限远元素;消失点;消失直线;交比;射影不变量

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2001)09-1188-04

Description of Planar Line Relationship by Projective Invariant of Vanishing Points

LIU Fang, WANG Run-sheng

(ATR National Key Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: A vanishing point or a vanishing line indicates the direction information of a set of parallel lines or a set of parallel planes. The vanishing points of all lines in the same plane are colinear at the vanishing line of the plane. The cross ratio of four points in the vanishing line is a projective invariant. It is related inherently with the intersection angles among the lines that the vanishing points correspond. So, this paper presents an approach based on the projective invariants of vanishing points to calculate the intersection angles of planar lines. Without any calibration or 3D reconstruction, the approach can be used to describe the relationship between planar lines, such as parallelism, perpendicularity or intersection, and so on. Our method is applied to some real images for interpreting the relationship of lines, and the experimental results verify its efficacy.

Key words: projective geometry; infinite element; vanishing point; vanishing line; cross ratio; projective invariance

1 引言

目标的成像过程是一个射影变换过程,要由 2D 成像数据获取目标的 3D 信息须引入射影几何知识.通常,将那些不随视点或成像姿态变化而改变的目标属性或参量称为 3D 不变量.如共线四点交比、共点四线交比和共面五点交比等均是常用的 3D 不变量.3D 不变量对于描述目标自身及目标之间的 3D 特征将大有好处^[6-8],射影几何尤其是射影不变性(量)应用潜力使它在计算机视觉的研究中日益受到关注.

在射影几何的概念中:一组平行的直线相交且交于同一无限远点,一组平行的平面组相交且交于同一无限远直线,空间所有的无限远元素共同组成无限远平面^[1,3];无限远点在图像中的成像称为消失点(见图 1),消失点或消失直线体现了一组平行直线或一组平行平面的 3D 方向信息^[4,5].

在目标识别和场景分析的研究中,经常要对单个目标的形状特性、多个目标之间的方位关系等作出合理的描述和判断,这类问题通过分析目标上或目标间轮廓直线段之间的夹

角关系来解决.由于透视成像的缘故,成像夹角将随着姿态的变化而变化,沿用简单的 2D 处理方法难以获得真实的数据.利用射影几何中有关消失元素的概念,本文提出了一种基于消失点列的射影不变量获取直线夹角关系的方法.共线于消失线上的四点交比是 3D 不变量,它与各消失点所对应的四组直线的方向夹角之间存在内在联系,结合若干平行和垂直的先验知识,这种关系可以进一步用函数形式来表示,从而可以实现对平行、垂直、相交等不同情况下的直线段关系的合理解释.在无需校正或重建的条件下,应用不同的函数关系,对真实图像进行了实验,对同一目标(场景)不同姿态的多张视图分析,给出目标形状描述和目标之间方位关系的解释,实验结果验证了方法的有效性.本文的方法,还可扩展用于对空间元素,诸如:直线之间、平面之间、直线与平面之间等关键元素相互关系的进一步描述当中.

本文第 2 节简单介绍射影几何知识;第 3 节介绍利用消失点列的射影不变量分析平面上直线几何关系的方法;第 4

收稿日期:2000-07-01;修回日期:2001-03-28

节说明方法的具体步骤;第 5 节给出对真实图像实验的结果;最后为小结.

2 射影几何知识

本文中,仅对 2D 平面目标中的直线关系问题加以分析.我们约定,平面上一点 (x, y) 可以用齐次坐标表示为 $(x_1, x_2, x_3)^T$,若 $x_3 = 0$,该齐次坐标表示无限远点.相应的矢量 $(l_1, l_2, l_3)^T$ 称为直线 $l_1x + l_2y + l_3z = 0$ 的平面齐次坐标.若 $l_1 = 0$ 且 $l_2 = 0$ 时表示无限远直线.显然:当 $k \neq 0$ 时,齐次坐标 $(a, b, c)^T$ 和 $(ka, kb, kc)^T$ 表示平面上同一点(直线).为区别起见,将点矢量、线矢量采用大写黑体字母等表示.平面一点 V 在直线 L 上可用矢量数积表示为: $V \cdot L = 0$. 过两点 A, B 的直线 L 可用矢量矢积表示为: $L = k(A \wedge B)$. 同理,平面上两直线 L, M 的交点 C 有: $C = k(L \wedge M)$. 在本文中,如果不加特殊说明, k 均表示不为零的比例因子.对于存在比例因子关系的等式,我们采用符号“ \cong ”表示.所以,上述关系又可以写作: $L \cong A \wedge B$ 和 $C \cong L \wedge M$.

为方便表述,我们称:位于同一直线上的一组点为点列;相交于同一点的一组直线为线束;位于消失直线上的点列为消失点列.用 V_1, V_2, V_3 等表示消失点,用 U_1, U_2, U_3 等表示消失直线.

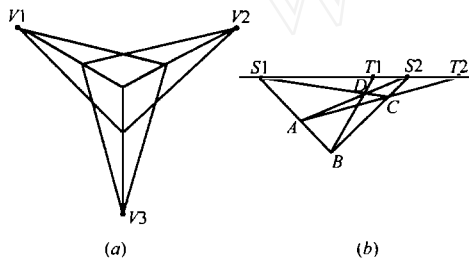


图 1 消失点与消失直线

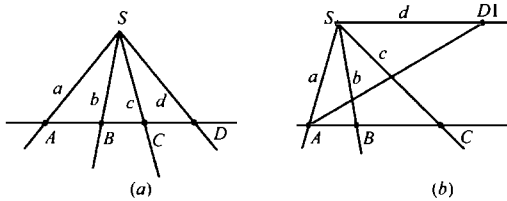


图 2 点列与线束交比不变量的对应关系

共线四点的交比是射影变换下的不变量.若 A, B, C, D 是共线的四个不同点,则四点交比 $R(A, B, C, D)$ 可表示为:

$$R(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} \quad (1)$$

共点四线的交比是射影变换下的不变量.若 L, M, R, S 是共点的四条不同直线,则四线交比 $R(L, M, R, S)$ 可表示为:

$$R(L, M, R, S) = \frac{\sin \angle LR}{\sin \angle MR} \div \frac{\sin \angle LS}{\sin \angle MS} \quad (2)$$

可以证明,共线四点的交比,等于与它成透视的共点四线的交比.如图 2,即:

$$R(A, B, C, D) = R(a, b, c, d) \quad (3)$$

(证明略,参见“几何变换”文献[3]第 61~62 页证明.)

射影几何的知识表明:平面上的一组平行直线 $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$ 相交,且交于一无限远点;若令该无限远点的成像为 V ,则图像上的点 V 对应一组平行直线,也即图像上过点 V 的一组直线平行.平面上的所有无限远点共线于该平面上的无限远直线,反映在成像中就是所有的消失点均在该平面对应的消失线上.分布在消失直线上的消失点列提供了丰富的直线方向信息.这一点将在第三节详细说明.

3 利用消失点列的射影不变量判断直线关系

经过射影变换后,直线的平行性、垂直性、两直线所夹角度的不再保持不变,由 2D 图像数据获得真实 3D 目标或场景中的直线关系须借助于射影不变量和射影不变性.由于消失直线和消失点与平面的方向、直线的方向成某种对应关系,借助于消失元素的特殊约束可以描述直线间的关系^[3,4].本节研究在无需校正和重建的条件下,如何利用平行、垂直的先验知识,通过消失点列的射影不变量得到直线关系的合理描述.这里,不包括那些与成像平面平行的直线类,因为这种直线组在图像中保持平行不相交的特点,其消失点位置无法确定.

设空间一平面 P ,给定 P 上的两组平行线的消失点 V_1 和 V_2 ,则连线 V_1V_2 定义了该平面 P 在图像中的消失直线 U .下面我们逐步分析如何由已知的消失元素获得对 P 平面上直线关系的判断.

判断两条直线平行:若两直线的成像为 L_1 和 L_2 ,求两线的交点

$$C \cong L_1 \wedge L_2 \quad (4)$$

若 $C \cdot U = 0$ (5)

说明两直线相交于无限远点,则 $L_1 \parallel L_2$, 否则两线不存在平行关系.

下面分析具有垂直关系的直线的消失点在消失直线上所具有的特殊性.为求解方便,我们把两直线的夹角限制在 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 之间.

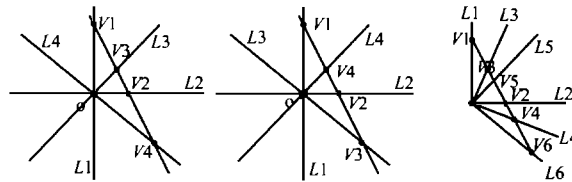


图 3 两组垂直关系的直线组成的消失点列

图 4 三组垂直关系的直线组成的消失点列

引理 1 平面 P 上的两对直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$,它们在图像中对应的消失点 V_1, V_2, V_3, V_4 (四点不存在重合关系,即四线中不存在平行线对,下文条件相同)所确定的四点交比 $R(V_1, V_2, V_3, V_4)$ 与直线 L_1 与 L_3 的夹角 θ 存在关系:

$$\lg^2(\theta) = -R(V_1, V_2, V_3, V_4) \quad (6)$$

证明 不失一般性,设共面的两对直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$ 且共点于 O ,则 $\angle L_1L_3 = \angle L_2L_4 = \theta$.由式(3)可知,该四线对应的四个消失点列的交比 $R(V_1, V_2, V_3, V_4)$ 与此线束的交比 $R(L_1, L_2, L_3, L_4)$ 对应相等.而:

$$R(L_1, L_2, L_3, L_4) = \frac{\sin \angle L_1L_3}{\sin \angle L_2L_3} \div \frac{\sin \angle L_1L_4}{\sin \angle L_2L_4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta - 90^\circ)} \div \frac{\sin(\theta + 90^\circ)}{\sin(\theta)} \\ &= -\sin^2(\theta)/\cos^2(\theta) = -\operatorname{tg}^2(\theta) \end{aligned}$$

式(6)得证。

式(6)对应的 θ ($-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) 解有两个 θ_1, θ_2 ($\theta_1 = -\theta_2$), 我们取 $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \leq 0$ 。为了进一步确定 θ 的确定值, 可以从消失点列的排列顺序中寻找答案。定义由点 V_1 到 V_2 的方向为消失直线的正方向, 当点 V_3 分离 V_1 和 V_2 时, $\theta = \theta_1$; 当点 V_4 分离 V_1 和 V_2 时, $\theta = \theta_2$ 。值得特别指出的是: 当两组垂直直线的夹角为 45° 时, $R(V_1, V_2, V_3, V_4)$ 等于 -1 , 也即消失点 V_1, V_2 与 V_3, V_4 调和共轭。这一显著特点可用于判断正方形类的目标, 因为正方形中一对邻边与它的两对角线所确定的消失点列满足调和共轭关系。

引理 2 平面上的两对直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$, 它们在图像中对应的消失点 V_1, V_2, V_3, V_4 , 平面上另一直线 N 在图像中对应的消失点为 V , 若令 $\angle L_1 L_3 = \angle L_2 L_4 = \theta$, 则直线 N 与直线 L_1 的夹角 $\angle L_1 N = \alpha$, 满足:

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = \operatorname{ctg}(\theta) \cdot R(V_1, V_2, V_3, V) \quad (7)$$

证明

$$\begin{aligned} R(V_1, V_2, V_3, V) &= \frac{\sin \angle L_1 L_3}{\sin \angle L_2 L_3} \div \frac{\sin \angle L_1 N}{\sin \angle L_2 N} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta - 90^\circ)} \div \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha - 90^\circ)} \\ &= \operatorname{ctg}(\alpha) \operatorname{tg}(\theta) \end{aligned}$$

式(7)得证。

判断两直线相交的夹角: 由判断平行的方法出发, 若两直线的交点不在消失直线上, 则两直线一定相交。已知共面的两组垂直直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$ 的消失点列 V_1, V_2, V_3, V_4 。利用引理 2, 可以判断直线 N 与 L_1 的有向夹角 α : $\operatorname{ctg}(\alpha) = \operatorname{ctg}(\theta) \cdot R(V_1, V_2, V_3, V_N) = r_1$; 同理分析另一直线 M , 得到直线 M 与直线 L_1 的有向夹角 β : $\operatorname{ctg}(\beta) = \operatorname{ctg}(\theta) \cdot R(V_1, V_2, V_3, V_M) = r_2$, 则直线 N 与直线 M 的夹角满足:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= (r_1 r_2 + 1) / (r_2 - r_1) \\ &= \frac{\operatorname{ctg}^2(\theta) R(V_1, V_2, V_3, V_L) R(V_1, V_2, V_3, V_M) + 1}{\operatorname{ctg}(\theta) [R(V_1, V_2, V_3, V_M) - R(V_1, V_2, V_3, V_L)]} \end{aligned}$$

代入式(6)的关系, 得:

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{-\frac{R(V_1, V_2, V_3, V_L) R(V_1, V_2, V_3, V_M)}{R(V_1, V_2, V_3, V_4)} + 1}{\operatorname{ctg}(\theta) [R(V_1, V_2, V_3, V_M) - R(V_1, V_2, V_3, V_L)]} \quad (8)$$

由式(8), 可以求解平面 P 上一般情况下任意两直线的夹角。

引理 3 平面上的三对直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$ 和 L_5, L_6 , 它们在图像中对应的消失点 $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$, 则直线 $L_5 \perp L_6$ 当且仅当

$$R(V_1, V_2, V_3, V_4) = R(V_1, V_2, V_3, V_5) \cdot R(V_1, V_2, V_3, V_6) \quad (9)$$

证明 由式(8), 从两线垂直与 $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = 0$ 互为充要条件入手, 易证式(9)成立。详细步骤略。

判断两条直线垂直: 由引理 3, 可以看出: 已知共面的两组垂直直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$ 的消失点列 V_1, V_2, V_3, V_4 , 对于该平面上的两直线 L_5, L_6 , 若消失点列的交比值满足式(9),

则 $L_5 \perp L_6$ 。

4 判断直线关系的具体方法

在具体分析中, 有如下步骤: 首先利用已知的具有平行关系的直线组确定消失点; 其次利用所有的消失点估计消失直线^[5]; 然后, 对平面中的任意两直线按照先判断平行、后判断垂直、最后判断夹角的顺序判断二者的关系。在具体分析中, 考虑到噪声的影响、图像数字化的因素, 以及提线算子所带来的位置偏移, 不可能得到完全真实的消失点位置或消失直线位置。因此, 依赖消失点列的射影不变量求解平面上直线的关系, 会间接受到上述因素的影响产生误差。

判断直线平行关系时, 采用如下方法: 设直线 L_1 和 L_2 与消失直线 U 的交点分别为: $V_1 \cong U \wedge L_1$ 和 $V_2 \cong U \wedge L_2$, 两线 L_1 和 L_2 的交点为: $C \cong L_1 \wedge L_2$, 设 $D(V_1, V_2)$ 表示两点 V_1, V_2 的绝对距离, $D(C, U)$ 表示点 C 到直线 L 的绝对距离, 则同时满足

$$D(V_1, V_2) \leq \varepsilon \quad (10)$$

和

$$D(C, U) \leq \eta \quad (11)$$

的两直线可以认为近似平行关系。其中 ε, η 是两个无限小的经验门限值, 它们的大小选择与目标尺寸和图像尺寸有关。

同样地, 在实际判断直线垂直的关系时, 采用如下的方法。已知两对直线 $L_1 \perp L_2, L_3 \perp L_4$, 利用 $V_i \cong L_i \wedge U$, ($i = 1, 2, 3, 4$) 求出它们在图像中对应的消失点 V_1, V_2, V_3, V_4 。对于平面上另外两线 L_5, L_6 分别求其对应的消失点, $V_5 \cong U \wedge L_5, L_6 \cong U \wedge L_6$, 利用式(1), 分别求消失点列的交比不变量: $R(V_1, V_2, V_3, V_4), R(V_1, V_2, V_3, V_5)$ 和 $R(V_1, V_2, V_3, V_6)$ 。则同时满足:

$$D = |R(V_1, V_2, V_3, V_4) - R(V_1, V_2, V_3, V_5) \cdot R(V_1, V_2, V_3, V_6)| \leq \delta \quad (12)$$

和

$$R = \left| \frac{R(V_1, V_2, V_3, V_4)}{R(V_1, V_2, V_3, V_5) \cdot R(V_1, V_2, V_3, V_6)} - 1 \right| \leq \sigma \quad (13)$$

的两直线 L_5, L_6 可以认为近似垂直关系。其中 δ, σ 是两个表示无限小的经验门限值。

经过平行和垂直判断之后, 不满足条件的两直线可以利用式(8)求解它们的近似夹角。

利用消失点列的射影不变量描述平面上的直线关系, 不但可以提供对单个目标形状、方位或姿态的一个良好估计, 还可以对多个目标之间的方位关系作出判断。上述判断是在直线已知, 而交角未知时的一种应用策略。另一方面, 利用式(6)、式(8)和式(9), 还可以在交角已知的前提下, 反过来确定直线位置或限定直线的匹配或搜索范围。当我们试图描述和分析有大量平行和垂直直线组合的人造目标或场景时(例如建筑群、交通道路网、室内场景等), 合理运用上述关系, 可以有效解决目标识别中的形状分析、方位确定以及变异检测等方面的问题。

5 实验结果

本文提出的方法是一种射影不变的特征描述方法, 对同一目标或场景的直线解释应该不随姿态的变化而改变。为了验证方法在射影变换下的一致性, 对同一场景拍摄一组不同

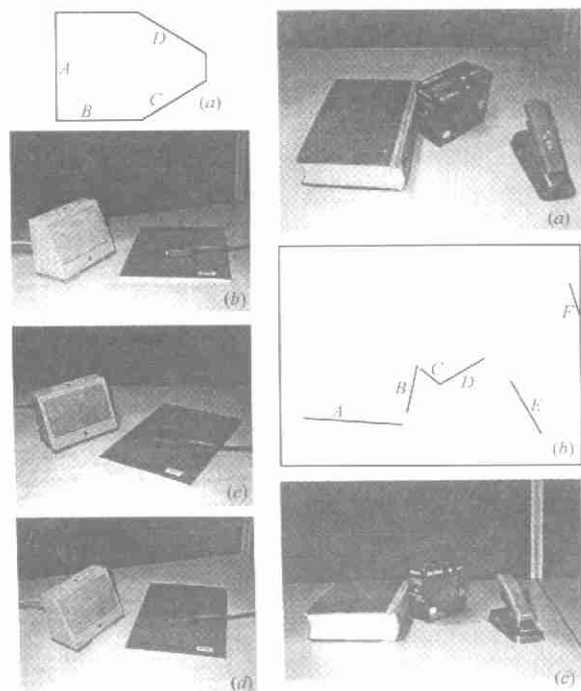


图 5 第一组实验图像

态的图像来分析各个视图中的直线关系,下面给出两组典型的实验结果,夹角数据均转化为 0 度~180 度的范围表示。

实验 1 由图 5,可以看出不同姿态下电缆头的形状发生较大变化.图 5(a)是电缆头形状的示意图,其轮廓线段间的夹角关系直接反映了它的形状特征.利用式(8)提取视图中对应的夹角关系.从不同姿态的视图中求解的结果比较相近,而且接近真实值,有关结果列于表 1.

表 1 单个目标形状特性的描述

姿态 直线段关系	图 5(b)	图 5(c)	图 5(d)	真实值
直线 A 与 B 的夹角	89 度	93 度	90 度	90 度
直线 B 与 C 的夹角	148 度	151 度	149 度	150 度
直线 C 与 D 的夹角	61 度	62 度	60 度	60 度

实验 2 由图 6,分析多个目标间的方位关系.图 6(b)是对应图 6(a)的部分直线段(图 6(c)~(e)的直线图略),其中直线段 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ 依次对应书本的两条轮廓边、磁盘盒的两轮廓边、订书机的一轮廓边和桌面一边所在直线.利用式(6)、式(7)和(8)等,求解不同直线段间的关系,可以描述书本、磁盘盒以及订书机等目标之间的方位关系,对不同视图的检测结果列于表 2.由表可见,不同姿态的视图中提取的目

标之间的方位关系是非常接近的.同时要指出,在图 6(e)中,直线段 L_2 不可见,但通过与 L_2 平行的其他直线段可以有效提取 L_2 的消失点,具体方法略。

表 2 多个目标之间方位关系的描述

目标方位关系	图 6(a)	图 6(c)	图 6(d)	图 6(e)
书本与磁盘盒(L_1 与 L_3 的夹角)	43 度	45 度	44 度	43 度
书本与订书机(L_1 与 L_5 的夹角)	70 度	71 度	71 度	72 度
订书机与桌面一条边(L_5 与 L_6 的夹角)	16 度	16 度	18 度	17 度

由实验结果可见,对在不同姿态和不同尺度下的同一对直线,利用本文方法可以提取出相对一致的夹角数值,这对于目标识别和景物解释是很有意义的。

6 小结

在无需校准或 3D 重建的条件下,利用已知的平行和垂直约束,可以得到平面的消失直线以及直线上的消失点.本文研究了利用消失点列的射影不变量描述平面上直线的相互关系问题,通过分析消失点列的各种交比值我们不但可以得到直线平行、垂直、相交的合理判断,还可求解任意两直线的夹角.实验结果验证了方法的有效性。

参考文献:

- [1] 梅向明,刘增贤,等.高等几何[M].高等教育出版社,1983年11月第1版.
- [2] 张建初.高等代数与空间解析几何[M].华东理工大学出版社,1993年12月第1版.
- [3] 龙泽斌.几何变换[M].湖南科学技术出版社,1984年3月第一版.
- [4] Kenichi Kanatani. Computational projective geometry [J]. CVGIP: Image Understanding, 1991, 54(3): 333-348.
- [5] Kenichi Kanatani. Hypothesizing and testing geometric properties of image data [J]. CVGIP: Image Understanding, 1991, 54(3): 349-357.
- [6] Barrett E B, Payton P M, Haag N N, Brill M H. General methods for determining projective invariants in imagery [J]. CVGIP: Image Understanding, 1991, 53(1): 46-65.
- [7] Weiss I. Geometric invariants and object recognition [J]. IJCV, 1993, 10(3): 207-231.
- [8] Suk Tomas, Flusser Jan. Point-based projective invariants [J]. PR, 2000, 33: 251-261.

作者简介:



刘 方 1970 年 3 月生于山东省济南市.1995 年于长沙国防科技大学电子工程系取得硕士学位,现为国防科技大学电子科学与工程学院讲师,在读博士研究生.主要从事图像分析与理解、模式识别和信息融合等方向的科学研究与教学工作。

王润生 1941 年 8 月生于江苏省扬州市.1964 年毕业于哈尔滨军事工程学院电子工程系.现为国防科技大学电子科学与工程学院教授,博士生导师.主要从事图像分析与理解、模式识别和信息融合等方向的科学研究与教学工作。