

基于小波变换的分形随机信号的卡尔曼滤波

赵娟¹, 马洪¹, 游志胜², 梅田三千雄³

(1. 四川大学数学学院, 四川成都 610064; 2. 四川大学计算机学院, 四川成都 610064; 3. 大阪电气通信大学情报工学部, 日本大阪府寝屋川市)

摘要: 本文基于多尺度卡尔曼滤波方法来估计淹没在加性高斯白噪声中的分形布朗运动. 针对每一尺度, 给出了相应的动态系统参数和运动模型方程以及更精确的估计算法. 并与多尺度维纳滤波进行了对比, 计算机仿真结果证明了其优越性.

关键词: 分形随机信号; 分形布朗运动; 1/f过程; 卡尔曼滤波; 小波变换

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 09-1157-04

Kalman Filtering of Fractal Stochastic Signals Based on Wavelet Transform

ZHAO Juan, MA Hong, YOU Zhi-sheng, Michio Umeda

(1. Dept. of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China;

2. Dept. of Computer Science, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China;

3. Dept. of Information Engineering, Osaka Electro-Communication University, Japan)

Abstract: A filter bank design based on orthonormal wavelets and equipped with a multiscale Kalman filter was recently proposed for estimating fractal Brownian motion in additive Gaussian white noise. In this paper, we give the corresponding parameters of the dynamic system and more accurate estimation algorithm. Comparisons between Wiener and Kalman filters are given. Typical computer simulation results demonstrate its feasibility and effectiveness.

Key words: fractal stochastic signal; fractional Brownian motion; 1/f processes; Kalman filtering; wavelet transform

1 引言

在信号处理中, 具有自相似性和长程相关性的 1/f 类分形随机过程(简称 1/f 过程)正引起人们日益广泛的关注. 许多常见的随机信号, 例如地球物理时间序列、生物电信号和语音信号、通讯和计算机网络数据传输中的突发误差等, 都可以看作 1/f 过程. 由 Mandelbrot 和 Van Ness^[6]于 1968 年提出的分形布朗运动(fractional Brownian motion, 简记为 fBm)就是 1/f 过程的一个典型例子. 长期以来, 由于缺乏处理这类非平稳随机过程的相应手段, 它们的应用受到限制. 在 P. Flandrin 1992 年的文献[3]中, 具有尺度分析能力的小波变换有效的克服了传统方法不能去相关性的弱点. 通过对 fBm 进行正交小波变换发现, 在不同尺度下小波系数序列的自相关和互相关函数衰减很快. 这使 1/f 类分形随机信号的波形估计、参数估计以及信号检测等有了实质性的发展.

针对 1/f 类分形随机信号的波形估计, 目前已提出了几种基于小波变换的有效方法, 如 G. W. Worell 和 A. V. Oppenheim 提出的小波域中的最大似然估计方法^[7], B. S. Chen 等提出的考虑系统影响的多尺度维纳滤波方法^[1]和卡尔曼滤波方法^[2]以及 G. A. Hirchoren 和 C. E. D' Attellis 提出的考虑小波系数相关性和逼近系数的多尺度维纳滤波方法^[4]和卡尔曼滤波

方法^[5]. 本文在文献[5]的基础上, 针对每一尺度, 给出了相应的动态系统参数和运动模型方程以及较之文献[5]更精确的估计算法. 并与多尺度维纳滤波进行了对比, 计算机仿真结果证明了其优越性.

2 多尺度卡尔曼滤波

设观测信号 $y(k) = B_H(k) + w(k)$, $B_H(k)$ 为待估 fBm, $w(k)$ 为与 $B_H(k)$ 独立的零均值方差为 σ_w^2 的高斯白噪声. 对 $y(k)$ 进行小波变换, 得到

$$y_j[n] = d_j[n] + w_j[n], j = 1, 2, \dots, J$$

$d_j[n]$ 和 $w_j[n]$ 分别为 fBm 和 $w(k)$ 的小波系数. 对任意尺度 j , $\{w_j[n], n \in N\}$ 为方差为 σ_w^2 的白噪声; $\{d_j[n], n \in N\}$ 为平稳有色的序列^[3]. 考虑建立如下动态系统

$$d_j[n] = \sum_{i=1}^p \phi_i d_j[n-i] + e_j[n] = \phi_j^T x_j[n-1] + e_j[n] \quad (1)$$

其中 $\{e_j[n], n \in N\}$ 为零均值方差为 σ_e^2 的白噪声,

$$x_j[n-1] = (d_j[n-1], d_j[n-2], \dots, d_j[n-p])^T$$

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$$

对于系统参数, 有如下结论:

收稿日期: 2000-07-31; 修回日期: 2001-04-12

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 19971063); 国家自然科学基金重点项目 (No. 69732010)

定理 1 对于式(1)所示的动态系统,如果 $E(e_j[n]e_j[m])=0, n \neq m$ 且 $E(x_j[0]e_j[n])=0, n \geq 1$ 成立,则系统参数为

$$\phi = h_j R_{x_j}^{-1}[n-1], \sigma_e^2 = R_y(0) - h_j R_{x_j}^{-1}[n-1] h_j^t \quad (2)$$

其中 $h_j = (R_y(1), R_y(2), \dots, R_y(p))$

$$R_{x_j}[n-1] = \begin{pmatrix} R_y(0) & R_y(1) & \dots & R_y(p-1) \\ R_y(1) & R_y(0) & \dots & R_y(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(p-1) & R_y(p-2) & \dots & R_y(0) \end{pmatrix}$$

$R_y(n)$ 为小波系数序列的自相关函数.

证明 对式(1)两边同时求方差,由于 $E(x_j[n-1]e_j[n])=0$,得到

$$R_y(0) = \phi R_{x_j}[n-1] \phi^t + \sigma_e^2 \quad (3)$$

再对式(1)两边同时关于 $d_j[n-k]$ 求协方差,得到

$$R_y(k) = \sum_{i=1}^p \phi^i R_y(|k-i|), 1 \leq k \leq p \quad (4)$$

将式(4)写成矩阵形式,即

$$R_{x_j}[n-1] \phi^t = h_j^t \quad (5)$$

式(3)、(5)联立求解,即得式(2). 证毕.

由此,系统的状态模型方程为

$$\begin{aligned} x_j[n] &= F_j x_j[n-1] + G_e y_j[n] \\ y_j[n] &= H x_j[n] + w_j[n] \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $F_j = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, G = (1, 0, \dots, 0)^t, H = (1, 0,$

$\dots, 0)$ 然后根据卡尔曼滤波公式,对小波系数序列 $\{d_j[n], n \in N\}$ 作出估计.不妨将 $x_j[n]$ 的估计量 $\hat{x}_j[n]$ 记为

$$\hat{x}_j[n] = (\hat{d}_j[n, n], \hat{d}_j[n, n-1], \dots, \hat{d}_j[n, n-p+1])^t$$

$$P_n^j = E(\hat{x}_j[n] - x_j[n])(\hat{x}_j[n] - x_j[n])^t$$

在文献[5]中,将 $\hat{d}_j^i[n]$ 作为 $d_j[n]$ 的估计,其中

$$\begin{aligned} \hat{d}_j^i[n] &= (1, 0, \dots, 0) \hat{x}_j[n] \\ &= \phi^i \hat{x}_j[n-1] + \frac{P_{n/n}^j}{P_{n/n}^j + \sigma_w^2} (y_j[n] - \phi^i \hat{x}_j[n-1]) \end{aligned} \quad (7)$$

$$P_{n/n}^j = E(\phi^i \hat{x}_j[n-1] - d_j[n])^2 = \phi^i P_{n-1}^j \phi^t + \sigma_e^2 \quad (8)$$

此时,小波系数估计量 $\hat{d}_j^i[n]$ 的均方误差为

$$\sigma_j^i[n] = E(\hat{d}_j^i[n] - d_j[n])^2 = (1, 0, \dots, 0) P_n^j (1, 0, \dots, 0)^t \quad (9)$$

将上述采用 $\hat{d}_j^i[n]$ 估计量的递推算法称为卡尔曼滤波算法 1.

我们注意到当 $p > 1$ 时,在上述算法中每进行一次递推所得到的 $\hat{x}_j[n]$ 的后 $p-1$ 项与 $\hat{x}_j[n-1]$ 的前 $p-1$ 项并不相等.事实上,由

$$\hat{x}_j[n] = F_j \hat{x}_j[n-1] + K_n^j (y_j[n] - \phi^i \hat{x}_j[n-1])$$

可知

$$\begin{aligned} \hat{d}_j^i[n, n-i] &= \hat{d}_j^i[n-1, n-i] + \frac{P_{n/n}^j}{P_{n/n}^j + \sigma_w^2} \\ &\cdot (y_j[n] - \phi^i \hat{x}_j[n-1]), i = 1, \dots, p-1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } P_{n/n}^j &= E(\phi^i \hat{x}_j[n-1] - d_j[n])(\hat{d}_j^i[n-i] - d_j[n-i]) \\ &= (0, \dots, 1, \dots, 0) P_{n-1}^j \phi^t \end{aligned} \quad (11)$$

$(0, \dots, 1, \dots, 0)$ 为第 i 个分量为 1 的单位向量.

将 $\hat{d}_j^i[n+p-1, n]$ 作为 $d_j[n]$ 的估计,记为 $\hat{d}_j[n]$,即

$$\hat{d}_j[n] \triangleq \hat{d}_j^i[n+p-1, n] = (0, \dots, 0, 1) \hat{x}_j[n+p-1] \quad (12)$$

并称之谓为卡尔曼滤波算法 2. 此算法并不增加算法计算量. 此时,小波系数估计量 $\hat{d}_j[n]$ 的均方误差为

$$\begin{aligned} \sigma_j^2[n] &= E(\hat{d}_j[n] - d_j[n])^2 \\ &= (0, \dots, 0, 1) P_{n+p-1}^j (0, \dots, 0, 1)^t \end{aligned} \quad (13)$$

对于上述两种估计 $\hat{d}_j^i[n]$ 和 $\hat{d}_j[n]$, 有如下结论:

定理 2 $\sigma_j^2[n]^1 - \sigma_j^2[n] = \sum_{i=1, \dots, p-1} \frac{P_{n/n+i}^j}{P_{n/n}^j + \sigma_w^2} > 0$, 即在均方误差意义下, $\hat{d}_j[n]$ 是比 $\hat{d}_j^i[n]$ 更精确的估计量.

证明 对式(10)两边同时减去 $d_j[n-i]$, 再同时平方求期望,得到

$$\begin{aligned} P_{n, i+1}^j &= P_{n-1, i}^j + \frac{P_{n/n}^j}{(P_{n/n}^j + \sigma_w^2)^2} E(y_j[n] - \phi^i \hat{x}_j[n-1])^2 \\ &\quad - 2 \frac{P_{n/n}^j}{P_{n/n}^j + \sigma_w^2} E(\hat{d}_j^i[n-1, n-i] \\ &\quad - d_j[n-i])(\phi^i \hat{x}_j[n-1] - y_j[n]) \end{aligned}$$

其中 $P_{n, i+1}^j$ 和 $P_{n-1, i}^j$ 分别为 P_n^j 对角线上的第 $i+1$ 个元素和 P_{n-1}^j 对角线上的第 i 个元素. 将 $y_j[n] = d_j[n] + w_j[n]$ 代入上式,由于 $\hat{x}_j[n-1], d_j[n]$ 与 $w_j[n]$ 的独立性以及式(8)和(11),有

$$\begin{aligned} E(y_j[n] - \phi^i \hat{x}_j[n-1])^2 &= P_{n/n}^j + \sigma_w^2 \\ E(\hat{d}_j^i[n-1, n-i] - d_j[n-i])(\phi^i \hat{x}_j[n-1] - y_j[n]) &= P_{n/n}^j \end{aligned}$$

从而得到 $P_{n, i+1}^j = P_{n-1, i}^j - \frac{P_{n/n}^j}{P_{n/n}^j + \sigma_w^2}, i = 1, \dots, p-1$. 即每进行一次递推所得到的估计量比前一次估计量的均方误差小. 又由式(9)和(13),最后得到 $\sigma_j^2[n]^1 - \sigma_j^2[n] =$

$$\sum_{i=1, \dots, p-1} \frac{P_{n/n+i}^j}{P_{n/n}^j + \sigma_w^2} > 0. \text{ 证毕.}$$

对于逼近系数 $a_j[n]$ 的估计,已知观测信号 $y(k) = B_H(k) + w(k)$ 的逼近系数 $y_j^q[n] = a_j[n] + w_j^q[n]$, 采用无记忆估计量

$$\hat{a}_j[n] = E\{a_j[n] | y_j^q[n]\} = \frac{\text{Var}(a_j[n])}{\text{Var}(a_j[n]) + \sigma_w^2} y_j^q[n] \quad (14)$$

它在均方误差意义下是最优的,具有均方误差

$$\sigma_a^2[n] = E(a_j[n] - \hat{a}_j[n])^2 = \frac{\text{Var}(a_j[n]) \sigma_w^2}{\text{Var}(a_j[n]) + \sigma_w^2} \quad (15)$$

最后得到用多尺度卡尔曼滤波对 $B_H(k)$ 进行波形估计的均方误差为

$$E[B_H(k) - \hat{B}_H(k)]^2 = \frac{1}{N_0} \left(\sum_{n=0}^{m(j)-1} \sigma_a^2[n] + \sum_{j=1}^l \sum_{n=0}^{m(j)-1} \sigma_j^2[n] \right) \quad (16)$$

其中 N_0 为样点个数, $m(j)$ 为第 j 层的样点数, $k = 0, \dots, N_0 - 1$.

3 与多尺度维纳滤波的比较

G. A. Hirchoren 和 C. E. D' Attellis 在文[4]中采用多尺度

Wiener 滤波方法来估计 $B_H(k)$. 对于逼近系数仍采用无记忆估计量 $\hat{a}_j[n]$, 所不同是对小波系数 $d_j[n]$ 采用 Wiener 滤波来进行估计, 得出估计值

$$\hat{d}'_j[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_j(k) y_j[n-k], j=1, 2, \dots, J \quad (17)$$

尺度 j 的 Wiener 滤波系数 $h_j^o = r_{d_j, y_j} R_{y_j}^{-1}$, 其中

$$h_j^o = [h_j(0), h_j(1), \dots, h_j(M-1)]$$

$$r_{d_j, y_j} = [R_j(0), R_j(1), \dots, R_j(M-1)]$$

$$R_{y_j} = \begin{bmatrix} R_j(0) + \sigma_w^2 & R_j(1) & \dots & R_j(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_j(M-1) & R_j(M-2) & \dots & R_j(0) + \sigma_w^2 \end{bmatrix}$$

此时, 尺度为 j 的小波系数序列估计的均方误差为

$$\sigma_j'^2 = E(d_j[n] - \hat{d}'_j[n])^2 = R_j(0) - r_{d_j, y_j} R_{y_j}^{-1} r_{d_j, y_j}^T \quad (18)$$

最后得到用多尺度 Wiener 滤波对 $B_H(k)$ 进行波形估计的均方误差为

$$E[(B_H(k) - \hat{B}'_H(k))^2] = \frac{1}{N_0} \left[\sum_{n=0}^{m(j)-1} \sigma_a^2[n] + \sum_{j=1}^J m(j) \sigma_j'^2 \right] \quad (19)$$

将卡尔曼滤波与上述维纳滤波相比较, 二者系统系数相当类似, 但卡尔曼滤波具有更大的灵活性, 可用于背景噪声为非平稳的情况. 再者虽然同样基于最小均方误差准则, 维纳滤波对于当前时刻的小波系数, 总是用包括当前观察在内的前个观测值来估计; 而卡尔曼滤波则用所有已得到的观测值. 卡尔曼滤波使用的信息多, 因而得到的估计量有更高的精确度.

4 计算机模拟结果

为验证 2,3 部分的结论, 我们用不同方法来估计淹没在加性高斯白噪声中的分形布朗运动. 给定 M , 维纳滤波将使用相关系数 $R_j(0), R_j(1), \dots, R_j(M-1)$; 而给定 p , 卡尔曼滤波将使用相关系数 $R_j(0), R_j(1), \dots, R_j(p)$. 为在使用相同信息量的情况下比较方法间的优劣, 我们将始终保持 $p = M - 1$. 图 1 为尺度参数 $H = 0.35$ 的分形布朗运动 (由随机 Weierstrass 函数产生); 图 2 为受零均值方差 $\sigma_w^2 = 1$ 的高斯白噪声干扰后得到观测信号; 图 3 为用卡尔曼滤波算法 2 ($p = 3$) 得到的估计信号, 估计误差为 0.3020; 图 4 为用维纳滤波方法 ($M = 4$) 得到的估计信号, 估计误差为 0.3044. 二者均采用 Haar 小波基, 分解尺度均为 3.

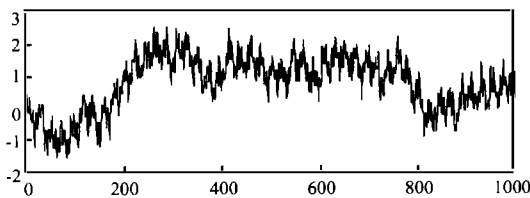


图 1 尺度参数 $H = 0.35$ 的分形布朗运动

由于具有高阶消失矩的正交小波基使小波系数的相关性衰减得更快^[3], 那么在相同的条件下, 取不同的小波基, 具有高阶消失矩的小波基利用的信息更完全, 因而估计效果更好. 下面用 Haar 小波和 Daubechies5 小波 (具有高阶消失矩) 来作对比, 针对不同尺度参数 H , 样点数为 2048, 噪声方差均为 1,

同时比较卡尔曼滤波算法 1、卡尔曼滤波算法 2 (两算法计算量相同) 和维纳滤波的均方误差值, 其中 $p = 4, M = 5$, 分解尺度均为 3.

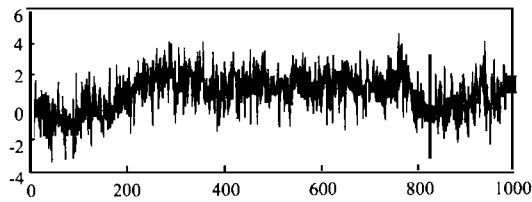


图 2 淹没在加性高斯白噪声中的分形布朗运动

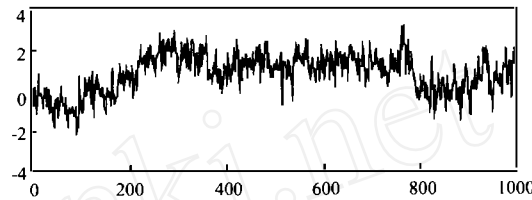


图 3 用卡尔曼滤波算法 2 估计出的分形布朗运动

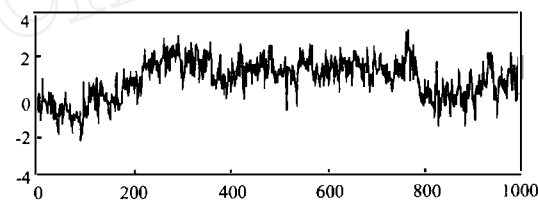


图 4 用维纳滤波估计出的分形布朗运动

表 1 取 Haar 小波时的均方误差值

H	Haar 小波		
	Kalman 滤波算法 1	Kalman 滤波算法 2	Wiener 滤波
0.55	0.5499	0.5498	0.5499
0.60	0.5551	0.5543	0.5551
0.65	0.5627	0.5606	0.5627
0.70	0.5726	0.5683	0.5727
0.75	0.5849	0.5770	0.5850
0.80	0.5994	0.5862	0.5998
0.85	0.6161	0.5954	0.6170
0.90	0.6345	0.6040	0.6367
0.95	0.6544	0.6115	0.6588

表 2 取 Daubechies5 小波时的均方误差值

H	Daubechies5 小波		
	Kalman 滤波算法 1	Kalman 滤波算法 2	Wiener 滤波
0.55	0.4610	0.4550	0.4610
0.60	0.4520	0.4454	0.4520
0.65	0.4442	0.4370	0.4442
0.70	0.4374	0.4297	0.4374
0.75	0.4315	0.4231	0.4315
0.80	0.4262	0.4173	0.4263
0.85	0.4216	0.4122	0.4217
0.90	0.4176	0.4076	0.4177
0.95	0.4141	0.4035	0.4141

由上表看出, 卡尔曼滤波比维纳滤波具有更高的精确度, 在相同的条件下平均改善约为 2%; 并且小波基的选择对估

计效果影响比较大,采用具有高阶消失矩的正交小波基平均改善可近 30% 左右. 对于 p 和分解尺度 J 的取法,较大的 p 可有效地提高估计精确度. 下面针对尺度指数 $H=0.75$, 样点数为 2048, 噪声方差为 1, 采用 Haar 小波, 计算卡尔曼滤波算法 2 的均方误差值, 有如下结果:

表 3 不同 p 和分解尺度 J 下的均方误差值

$p=1$	$J=11$	0.5879	$p=2$	$J=3$	0.5805
$p=2$	$J=11$	0.5795	$p=3$	$J=3$	0.5782
$p=3$	$J=11$	0.5772	$p=4$	$J=3$	0.5770

5 结论

本文在文献[5]的基础上,对于多尺度卡尔曼滤波方法估计淹没在加性高斯白噪声中的分形布朗运动,针对每一尺度,给出了相应的动态系统参数和运动模型方程以及较文献[5]更精确的估计算法. 并与多尺度维纳滤波进行了深入比较,计算机模拟结果证明了其优越性,使之可广泛用于噪声背景下的信号估计,例如雷达通信、生物医学信号处理、地质勘探等等.

参考文献:

- [1] B S Chen, C W Lin. Multiscale Wiener filter for the restoration of fractal signals: Wavelet filter bank approach [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(11): 2972 - 2982.
- [2] B S Chen, W S Hou. Deconvolution filter design for fractal signal transmission systems: A multiscale Kalman filter bank approach [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1997, 45: 1395 - 1364.
- [3] P Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion [J]. IEEE Trans. Information Theory, 1992, 38(2): 910 - 917.

- [4] G A Hirchoren, C E D Attellis. Estimation of fractal signals using wavelets and filter banks [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1998, 46(6): 1624 - 1630.
- [5] G A Hirchoren, C E D Attellis. Estimation of fractal Brownian motion with multiresolution Kalman filter banks [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(5): 1431 - 1434.
- [6] B B Mandelbrot, J W Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional motions, fractional noises and applications [J]. SIAM Rev., 1968, 10(4): 422 - 437.
- [7] G W Wornell, A V Oppenheim. Estimation of fractal systems from noisy measurements using wavelets [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40(3): 611 - 622.

作者简介:



赵 娟 女. 1975 年生于四川省西充, 1997 年毕业于四川大学数学系数理统计专业, 现为四川大学数学学院概率与数理统计专业博士研究生, 专业方向为随机信号处理. 感兴趣的研究领域是图像处理、模式识别、语音信号处理等.



马 洪 男. 1945 年生于四川省成都市, 1969 年毕业于四川大学数学系, 留校任教. 现为四川大学数学学院教授, 概率统计教研室主任. 1984 年至 1986 年赴日本神户大学留学, 1996 年、1997 年作为访问教授两次赴香港浸会大学计算机科学系进行合作研究, 1997 年至 1998 年任日本大阪电气通信大学客座研究员. 主要研究方向有随机过程、随机信号处理、图像处理、模式识别、信源编码.