

一种快速的三维 VLSI 互连电容 提取方法: 虚拟多介质方法

喻文健¹, 王泽毅¹, 侯劲松²

(1. 清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084; 2. 中国华大集成电路设计中心, 北京 100015)

摘 要: 本文提出一种基于直接边界元方法的虚拟多介质(Quasi Multiple Medium, QMM)加速方法, 并将它应用于三维 VLSI 多介质互连电容的计算中. QMM 方法将三维互连电容器中的单层介质看成由多个虚拟介质组成, 从而大大减少了系数矩阵中的非零元数目, 最终使计算时间和存储空间显著减少. 通过比较 QMM 算法与非 QMM 算法, 以及商业软件 Raphael 对实际三维互连结构的计算, 结果表明 QMM 算法在保持计算准确性的同时, 可使电容提取的效率得到显著提高.

关键词: VLSI; 寄生电容; 直接边界元; 虚拟多介质

中图分类号: O241 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2001)11-1526-04

A Fast Method for 3-D VLSI Interconnect Capacitance Extraction: Quasi-Multiple Medium Method

YU Wenjian¹, WANG Zeyi¹, HOU Jinsong²

(1. Dept. of Computer Science & Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Dept. Computer Aided Design, China Integrated Circuit Design Center, Beijing 100015, China)

Abstract: A new Quasi Multiple Medium (QMM) method is presented to accelerate computation of the direct boundary element method, and is applied to extraction of the 3-D interconnect capacitance with multiple dielectrics. Processing single dielectric as a combination of many quasi multiple mediums, the QMM method produces much fewer non-zero entries in the coefficient matrix. As a result, the QMM method can greatly reduce the CPU time and save memory space used in the capacitance extraction. The QMM computation for several capacitors from actual layout is compared with that of non-QMM and Raphael, a famous commercial tool for parasitic capacitance extraction. The results of numerical experiments verify the analysis.

Key words: VLSI; parasitic capacitance; direct boundary element method; quasi multiple medium

1 引言

在 VLSI 电路中, 随着器件密度和工作频率的迅速提高, 互连线的寄生效应已成为影响诸如延迟、功耗和可靠性等电路性能的主要因素. 这增加了人们研究寄生参数高效提取算法的兴趣. 在互连寄生电容器中, 电势满足带混合边界条件的拉普拉斯方程. 许多数值方法已被用于计算互连线的寄生电容, 主要可分为三类: 有限差分方法(Finite Difference Method, FDM)^[1], 有限元方法(Finite Element Method, FEM)^[2]和边界元方法(Boundary Element Method, BEM)^[3~5]. 与有限差分和有限元方法相比, 边界元法的主要优点是精度高, 较少的离散变量和较强处理复杂边界形状的能力^[6,7].

在边界元方法中, 直接边界元方法由于在边界积分方程中包含电势和法向电场强度两个变量, 更便于处理带混合边界条件的边值问题^[7,8], 很适合有限区域多介质寄生电容器的模拟. 一般来说, 直接边界元方法会导致一个非对称的系数矩阵, 并在每一介质区域对应产生一稠密矩阵, 这使得边界元

离散方程组的形成和求解需要耗费很多的 CPU 时间和内存空间^[6,9], 特别是对三维问题.

文献[10]和[11]提出了一种新的基于直接边界元分析的虚拟多介质(Quasi Multiple Medium, QMM)方法, 它利用直接边界元方法的局部化特性, 结合稀疏矩阵存储技术和线性方程组的迭代解法, 可大大加速直接边界元计算. 文献[11]的分析指出, 虚拟多介质方法有近似线性的计算复杂度. 但是, 文献[10]和[11]只分析了二维、或简单的三维单介质电容模型, 未考虑到实际三维互连寄生电容器中多层介质、导体分布不规则等复杂因素. 本文从实际互连结构的特点出发, 将虚拟多介质方法用于实际三维互连电容提取中. 初步分析及计算结果表明, 采用虚拟多介质方法提取三维寄生电容能使计算速度提高(接近 10 倍), 而内存使用量仅为原来的几分之一.

2 多介质寄生电容计算

在三维多介质情形下, 电势 u 在待解域 $\Omega = \cup \Omega_i$ 中满足如下带混合边界条件的拉普拉斯方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_i \nabla^2 u = 0, & \text{在 } \Omega_i (i = 1, \dots, M) \text{ 中} \\ u = u_0, & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \\ q = \partial u / \partial n = q_0 = 0, & \text{在 } \Gamma_q \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

其中, Ω_i 表示第 i 个介质占据的空间区域, Γ_u 是强加边界(导体表面), 其上电势已知, 由偏置电压确定, Γ_q 是自然边界(模拟区域边界), 其上法向电场 $\partial u / \partial n$ 为零, n 是边界单位外法向, M 是区域 Ω 中所含介质数。此外, 在相邻两介质区域 a, b 的交界面上, 电势和法向电场强度满足如下的连续性条件:

$$\begin{cases} \varepsilon_a \cdot \partial u_a / \partial n_a = - \varepsilon_b \cdot \partial u_b / \partial n_b \\ u_a = u_b \end{cases} \quad (2)$$

交界面上电势与法向电场均为未知量, $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ 分别为相邻两种介质 a, b 的介电常数, 而 n_a 和 n_b 分别为其边界的单位外法向量。寄生电容计算可归结为求解导体表面上满足方程(1)与(2)的法向电场强度^[5]。

使用点配置的直接边界元方法, 式(1)中的拉普拉斯方程转化为如下直接边界积分方程^[6-8]:

$$c_s u_s^i + \int_{\partial \Omega_i} q^* u^i d\Gamma = \int_{\partial \Omega_i} u^* q^i d\Gamma, \quad i = 1, \dots, M \quad (3)$$

其中, u_s^i 是介质 i 中源点 s 的电势, c_s 是与源点附近边界几何形状有关的常数, $u^* = 1/4\pi r$ 是拉普拉斯方程基本解, 其沿单位外法向 n 的方向导数 $q^* = \partial u^* / \partial n = - (r, n) / 4\pi r^3$, r 为源点到积分点的距离, $\partial \Omega_i$ 是包围介质 i 的边界。对介质 i , 将其边界 $\partial \Omega_i$ 离散为 N_i 个边界元(介质交界面上的元同属于相邻两种介质), 并采用常数元计算, 可得到方程的离散形式^[6]:

$$H^i \cdot U = G^i \cdot Q, \quad i = 1, \dots, M \quad (4)$$

其中, U^i 表示介质 i 中边界元上的电势 u 组成的列向量, Q^i 表示介质 i 中边界元上的法向电场 q 组成的列向量, 而 H^i 和 G^i 分别为相应的系数矩阵。

将式(4)中未知量移到等号左边, 代入(1)中边界条件, 并利用相邻介质交界面上的连续性条件(2), 组织所有介质的方程, 得到如下线性代数方程^[5,6]:

$$Ax = f \quad (5)$$

用 GMRES^[12] 等迭代法求解方程组(5), 即可得到强加边界上的法向电场强度, 然后算出寄生电容。

3 虚拟多介质方法基本原理

从前面所述可以发现, 形成和求解方程(5)是整个计算过程中最为基本的步骤。对一个实际三维互连电容器, 方程(5)通常是一个包含数千变量的大型非对称线性方程组。因此, 形成和求解将耗费电容提取的大部分时间。

对多介质问题, 在离散的边界变量之间存在着两种相互作用: 直接作用和间接作用。一组变量间存在直接作用是指它们包含在同一种介质的边界积分方程(3)中, 否则它们之间的作用就是间接作用。换句话说, 直接相互作用仅限属于同一介质的边界变量之中, 称这种现象为直接边界元法的局部化性质^[11]。

在线性方程组(5)中, 系数矩阵 A 反映了直接边界元方法的这种局部化性质。如果两个变量之间存在直接相互作用, 它们形成 A 的一个非零项, 否则, A 中相应的元素为 0。因此,

对于多介质问题, 局部化性质使矩阵 A 成为一个稀疏的分块矩阵, 这有利于迭代法求解效率的提高。图 1 显示了一个两块介质的电容器, 及其对应系数矩阵 A 的非零元分布。

虚拟多介质方法充分利用了直接边界元方法的这种局部化性质。对于一个单介质问题, 直接边界元方法导致求解一个非对称的稠密矩阵。如果设想介电常数为 ε 的一块介质被“切成 Q 个虚拟的介质块(如图 2), 这些介质块的介电常数都与原来的 ε 相同。那么, 一个单介质问题就转化为一个含 Q 块虚拟介质的多介质问题。

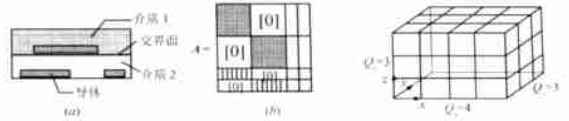


图 1 (a) 一个含两个介质的互连电容器; (b) 图(a)所示结构对应的稀疏系数矩阵 A 。图 2 一个单介质电容器在笛卡尔坐标系下切割为 $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4$ 块虚拟介质。

采用虚拟多介质加速后的系数矩阵 A 将是一个稀疏矩阵。当虚拟介质数目 Q 取适当值时, 矩阵 A 中的非零元个数将大大少于原来的矩阵 A 。使用稀疏矩阵存储技术和 GMRES 迭代方法求解方程(5), 可以利用虚拟多介质方法带来的这种稀疏性, 大大减少整个电容计算的时间和内存的使用。

应该指出, 虚拟多介质加速方法会在相邻的虚拟介质之间增加新介质交界面, 并使离散变量增多, 不利于方程的求解。但我们将看到, 在适当切割的情况下, 虚拟多介质带来的系数矩阵稀疏性将远远超过这些不利影响。

4 三维互连电容的虚拟多介质计算

来自实际版图的三维互连电容器, 通常是分层的多介质结构, 导体嵌于各层介质中。要计算的是关键路径上的导体(主导体, 偏压为 1 伏特)与其他导体(环境导体, 偏压为 0 伏特)之间的耦合电容。采用 QMM 方法加速计算, 首先要将原来的分层介质“切割”为多个虚拟介质块, 再对新的复杂多介质几何结构应用直接边界元方法进行求解, 以期得到计算效率的提高。

4.1 CPU 时间分析

用直接 BEM 方法提取电容的总时间主要包括离散积分方程形成系数矩阵 A 时间 t_{gen} , 和线性方程组(5)的求解时间 t_{sol} , 这两者之和一般占总时间的 90% 以上。若采用稀疏矩阵存储技术和 GMRES 一类迭代解法, 则有:

$$t_{gen} \propto Z, \quad t_{sol} \propto Z \cdot k \quad (6)$$

其中, Z 为系数矩阵中非零元的个数, k 为迭代法求解所需的迭代次数。

如果忽略其他的处理时间, 并且假设, QMM 加速方法使用前后所用 GMRES 迭代次数变化不大, 则可得出使用 QMM 后的加速比为:

$$R_{speedup} = t/i \approx Z/Z' \quad (7)$$

其中, Z 和 Z' 分别代表使用 QMM 前后(非 QMM 算法和 QMM 算法)的系数矩阵非零元数目, t 与 i 分别对应非 QMM 与 QMM 的电容提取时间。公式(7)表明非零元数目之比反映了

QMM 算法的加速比。

对于非 QMM 算法, 假设第 i 层介质中含第一类边界元 (在强加边界和自然边界上, 只含一个变量) 的数目为 a , 第二类边界元 (介质交界面上, 含两个变量) 数目为 b , 则在使用点配置常数元生成的系数矩阵中产生非零元数目为:

$$Z_i = (a + b)(a + 2b) \quad (8)$$

而对 QMM 算法, 原有的一层介质分解为 Q 个虚拟介质, 也有类似的公式:

$$\dot{Z}_i = \sum_{j=1}^Q (a_j + b_j)(a_j + 2b_j) \quad (9)$$

其中, a_j 和 b_j 分别代表第 j 个虚拟介质中第一类边界元和第二类边界元的数目。假设采用了 QMM 加速之后, 原有的边界表面上边界元的划分不变, 则有下述关系:

$$\sum_{j=1}^Q a_j = a, \quad \sum_{j=1}^Q b_j = b + 2c \quad (10)$$

在上式中, c 为在新增加的虚拟介质交界面上边界元的总数。公式(9)和(10)包含了一个多元函数的条件极值问题, 采用通常的拉格朗日乘数法, 可求出 \dot{Z}_i 的极(最)小值, 利用公式(8)并整理得:

$$\dot{Z}_{i, \min} = \frac{Z_i + 2c(3a + 4b) + 8c^2}{Q} \quad (11)$$

因此, 使用 QMM 加速前后第 i 层介质产生的非零元数目之比为:

$$R_i = Z_i / \dot{Z}_{i, \min} = Q \frac{Z_i}{Z_i + 2c(3a + 4b) + 8c^2} \quad (12)$$

由于不同介质层边界元的数目与分布不同, QMM 算法使各层介质对应的矩阵非零元减少的程度也不同。QMM 算法的整体加速比为其对各层介质加速比例的加权平均:

$$R_{\text{speedup}} = \frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^M Z_i = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\dot{Z}_i}{Z_i} \right) R_i \quad (13)$$

通常来说, 比值 $R_i \gg 1$, 因此整体上 QMM 算法能为电容提取带来几倍的加速。为了说明这点, 表 1 给出了一个实际版图寄生电容器中一层介质边界元分布的数据, 以及利用公式(12)得出的 QMM 算法的期望加速比。采用和介质侧面边界一样的划分密度, 可以估计出新增虚拟介质交界面上边界元的总数 c 。例如, $3 \times 3 \times 1$ 切割时 ($Q = 9$), 虚拟交界面总面积等于侧面总面积, 就假设 c 等于侧面上边界元数目; 而在 $5 \times 5 \times 1$ 切割时 ($Q = 25$), 虚拟交界面总面积是侧面总面积的两倍, 就假设 c 为侧面上边界元数目的两倍。从表 1 中数据可见, 取适当的 Q 值, 可以期望 QMM 算法对电容提取带来几倍的加速效果。

表 1 一实际电容器中一个介质层的数据说明 QMM 算法的加速作用

侧面与 导体面	介质层 交界面	非 QMM 算法 Z_i	QMM 算法 ($Q = 9$)		QMM 算法 ($Q = 25$)	
			虚拟面 $c = 125$	加速比 $R_i = 4.03$	虚拟面 $c = 250$	加速比 $R_i = 6.33$
$a = 313$	$b = 281$	519750				

4.2 虚拟多介质方法的实际应用

从上述理论分析, 可得出用 QMM 方法计算实际多介质三维互连电容的几个特点:

(1) QMM 方法首先要将每层介质进行区域切割, 然后再

划分边界元进行后续的计算。因此应该采用相对简单的切割策略, 否则将导致切割操作的时间过长, 影响整体的计算性能。

(2) 当虚拟介质数目 Q 太大时, 虚拟介质块很多。这不但新增很多虚拟介质交界面, 增加变量数目, 而且使原有的边界表面变得“支离破碎”。这样得到的边界元总数将大大超过公式(10)的假设。因此无限制的增加 Q , 不会使计算效率得到提高。

(3) 从公式(12)和(13)可看出, 如果模拟的寄生电容器含有大量导体, 也就是原有的 Z 很大, 则 QMM 方法的期望加速比将接近极限值 Q 。

(4) 虚拟介质交界面上边界元的划分不但影响计算结果的准确性, 而且影响公式(13)中的参数 c 。因此, 在保证精度的前提下, 尽量减少虚拟介质交界面上边界元的数目将使 QMM 算法有很高的计算效率。

根据前面的分析及实际版图结构特点, 本文采用简单的切割方法。由于每层介质都是长方体, 且每个面平行于三维直角坐标系的三个坐标平面, 可取切割平面为平行于 YOZ 和 ZOX 的两组相互垂直的平面。这样, 在 XOY 平面的投影上, 原来的寄生电容器被分解为 $m \times n$ 的虚拟介质阵列。

实际的互连电容器中导体分布千差万别, 对应于公式(11)的最优切割位置很难得到。因此, 采用等分切割的策略, 即将介质层沿 X 轴等分为 m 份、沿 Y 轴等分为 n 份。对不同的例子, 通过适当地选取 m 和 n 值, QMM 算法得到了很好的计算效果。

5 数值结果与讨论

为了说明虚拟多介质方法计算三维互连电容的有效性, 本节给出一些数值结果。所用机器是 Sun Ultra Enterprise 450, 时间单位是秒, 电容单位是 10^{-18} 法, 内存单位是兆字节, 长度单位为微米。

5.1 $k \times k$ 交叉导体

首先通过计算一个含 $k \times k$ ($k = 2, 4, 6$) 交叉总线的寄生电容器, 表明 QMM 的加速性能。图 3 显示了含 6×6 交叉总线的寄生电容器, 它包含三层介质, 底部有一衬底平面。每层介质的高度为 5, 每块金属导体的大小为 $3 \times 3 \times 28$ 。同层中两个相邻导体的间隔为 2, 最靠外的金属导体与介质边界的间隔为 1, 每块导体贴在所处的介质下底面, 介质的相对介电系数是 1.0。 4×4 交叉总线的结构由图 3 移去导体 1、6、7 和 12 得到, 再移走导体 2、5、8 和 11 得到 2×2 交叉总线的结构。需要计算主导体 3 与其它导体的耦合电容。

表 2 列出了采用非 QMM 算法与 QMM 算法得到的实验数据, 其中 QMM 算法中的切割数分别为 6×6 、 6×6 和 4×4 。从系数矩阵 A 的非零元数目看, QMM 算法比非 QMM 算法少得多, 比率最大的为 12。而使用相同的 GMRES 求解器, QMM 算法的迭代次数比非 QMM 算法会有所增加。从计算时间和内存空间来看, 当电容值差别小于 3% 时, QMM 算法的计算速度大约是非 QMM 算法的 4~10 倍, 而使用的内存量仅为后者的 1/4 到 1/2 左右。实际的计算加速比与非零元数之比的差别与 QMM 计算中迭代次数的增加有关。

表 2 QMM 与非 QMM 算法对 $k \times k$ 交叉导体计算的结果

	非 QMM 算法						QMM 算法						非零元数之比	加速比
	边界元	非零元数	迭代数	内存	电容	时间	边界元	非零元数	迭代数	内存	电容	时间		
6×6	5547	14559975	21	62	1699	161.4	6822	1191738	27	17	1738	16.6	12.2	9.7
4×4	4475	9529903	20	42	1636	104.2	5630	993038	30	15	1673	14.6	9.6	7.1
2×2	3238	5237647	21	25	1157	56.1	3644	964454	34	11	1180	13.4	5.4	4.2

5.2 实际的三维结构

以下对三个实际工业例子进行了 QMM 算法与非 QMM 算法、及商业软件 Raphael 的比较,结果列于表 3 中. Raphael 是 TMA 公司开发的基于有限差分方法的著名三维电容提取器,其高密度网格下的计算结果往往被业界作为评价电容计算的

标准.这三个算例都采用五层布线技术,金属导体分布在第三、四层,分别有 34、53 和 142 块导体,其中包含很多交叉线结构(图 4 为算例 1).在 QMM 算法中对它们的切割数分别为 3×7 、 3×5 和 6×3 .

表 3 三种算法对三个实际例子计算的结果

算例	Raphael		非 QMM 算法				QMM 算法				对 Raphael 误差 (%)	加速比	
	电容	时间	边界元数	内存	电容	时间	边界元数	内存	电容	时间		对非 QMM	对 Raphael
1	20188	560	5451	58	19603	172.0	6318	17	19681	23.0	-2.5	7.5	24.3
2	31379	828	7282	81	31008	238.6	8206	23	31320	46.6	-0.2	5.1	17.8
3	27090	1603	8613	109	26587	346.7	9385	24	27240	45.9	0.6	7.6	34.9

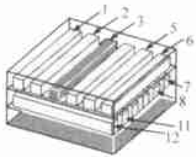


图 3 含 6×6 交叉导体的寄生电容器



图 4 一个来自实际版图的互连寄生电容器(算例 1)

从表 3 可以看出, QMM 计算在保持很好精度的同时,相对于非 QMM 的加速比大约为 7,而相对于 Raphael 的缺省网格计算则达到一个数量级以上.另外, QMM 计算的内存使用量只有非 QMM 算法的 1/5 到 1/3.

6 结论

本文介绍并扩展了一种快速而精确的三维互连电容提取方法,虚拟多介质方法.它利用直接边界元方法的局部化特性,将分层多介质切割为多个虚拟介质块处理,从而大大减少了方程系数矩阵中的非零元数目.又使用稀疏矩阵存储技术和 GMRES 迭代解法,从而显著加速三维多介质互连电容的提取.通过对 $k \times k$ 交叉导体结构和三个实际版图例子的计算结果比较,并用 Raphael 的结果作为准确值,可以看出虚拟多介质方法在保持很好计算精度的同时,对计算速度和内存使用量都有几倍的改善.

此外,如何找到一个更有效的切割方法是虚拟多介质方法的下一步研究课题.

参考文献:

- [1] K K Mei, R Pous, Z Q Chen, Y W Liu, M Prouty. Measured equation of invariance: A new concept in field computation [J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., Mar. 1994, 42(3): 320-328.
- [2] T Chou, Z J Cendes. Capacitance calculation of IC packages using the finite element method and planes of symmetry [J]. IEEE Trans. CAD, Sep. 1994, 13(9): 1159-1166.
- [3] K Nabors, J White. Multipole accelerated capacitance extraction algo-

ritms for 3-D structures with multiple dielectrics [J]. IEEE Trans. Circuits Syst., Nov. 1992, 39(11): 946-954.

- [4] Zeyi Wang, Yanhong Yuan, Qiming Wu. A parallel multipole accelerated 3-D capacitance simulator based on an improved model [J]. IEEE Trans. on CAD, Dec. 1996, 15(12): 1441-1450.
- [5] 古江春. 三维寄生电容快速直接边界元提取算法研究 [D]. 博士学位论文. 北京: 清华大学计算机系, 1999.
- [6] J H Kane. Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics [M]. Prentice Hall, 1994.
- [7] C A Brebbia. The Boundary Element Method for Engineers [M]. London: Pentech Press, 1978.
- [8] 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析 [M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [9] 古江春, 王泽毅, 洪先龙. 三维寄生电容边界元计算的半解析积分方法 [J]. 电子学报, 2000, 28(5): 127-129.
- [10] 李毅, 侯劲松, 王泽毅. 多介质嵌套电容的边界元计算及用于加速单介质计算 [A]. 第 10 届全国 CAD&CG 会议论文集 [C], 1998: (A-71)-(A-77).
- [11] Zeyi Wang, Wenjian Yu. A fast quasi-multiple medium algorithm for 3-D interconnect capacitance calculation [A]. Proc. IFIP 16th World Computer Congress 2000 [C], Beijing, China, 2000: 223-230.
- [12] Y Saad, M H Schultz. GMRES: a generalized minimal RESidual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM J. Numer. Anal., 1986, 5: 203-228.

作者简介:

喻文健 男. 1977 年 1 月生于江西南昌. 博士研究生, 现从事 VLSI 3-D 互连寄生参数提取算法的研究.

