

# 混合色噪声背景下谐波恢复： 一种可消除谱估计伪峰的互谱 SVD-LS 方法

马 彦,石要武,康小涛

(吉林大学南岭校区信息科学与工程学院,吉林长春 130025)

**摘 要:** 扩阶特征方程方法由于可以有效地提高谐波恢复的谱分辨率及噪声抑制能力,因而被大多数谐波恢复方法所普遍采用.但由此而产生的谱估计伪峰却严重干扰着谐波谱峰的判别.本文依据对正弦谐波信号的扩阶互相关函数矩阵的特征分析,提出消除这种谱估计伪峰的理论及方法.仿真结果表明本文所提出的互谱 SVD-LS 方法可完全消除谱估计伪峰,从而大大地提高了谱分辨率及噪声抑制能力.

**关键词:** 伪峰;扩阶特征方程;谐波恢复

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0014-04

## Harmonic Retrieval in Colored noises :Cross-Spectral SVD-LS Approach with Cleared False Peaks of Spectral Estimation

MA Yan ,SHI Yao-wu ,KANG Xiao-tao

( Information Science and Engineering Institute , Jilin University , Changchun , Jilin 130025 , China)

**Abstract:** The extended characteristic equation methods are widely used by most harmonic retrieval approaches. While the false peaks caused by these methods disturb seriously to distinguish the false peaks from the harmonic signal peaks. This paper has successfully solved the problem by studying the singular value decomposition (SVD) natures of the cross-correlation matrix. Simulation results show that this new cross-spectral SVD-LS approach can clear spectral false peaks.

**Key words:** harmonic retrieval ;false peaks ;extended equation

### 1 引言

色噪声背景下的谐波恢复是谱估计领域的核心问题之一.它在雷达、声纳、地震、故障诊断等许多领域中都有着广泛的应用,因而近几年来得到了迅速发展.针对高斯色噪声情况,目前性能较为优良的主要有 MUSIC<sup>[1]</sup>, ESPRIT<sup>[2,3]</sup>, 高阶累积量<sup>[15,16]</sup>等方法,其信噪比下限已经达到 -10dB 的水平,并具有相当高的谱分辨率.而现代互谱估计方法,如互谱矩和 SVD 方法<sup>[7]</sup>、互谱 MUSIC<sup>[10]</sup>方法、互谱 Levinson<sup>[8]</sup>方法等则对各信道间相互独立的任何噪声有更强的抑制能力,其信噪比下限甚至达到了 -30dB 的水平,并且已实际应用入微弱正弦信号(1nV)测量<sup>[11]</sup>.

在上述这些性能优良的谱估计方法中,一个共同的特点是它们毫无例外地均采用了扩阶特征方程<sup>[4,5]</sup>方法.实践证明,采用扩阶特征方程方法对于提高谱分辨率及噪声抑制能力是极其有效的,因此被大多数谐波恢复方法所普遍采用<sup>[6~10]</sup>.但同时却因此而产生了谱估计的伪峰,干扰着对谐波谱峰的判别,严重时,甚至根本无法区分哪一个才是真正的

信号谱峰.这一矛盾是制约谐波恢复能力进一步提高的关键问题.长期以来,人们为更有效地抑制这些伪峰进行了不懈的努力,提出了多种行之有效的解决方法,如特征矢量加权组合法<sup>[13]</sup>、特征矢量旋转变换法<sup>[2]</sup>、整体最小二乘法<sup>[14]</sup>等.但这些方法并不能从根本上完全消除伪峰,因而当信噪比降得很低时,这些方法,往往会因为无法区分谐波谱峰和伪峰而失效.

不难证明,伪峰完全是由于对特征方程扩阶后产生的增根所造成的.因此,只要从扩阶特征方程中剔除这些增根,就可以从根本上清除这些伪峰,从而大大提高了谱分辨率及抑制噪声能力,这就是本文工作的出发点.

### 2 可消除谱估计伪峰的互谱 SVD-LS 方法

为了说明谱估计伪峰产生的原因及消除方法,不失一般性,考虑下列带有附加色噪声的零均值复正弦随机过程<sup>[6]</sup>,即

$$x(n) = \sum_{i=1}^q \exp[j(\omega_i n + \phi_i)] + w_x(n) \quad (1)$$

$$y(n) = \sum_{i=1}^q \exp[j(\omega_i n + \phi_i + \theta_i)] + w_y(n) \quad (2)$$

收稿日期:2000-03-13;修回日期:2001-05-11

基金项目:国家自然科学基金(No. F010202-69872012)

式中,  $i_i$  为复数谐波信号幅值(均为实数);  $w_i$  为谐波信号频率;  $\theta_i$  为谐波信号的初始相位,在  $[0, 2\pi]$  之间均匀分布;  $\phi_i$  为各谐波信号之间的相位差;  $q$  为正弦谐波分量数目(假设已知);  $w_x(n), w_y(n)$  为谱密度未知、相互独立的零均值平稳复高斯有色噪声.

式(1)和(2)所定义的互相关函数为:

$$r_{xy} = E[x(n)y(n+m)] = \sum_{i=1}^q i_i e^{j\theta_i} e^{j\omega_i m} \quad (3)$$

为了提高谱估计的分辨率及噪声抑制能力,目前各种谐波恢复的谱估计方法基本上都采用扩阶方法,即构造  $p$  阶( $p \gg q$ )互相关函数矩阵

$$R_{xy} = \begin{bmatrix} r_{xy}(0) & r_{xy}(-1) & \dots & r_{xy}(-p+1) \\ r_{xy}(1) & r_{xy}(0) & \dots & r_{xy}(-p+2) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ r_{xy}(p-1) & r_{xy}(p-2) & \dots & r_{xy}(0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

可以证明<sup>[7]</sup>,  $R_{xy}$  的秩为  $q$ , 且为非共轭对称矩阵. 因此,  $R_{xy}$  的奇异值分式为:

$$R_{xy} = U \begin{bmatrix} \sigma & & & \\ & 0 & & \\ & & \theta & \\ & & & 0 \end{bmatrix} V^* \quad (5)$$

式中, 矩阵  $U, V$  的列向量分别为矩阵  $R_{xy}$  的左右奇异矢量, 为:

$$= \text{diag}[ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q ]$$

其中  $\sigma_i (i=1, \dots, q)$  为  $R_{xy}$  的非零奇异值, 并且  $\sigma_i > \sigma_{i+1} (i=1, \dots, q-1)$ .

定理 1<sup>[7]</sup>: 设  $R_{xy}$  及其奇异值分解为分别由式(4)、(5)所定义,  $V_2$  由  $V$  中后  $(p-q)$  个与零奇异值所对应的奇异矢量构成, 则  $R_{xy}$  矩阵中  $q$  个正弦谐波分量  $e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_q}$  均是在  $V_2$  空间中任一噪声奇异矢量中元素构成的特征方程

$$V_i(0) + V_i(1)z^{-1} + \dots + V_i(p-1)z^{-(p-1)} = 0 \quad (6)$$

$(i = q+1, \dots, p; z = e^{j\omega})$

的根.

现有的各种谱估计奇异值分解方法就是依据这一定理来估计正弦信号谐波频率的. 由式(6)可见, 当采用  $p \gg q$  的扩阶方程时, 虽然大大提高了谐波频率估计的精度及分辨率, 但同时却因此产生了  $(p-q)$  个增根. 由于式(6)的根是与谱峰相对应的. 因此这些增根就不可避免的会产生伪峰, 这就是伪峰产生的原因. 现有的各种现代谱估计算法, 尽管采用了许多行之有效的伪峰抑制技术, 但由于它们并不能剔除这些增根, 所以均不同程度的存在着伪峰现象, 这极大地限制了这些算法的谱估计的精度及分辨率. 定理 2 可以为我们从特征方程中完全剔除这些增根提供可靠的理论依据.

定理 2: 在定理 1 中, 能同时满足式(6)所示的  $(p-q)$  个特征方程的根有且仅有  $q$  个. 它们就是  $e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_q}$ .

证明: 式(6)可以写成

$$\sum_{i=0}^{p-1} V_j(i) z^{-i} = 0 \quad (j = q+1, \dots, p) \quad (7)$$

由定理 1 知  $e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_q}$  是式(7)的  $(p-q)$  个特征方程的共同根, 令

$$z = \sum_{i=1}^q (1 - e^{j\omega_i} z^{-1}) \quad (8)$$

式(7)可以写成

$$\sum_{i=0}^{p-q-1} b_j(i) z^{-i} = 0 \quad (j = q+1, \dots, p) \quad (9)$$

因此, 定理 2 中问题等价于证明方程组

$$\begin{bmatrix} b_{q+1}(0) & b_{q+1}(1) & \dots & b_{q+1}(p-q-1) \\ b_{q+2}(0) & b_{q+2}(1) & \dots & b_{q+2}(p-q-1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_p(0) & b_p(1) & \dots & b_p(p-q-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \dots \\ z^{-(p-q-1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

无解的问题.

令  $B_j = [ b_{q+j}(0) \quad b_{q+j}(1) \quad \dots \quad b_{q+j}(p-q-1) ]$   
 $(j = 1, \dots, p-q)$

$$Z = [ 1 \quad z^{-1} \quad z^{-2} \quad \dots \quad z^{-(p-q-1)} ]^T$$

则式(10)可简写为:

$$[ B_1^T \quad B_2^T \quad \dots \quad B_{p-q}^T ]^T Z = 0 \quad (11)$$

下面用反证法证明  $B_1, B_2, \dots, B_{p-q}$  线性无关.

假设  $B_1, B_2, \dots, B_{p-q}$  线性相关, 不妨设  $B_{p-q}$  写成其余向量的线性组合, 即

$$B_{p-q} = k_1 B_1 + k_2 B_2 + \dots + k_{p-q-1} B_{p-q-1}$$

则有

$$(z) B_{p-q} Z = k_1 (z) B_1 Z + k_2 (z) B_2 Z + \dots + k_{p-q-1} (z) B_{p-q-1} Z \quad (12)$$

式(12)实际上就是:

$$\sum_{i=0}^{p-1} V_p(i) z^{-i} = k_1 \sum_{i=0}^{p-1} V_{q+1}(i) z^{-i} + \dots + k_{p-q-1} \sum_{i=0}^{p-1} V_{p-1}(i) z^{-i} \quad (13)$$

即  $V_p = k_1 V_{q+1} + k_2 V_{q+2} + \dots + k_{p-q-1} V_{p-1}$  (14)

这说明噪声奇异矢量  $V_p$  可以写成其余噪声奇异矢量的线性组合, 这与噪声奇异矢量的定义相矛盾, 因而  $B_1, B_2, \dots, B_{p-q}$  线性无关.

由于  $B_1, B_2, \dots, B_{p-q}$  线性无关, 所以式(10)是一个矛盾方程组, 它是无解的.

根据定理 2, 只需将式(6)中  $(p-q)$  个特征方程联立求解, 就可以完全剔除增根, 从而从根本上消除了谐波恢复时由于采用扩阶技术而导致的伪峰. 注意到式(6)中的特征方程具有一般性, 因此定理 2 对于自相关方法, 互相关方法和高阶累积量方法同样适用.

按定理 2 直接求解式(7), 需解一个高阶代数方程组, 计算量很大. 下面的方法可大大减少其计算量.

将式(6)两端同乘以  $z^{p-1}$ , 并写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} V_{q+1}(0) & V_{q+1}(1) & \dots & V_{q+1}(p-1) \\ V_{q+2}(0) & V_{q+2}(1) & \dots & V_{q+2}(p-1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ V_p(0) & V_p(1) & \dots & V_p(p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{p-1} \\ z^{p-2} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{或} \quad V_2^H Z = 0 \quad (15)$$

将上式中的矩阵分块相乘,

$$V_2^{(1)} Z_1 + V_2^{(2)} Z_2 = 0 \quad (16)$$

$$\text{式中: } V_2^{(1)} = [V_{q+1}^{(1)}, V_{q+2}^{(1)} \dots V_p^{(1)}]^T, \\ V_2^{(2)} = [V_{q+1}^{(2)}, V_{q+2}^{(2)} \dots V_p^{(2)}]^T$$

$$\text{其中 } V_{q+i}^{(1)} = [V_{q+i}(0), V_{q+i}(1), \dots, V_{q+i}(p-q-2)], \\ V_{q+i}^{(2)} = [V_{q+i}(p-q-1), V_{q+i}(p-q), \dots, V_{q+i}(p-1)], \\ (i = 1, \dots, p-q).$$

$$\text{令 } Z = [Z_1, Z_2]^T.$$

$$\text{其中: } Z_1 = [z^{p-1}, z^{p-2}, \dots, z^{q+1}]^T, \\ Z_2 = [z^q, z^{q-1}, \dots, 1]^T.$$

由于  $V_{q+i}^{(1)} (i = 1, \dots, p-q)$  均为有  $(p-q-1)$  个元素的列向量. 假设前  $(p-q-1)$  个列向量线性无关, 则这  $(p-q-1)$  个列向量构成  $(p-q-1)$  维空间的基向量, 第  $(p-q)$  个列向量必然可以由前  $(p-q-1)$  个向量线性表示. 如果前  $(p-q-1)$  个列向量线性相关, 第  $(p-q)$  个列向量也可由前  $(p-q-1)$  个向量线性表示. 因此,  $V_2^{(1)}$  中各向量线性相关. 则必有一非零向量

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_{p-q}] \quad (17)$$

使得  $kV_2^{(1)} = 0$ .

$$\text{从而有: } kV_2^{(2)} Z_2 = 0 \quad (18)$$

式(18)为一  $q$  阶方程, 其  $q$  个根, 即为式(15)所表示的方程组的共同解.

由式(17)可以求得  $k$ , 若  $(V_{q+1}^{(1)})^T, (V_{q+2}^{(1)})^T, \dots, (V_p^{(1)})^T$  均为真值, 则向量  $k$  可精确求解. 但由于在有限数据长度下, 存在互相关函数估计误差, 所以  $(V_{q+1}^{(1)})^T, (V_{q+2}^{(1)})^T, \dots, (V_p^{(1)})^T$  均为估计值.

考虑到这种估计误差的影响, 式(17)应为

$$\tilde{V}k = e \quad (19)$$

其中,  $\tilde{V} = (V_2^{(1)})^T = [\tilde{V}_1 \quad \tilde{V}_2 \quad \dots \quad \tilde{V}_{p-q}]_{(p-q) \times (p-q)}$  参数矩阵,  $\tilde{k} = k^T$   $_{(p-q) \times 1}$  参数向量.  $e$  为参数估计误差向量. 显然, 这一问题采用最小二乘法求解是最适宜的.

定义: 形式如式(19)的参数矩阵的最小二乘估值定义为

$$E = \arg \min \|\tilde{V}\tilde{k} - e\|_2 \quad (20)$$

这是一个无约束最小二乘问题, 为提高计算效率, 本文采用 Housholder 变换方法<sup>[12]</sup>求解, 具体求解方法可参见文献[12].

### 3 仿真

下面通过计算机仿真实验来比较采用扩阶模型的互谱 SVD-LS 方法, 互谱 Levinson 估计方法及互谱 MUSIC 方法的谐波恢复性能. 我们采用文献[7]所使用的仿真模型:

$$x(n) = \cos(2\pi f_1 n) + \cos(2\pi f_2 n) + w_x(n)$$

$$y(n) = \cos(2\pi f_1 n + \frac{\pi}{4}) + \cos(2\pi f_2 n + \frac{\pi}{4}) + w_y(n)$$

式中,  $f_1 = 0.17\text{Hz}, f_2 = 0.19\text{Hz}, w_x(n), w_y(n)$  为谱密度未知的互相独立的零均值平稳色噪声, 该噪声是由方差均为 1 的相互独立的白噪声分别通过同一形式的带通滤波器产生. 该滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{k(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}}$$

该滤波器的归一化功率谱密度曲线如图 1 所示.

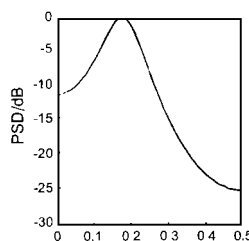


图 1 归一化功率谱密度曲线

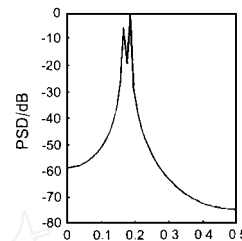


图 2 本文的互谱 SVD-LS 方法

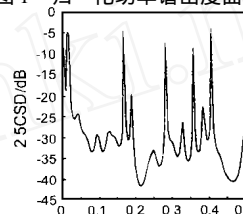


图 3 互谱 Levinson 估计方法

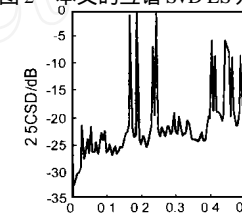


图 4 互谱 MUSIC 方法

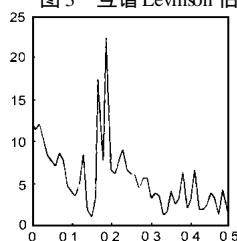


图 5 互谱 ESPRIT 方法  
(SNR = -20dB)

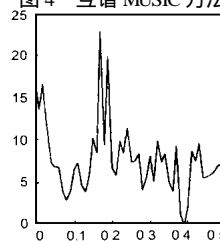


图 6 互谱 ESPRIT 方法 (p=80)

取  $x(n), y(n)$  的数据长度为 1024,  $x(n), y(n)$  中两个正弦谐波分量的信噪比均为 -10dB, 分别采用本文提出的互谱 SVD-LS 方法、互谱 Levinson<sup>[8]</sup>估计方法和互谱 MUSIC<sup>[10]</sup>方法, 扩阶函数矩阵的阶数为  $p = 50$ , 分别作 20 次独立仿真实验, 其典型的谱估计曲线如图 2、3、4 所示, 所得到的正弦频率  $f_1, f_2$  的统计结果如表 1 所示.

表 1 正弦频率估计的统计结果 (SNR = -10dB)

估计值/真实值	本文方法	互谱 Levinson 方法	互谱 music 方法
$f_1 = 0.17$	0.1679 ±0.0031	0.1627 ±0.0037	0.1633 ±0.0046
$f_2 = 0.19$	0.1911 ±0.0079	0.1825 ±0.0051	0.1941 ±0.0039

注: 本文提出的互谱 SVD-LS 法采用计算值, 互谱 Levinson 方法和互谱 MUSIC 方法采用相对最大谱峰对应频率.

条件不变, 降低信噪比 (SNR = -20dB) 和扩阶函数矩阵的阶数 ( $p = 80$ ), 互谱 ESPRIT 方法实验结果如图 5、6 所示.

比较上述实验结果可以看出, 在信噪比均为 -10dB 时, 图 3、4 所示的互谱 Levinson 方法和互谱 MUSIC 算法虽然明显的分辨出了两个正弦分量频率, 但是谱密度曲线出现了许多伪峰, 当信噪比降低时, 已分辨不出哪一个是信号谱峰了. 而本文所采用的互谱 SVD-LS 方法已经基本消除了色噪声所造成的影响, 谱密度曲线非常光滑, 最突出的特点是没有伪峰出现. 通过对统计结果的分析也可以看出, 在有色噪声背景下, 互谱 SVD-LS 方法表现出了优良的谱估计性能和谱估计的分辨率. 因此本文提出的方法优于互谱 Levinson 方法和互谱

MUSIC 算法.

#### 4 结束语

目前,在谐波恢复的各种谱估计方法中,几乎都采用扩阶矩阵的方法.实践证明,采用扩阶矩阵方法对于提高谱分辨率和噪声抑制能力是极其有效的,但同时却在谱估计时产生了伪峰,造成谱估计的稳定性下降.这一问题制约谐波恢复性能提高的关键.另一方面,由于伪峰问题是谱估计领域里普遍存在的问题,解决它具有很重要的意义.

本文所提出的互谱 SVD-LS 方法可完全消除这种谱估计伪峰,仿真结果表明,其在色噪声背景下的谐波恢复性能明显优于互谱 Levinson 和互谱 MUSIC 方法.本文所提出的伪峰消除理论和方法同样适用于现代自谱和高阶谱估计情况.

#### 参考文献:

- [ 1 ] Rao B D, Hari K V S. Performance analysis of root-MUSIC [J]. IEEE Trans. Acoustics Speech, Signal Processing, 1989, 37: 1789 - 1794.
- [ 2 ] Roy R, A Parthraj, T Kailath. ESPRIT-a subspace rotation approach to estimation of parameters of sinusoid in noises [J]. IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, 1986, ASSP-34: 1340 - 1342.
- [ 3 ] Zhang X-D, Y-C Liang. Prefilter-based Esprit for estimating parameters of sinusoids in non Gaussian Noise [J]. IEEE Trans. Signal Processing, SP-43: 349 - 353.
- [ 4 ] Cadzow J A. Spectral estimation: An overdetermined rational model equation approach [J]. Proc. IEEE, 1982, 70: 907 - 938.
- [ 5 ] Roy R, T Kailath. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, 1989, ASSP-37: 984 - 995.
- [ 6 ] Roy R, A Paulraj, T Kailath. Total least square ESPRIT [C], in Proc. 21<sup>st</sup> Asiomar Conf. Signals, Syst., Coput., 1987: 297 - 301.
- [ 7 ] 石要武, 等. 色噪声背景下正弦参量估计的互谱矩和 SVD 方法 [J]. 电子科学学刊, 1995, 1: 11 - 19.
- [ 8 ] 石要武, 等. 有色噪声背景下正弦信号参量估计的互谱 Levinson 方法 [J]. 计量学报, 1995, 7: 169 - 175.
- [ 9 ] 石要武, 戴逸松. 测量噪声背景下微弱正弦信号参数估计的互功率谱估计方法 [J]. 电子学报, 1994, 22(1): 1 - 8.
- [ 10 ] 石要武, 等. 有色噪声背景下正弦信号频率估计的互谱 Pisarenko 和 Music 方法 [J]. 电子学报, 1996, 10: 46 - 50.
- [ 11 ] 戴逸松, 石要武. 测量 nV 正弦电压的互功率谱方法 [J]. 电工技术学报, 1993, 2: 82 - 84.
- [ 12 ] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数 [J]. 科学出版社, 1984: 520 - 530.
- [ 13 ] G S Xu, Y H Pao. Single vector approach to eigenstructure analysis for harmonic retrieval [C]. Proc. ICASSP. 1986: 5.2.1 - 5.2.4.
- [ 14 ] B Roorda, C Hejji. Global total least squares modeling of multivariable time series [J]. IEEE Trans. Automatic control, 1995, 40: 50 - 63.

#### 作者简介:



马彦女, 1970 年出生, 1992 年毕业于哈尔滨船舶工程学院自动控制系, 获学士学位. 1995 年毕业于吉林工业大学信息科学与工程学院, 控制科学与工程系, 并获硕士学位. 同年留校任教. 现为吉林大学通讯电子专业博士研究生. 目前主要从事数字信号处理, 弱信号检测领域研究. e-mail: may@jlu.edu.cn.



石要武男, 1954 年出生, 1985 年于吉林工业大学信息科学与工程学院并获硕士学位. 1994 年于吉林工业大学信息科学与工程学院获博士学位. 现任吉林大学控制科学与工程系教授, 博士生导师. 目前主要从事弱信号检测, 谱分析, 模式识别, 系统辨识与系统仿真等领域的研究.

康小涛 1956 年出生, 现任吉林大学应用电子专业副教授. 目前主要从事信号处理, 通讯等领域的研究.