

Logistic 混沌序列叠加过程分解模型 与弱信号高精度复原

金友渔

(中国地质大学数学地质遥感地质研究所,湖北武汉 430074)

摘要: 本文研究对由若干个 Logistic 混沌或非混沌序列叠加过程形成的有成因联系的多变量时间序列的弱信号进行高精度复原的分解模型和算法,通过数字仿真分析表明该分解模型和算法对 Logistic 混沌或非混沌序列弱信号具有高精度地复原的性能。

关键词: Logistic 混沌序列; 叠加过程; 多变量时间序列; 弱信号; 数字仿真分析

中图分类号: TN391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0079-04

The Decomposition Model of Superposition Process on Logistic Chaotic Series and High-Accuracy Recovery for Weak Signals

JIN You-yu

(Institute of Mathematic Geology and Remote Sensing Geology, China University of Geosciences, Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract: The decomposition model and algorithm of high-accuracy recovery for weak signals are researched in this paper. The weak signals are contained in multivariable time series. Superposition of Logistic chaotic or non-chaotic series forms multivariable time series having cause of formation correlation. The numeral simulation analysis indicated this decomposition model and algorithm having capability of high-accuracy recovery for weak signals of Logistic chaotic or non-chaotic series.

Key words: logistic chaotic series; superposition process; multivariable time series; weak signals; numeral simulation analysis

1 引言

自然界中的各种过程都不是孤立的,研究有成因联系的多变量系统更能反映过程特性,目前文献中关于含噪声的混沌序列的信号复原及参数估计都是针对单变量时间序列进行的^[1-5],而且缺乏对混沌序列的弱信号进行高精度复原方面的研究.本文研究由若干个 Logistic 混沌或非混沌序列叠加过程形成的有成因联系的多变量时间序列的弱信号高精度复原的分解模型和算法,并通过数字仿真分析研究其信号复原及参数估计的精度.多变量观测时间序列既是由若干个 Logistic 混沌或非混沌序列线性叠加过程形成的,则可以证明:各 Logistic 混沌或非混沌序列信号可以由多变量观测时间序列经过某个唯一的逆线性叠加过程精确地复原,且与信噪比大小无关.因而可对弱信号进行高精度复原.关键在于寻求逆线性叠加过程的线性叠加系数矩阵.显然,Logistic 混沌或非混沌序列信号可由多变量观测时间序列的某种线性组合来表达,可见这种线性组合可以由 Logistic 混沌或非混沌序列模型来拟合.本文将证明逆线性叠加过程的线性叠加系数矩阵可以仅由多变量观测时间序列构造的某种矩阵的特征值对应的特征向量来获得.本文就是在这一新的思路下建立了 Logistic 混

沌序列叠加过程分解的数学模型和弱信号高精度复原的方法.

2 线性叠加过程的分解

设线性叠加过程为:

$$XC = Y \quad (1)$$

X 为 p 个相互独立的时间序列的矩阵,每列为一个时间序列的 n 个样本,每一行为 p 个时间序列的时刻 t 的 1 个样本, C 为线性叠加系数矩阵,每一列为一个线性叠加系数向量, Y 为由 p 个相互独立的时间序列 X 按阵 C 中不同列所表示的线性叠加系数向量线性叠加而成的 p 个时间序列矩阵,每一列为一个线性叠加过程的时间序列的 n 个样本,每一行为 p 个线性叠加过程的 p 个时间序列的时刻 t 的 1 个样本.

对于任一线性叠加过程 $y_j(t)$ 可表为:

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^p c_{ij}x_i(t) \quad (2)$$

若 X 阵表示的是 p 个相互独立的信号序列,则 Y 阵为由 p 个信号依 C 阵不同的 p 个线性叠加系数向量线性叠加而成的 p 个观测时间序列.

收稿日期:2000-06-26;修回日期:2001-08-06

基金项目:国家自然科学基金(No. 49972092)

观测时间序列阵 Y 既然是由 p 个相互独立的信号序列阵 X 经线性叠加系数阵线性叠加而成, 则 p 个观测时间序列是具有由 p 个因素以不同比例影响控制生成的具有成因联系的相关序列。

由观测时间序列阵 Y 出发, 将线性叠加过程分解从而复原信号序列阵 X 的过程可由下式获得:

$$X = YB \quad (3)$$

对于任一 $x_j(t)$ 可由观测时间序列线性叠加而成, 表达为:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^p b_{ij} y_i(t) \quad (4)$$

可见一定存在一个唯一的线性叠加系数阵 B , 信号序列阵 X 必是观测时间序列阵 Y 经阵 B 线性叠加而成, 且阵 B 即是由信号序列阵 X 经线性叠加系数阵线性叠加而成观测时间序列阵 Y 的线性叠加系数矩阵 C 的逆阵。

当然, 由观测时间序列阵 Y 不能直接得到 B 阵的信息, 求 B 阵的方法必需由对信号类型的认识采取一种最优化准则来获得。本文作者曾研究由若干自回归过程线性叠加而成观测时间序列阵 Y 的分解模型^[6]。下面本文将导出由 Logistic 混沌序列信号经线性叠加系数阵线性叠加而成观测时间序列阵 Y 的分解模型。

3 Logistic 混沌序列叠加过程分解的数学模型

Logistic 随机序列表达为:

$$x_j(t) = ax_j(t-1)(1-x_j(t-1)) + e_j(t) \quad (5)$$

$e_j(t)$ 为高斯白噪声过程。 $a = 1 \sim 4$, 当 $a > 3.65$ 时 Logistic 随机序列表现为 Logistic 混沌随机序列。

假设有 $p-1$ 个信号均为 Logistic 随机序列, 其参数 a 及初值 $x(0)$ 均不相同, 其中至少有一个信号为 Logistic 混沌随机序列, $p-1$ 个 Logistic 随机序列的高斯白噪声过程 $e(t)$ 互相独立, $p-1$ 个 Logistic 随机序列与另一个高斯白噪声过程构成 p 个信号时间序列阵 X , 这 p 个信号时间序列两两间互相独立, 按式(1)线性叠加而成观测时间序列阵 Y 。

在上述对信号类型的假设下, 本文将导出仅通过观测时间序列阵 Y 而求取线性叠加系数阵 B , 从而将观测时间序列阵 Y 进行分解以复原信号时间序列阵 X 的数学模型。令:

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))^T$$

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))^T$$

$$B_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{pj})^T$$

由式(4)和(5)得:

$$B_j^T Y(t) = a_j \cdot [B_j^T Y(t-1)] \{1 - [B_j^T Y(t-1)]\} + e_j(t) \quad (6)$$

在二阶平稳假设下, 将式(6)两边同乘以 $x_j(t) = B_j^T Y(t)$, 并求数学期望, 由假设条件, $e_j(t)$ 为高斯白噪声过程且发生于 $x_j(t-1)$ 之后, 知数学期望 $E[e_j(t) x_j(t-1)] = 0$, $E[e_j(t) (x_j(t-1))^2] = 0$, 从而得:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x_j} &= a_j \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} [B_j^T Y(t)] [B_j^T Y(t-1)] \\ &- a_j \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} [B_j^T Y(t)] [B_j^T Y(t-1)]^2 + \frac{2}{e_j} \quad (7) \end{aligned}$$

其中, $\frac{2}{x_j}$ 为 $x_j(t) = B_j^T Y(t)$ 的方差, $\frac{2}{e_j}$ 为 $e_j(t)$ 的方差。设观测时间序列 $Y(t)$ 的协方差阵和一阶滞后自互协方差阵分别为⁽⁰⁾和⁽¹⁾。经整理, 式(7)变为用 Logistic 混沌随机序列拟合将被复原的第 j 个信号 $x_j(t)$ 的拟合度 Q_j 来表达:

$$Q_j = 1 - \frac{\frac{2}{e_j}}{\frac{2}{x_j}} = a_j \cdot [B_j^T]^{(1)} B_j - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1} [B_j^T Y(t)] [B_j^T Y(t-1)]^2 / [B_j^T]^{(0)} B_j \quad (8)$$

$\frac{2}{e_j} / \frac{2}{x_j}$ 为拟合残差占 $x_j(t)$ 总方差的百分数, 显然, 使 Q_j 达极大是我们所希望的。若 B_j 是符合上述原则下的解, 则 $q_i B_j$ (q_i 为任意非零的常数) 仍是符合上述原则下的解, 不妨设 $B_j^{(0)} B_j = 1$, 因而使 Q_j 达极大的问题化为在 $B_j^{(0)} B_j = 1$ 的条件下的极值问题。令: $\partial f(B_j) / \partial B_j = 0$, 其中:

$$f(B_j) = B_j^T [B_j^T]^{(1)} B_j - \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} [B_j^T Y(t-1)]^2 / [B_j^T Y(t)] - [B_j^T]^{(0)} B_j - 1$$

为拉格朗日乘数, 由于 λ 的存在, a_j 被约去。

待定的第 j 个线性组合系数向量即是下列矩阵的第 j 个特征值所对应的特征向量。

$$= ([B_j^T]^{(0)})^{-1} ([B_j^T]^{(1)} - \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} Y^T(t-1) Y(t)) \quad (9)$$

(*) 的第 k 行为

$$B_j^T [2 Y(t-1) Y^T(t) y_k(t-1) + Y(t-1) Y^T(t-1) y_k(t)]$$

式(9)仅与观测时间序列 $Y(t)$ 和待定的 B 阵的第 j 列向量有关, 它提供了将观测时间序列阵 $Y(t)$ 进行分解以复原信号时间序列阵 $X(t)$ 的数学模型。由式(9)可知^[7,81], 上列矩阵

的 p 个特征值 λ_j ($j = 1, 2, \dots, p$) 所对应的特征向量就是 p 个待定的系数向量 B_j ($j = 1, 2, \dots, p$), 分别由 p 个特征向量所构造的线性叠加过程 $B_j^T Y(t)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) 是具有不同拟合度的 p 个 Logistic 随机序列 (即被复原的 p 个信号时间序列), 其所对应的特征值越大, 拟合度越高, 最大特征值所对应的特征向量所构造的线性叠加过程 $B_j^T Y(t)$ 是具有最高拟合度的 Logistic 随机序列, 而最小特征值所对应的特征向量所构造的线性叠加过程 $B_j^T Y(t)$ 是具有最低拟合度的 Logistic 随机序列, 由于本文所研究的时间序列为 $p-1$ 个 Logistic 随机序列与另一个高斯白噪声过程构成 p 个信号时间序列, 则具有最低拟合度 (一般都低到不能用 Logistic 随机序列或其它非高斯白噪声的模型来拟合) 的 Logistic 随机序列, 这就对应高斯白噪声过程这个信号时间序列。

4 Logistic 混沌序列叠加过程分解的计算机算法

因为矩阵 (*) 中包含有待定的系数向量 B_j , 因而求矩阵的特征值及其所对应的特征向量必需给定待定的系数向量 B_j 的初值, 进行迭代运算。此外, 迭代过程需要一个优化方向的指标。因为线性叠加过程被假设成由 $p-1$ 个 Logistic 随机序列与另一个高斯白噪声过程的线性叠加, 且 p 个序列两两间互相独立, 所以本文构造下列优化方向的指标 I :

$$I = \left[\prod_{j=1}^{p-1} Q_j \right] / \left[\prod_{i=j+1}^p \prod_{j=1}^{p-1} |a_j| \right] \quad (10)$$

上式分子表示被分解出的 p 个 $B_j^T Y(t)$ 序列按用 Logistic 混沌随机序列拟合的拟合度由大到小排列的前 $p-1$ 个拟合度之和,分母表示被分解出的 p 个 $B_j^T Y(t)$ 序列两两间相关系数 a_j 绝对值之和(此值越小,被分解出的 p 个 $B_j^T Y(t)$ 序列两两间独立性越强),显然,我们希望指标 I 达极大为优化方向。

计算机程序算法及步骤如下:

每次产生 p 个随机数作为一组待定的系数向量的初值 $B_j^{(0)}$ 代入矩阵 (10),从而由观测时间序列阵 $Y(t)$ 可计算得矩阵 I ,求矩阵 I 的特征值及其所对应的特征向量 $B_j^{(1)}$,并构造相应的 p 个 $B_j^T Y(t)$ 序列,按式(10)计算其优化方向的指标 I 。

对大量的随机数组 $B_j^{(0)}$ (比如 1000 组)重复(1)的运算,比较其相应的优化方向的指标 I ,取最大优化方向的指标 I 所对应的 p 个 $B_j^T Y(t)$ 序列为第一次迭代结果 $X^{(1)}(t)$ 。

以 $X^{(1)}(t)$ 代替观测时间序列重复(1),(2)的运算直到第 k 次迭代结果其优化方向的指标 I 稳定不再上升为止,停止迭代,以 $B_j^{(k)}$ 和 $X^{(k)}(t)$ 为下一步计算的中间结果。

由上述的中间结果对前 $p-1$ 个 $B_j^T Y(t)$ 序列用 Logistic 随机序列模型拟合出序列初值(序列在 $t=1$ 时刻的取值)及参数 $a_j, j=1, 2, \dots, p-1$, 和最佳的 $q_j B_j^{(k)}$ 中的非零的常数 q_j 。方法是针对序列初值用大量的随机数(比如 1000 个)和针对序列参数 a_j , 用大量的在 $1 \sim 4$ 区间内取值的随机数(比如

1000 个),针对非零的常数 q_j 用大量非零的随机数(比如 1000 个)重复用 Logistic 随机序列模型拟合,最终获得 $B_j^{(k+1)} = q_j B_j^{(k)}$ 和被复原信号时间序列 $X^{(k+1)}(t) = q_j B_j^{(k)} Y(t), j=1, 2, \dots, p$, 及前 $p-1$ 个 Logistic 随机序列初值及参数 a_j 。

本文作者已编制了 MATLAB⁽⁹⁾ 和 FORTRAN77 计算机程序进行自动分解迭代计算。

5 Logistic 混沌序列叠加过程分解的数字仿真分析

本文旨在应用本文所提出的 Logistic 随机序列叠加过程分解的数字模型高精度地复原多变量弱信号时间序列,所以在进行数字仿真分析时,观测序列的信噪比都小于 -5dB , 仿真例最小信噪比对于 Logistic 混沌随机序列达到 -43dB , 对于 Logistic 非混沌随机序列达到 -83dB 。

应用随机数产生程序生成 4 组 3 变量观测序列如表 1 所示,样本数均为 1000,为了便于对比,各组观测序列均由 1 个相同序列初值及相同参数 a_1 的 Logistic 混沌随机序列和 1 个相同序列初值及相同参数 a_2 的 Logistic 非混沌随机序列两个信号时间序列和 1 个白噪声序列按下列相同的线性叠加系数矩阵 C 线性叠加而成,但各组白噪声序列方差大小不同,因而各组的观测序列的信噪比相差较大。干扰源是信号中的白噪声,而 Logistic 随机序列中的随机项白噪声是非常小的,所以其方差均设计得大大小于信号中的白噪声的方差。

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

表 1 各组观测时间序列信号及复原信号的构成特征及参数

观测时间序列组别	信号类型	参数				信噪比(dB)	分解出的复原信号类型	参数		迭代次数	复原信号精度	
		a_j	序列初值	随机噪声				a_j	序列初值		相对误差绝对值	
				均值	方差						均值(%)	方差
1	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	0.0	0.01	(-15, -8, -10)	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	6	0.38	0.0007
	Logistic 随机序列	2.0	0.3	0.0	0.01	(-55, -43, -40)	Logistic 随机序列	2.0	0.3		0.01	<0.0001
	白噪声序列			0.0	1.0		白噪声序列					
2	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	0.0	0.01	(-25, -18, -20)	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	8	0.38	0.0007
	Logistic 随机序列	2.0	0.3	0.0	0.01	(-65, -52, -50)	Logistic 随机序列	2.0	0.3		0.01	<0.0001
	白噪声序列			0.0	1.5		白噪声序列					
3	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	0.0	0.01	(-33, -26, -28)	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.2	9	0.45	0.0013
	Logistic 随机序列	2.0	0.3	0.0	0.01	(-73, -60, -58)	Logistic 随机序列	2.0	0.3		0.01	<0.0001
	白噪声序列			0.0	2.0		白噪声序列					
4	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	0.0	0.01	(-44, -36, -38)	Logistic 混沌随机序列	4.0	0.8	9	0.38	0.0007
	Logistic 随机序列	2.0	0.3	0.0	0.01	(-84, -71, -68)	Logistic 随机序列	1.96	0.31		2.04	<0.0001
	白噪声序列			0.0	3.0		白噪声序列					

注:信噪比一栏括号中三个数表示所在行的信号相对于所在观测时间序列组中第一,第二,第三观测序列的信噪比。

因为观测序列由三个信号序列线性叠加而成,所以 Logistic 混沌随机序列在观测序列中的信噪比是由观测序列中 Lo-

Logistic 混沌随机序列部份的方差与 Logistic 非混沌随机序列加白噪声之和部份的方差之比计算而得, 同样地, Logistic 非混沌随机序列在观测序列中的信噪比是由观测序列中 Logistic 非混沌随机序列部份的方差与 Logistic 混沌随机序列加白噪声之和部份的方差之比计算而得. 表 1 中从第一到第四组信噪比一个比一个增大, 各观测序列中的信号都属于弱信号直至超弱信号.

第一观测序列组的三个信号和三个观测序列示于图 1 (仅显示前 1~200 个观测点). 可见 Logistic 混沌及非混沌随机序列信号特征在三个观测序列中均被白噪声信号强烈淹没.

应用本文的分解模型及算法程序对各组观测序列分解复原的信号结果见表 1. 由表 1 可知各组观测序列分解复原的信号相对于原信号的相对误差绝对值均值几乎都在 0.5% 以下 (除第 4 组一个值为 2% 外), 相对误差绝对值方差都在 0.0015 以下, 均属极高精度. 从分解复原的信号 Logistic 序列参数 a_j 及序列初值来讲, 除第 3 第 4 组有小误差外也属极高精度的估计. 4 组仿真例均在 10 次以下达到迭代收敛. 由图 1 中复原的信号与原信号的图形对比也可显示具有极高的分解精度.

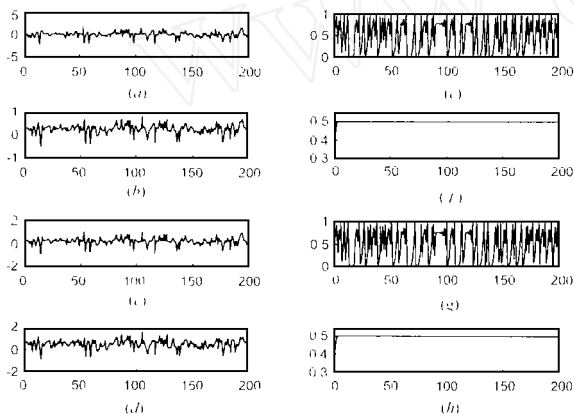


图 1 信号序列, 观测序列及复原的信号序列. (a) 白噪声信号序列; (b) 观测序列 1; (c) 观测序列 2; (d) 观测序列 3; (e) Logistic 混沌随机信号序列; (f) Logistic 非混沌随机信号序列; (g) 复原的 Logistic 混沌信号序列; (h) 复原的 Logistic 非混沌信号序列

各组在计算机程序算法步骤的第三步迭代结束时所得的 $B_j^{(k)}$ 和 $X^{(k)}(t)$ 的中间结果与 Logistic 混沌及非混沌随机序列信号的相关系数就达到 0.98~0.99, 但相对误差绝对值均值和方差达不到高精度. 这是因为式 (8) 是不包含参数 a_j 时的解. 通过第四步最终获得 $B_j^{(k+1)} = q_j B_j^{(k)}$ 和被复原信号时间序列 $X^{(k+1)}(t) = q_j B_j^{(k)} Y(t)$, $j=1, 2, \dots, p$. 及前 $p-1$ 个 Logistic 随机序列初值及参数 a_j 则是找到唯一的逆叠加系数矩阵, 相对误差绝对值均值和方差都达到极小, 实现了信号的高精度复原.

6 结论

本文提出的 Logistic 混沌序列叠加过程分解的数学模型应用于下列条件下的叠加过程分解: 已知 p 个有成因关系

的观测序列由 $p-1$ 个互相独立的 Logistic 随机序列 (可包含 Logistic 混沌随机序列) 和一个独立同分布的高斯白噪声过程的线性叠加而成. 求解的问题是希望复原 $p-1$ 个 Logistic 随机序列信号并估计其参数.

本文提出的 Logistic 混沌序列叠加过程分解的数学模型的特点之一是不必已知各 Logistic 混沌或非混沌序列的参数 a_j 及序列初值, 也不必已知线性叠加系数, 仅以观测序列即可求解.

数字仿真分析表明本文提出的 Logistic 混沌序列叠加过程分解的数学模型的特点之二是在弱信号 (信噪比 - 5 ~ -15dB) 直至超弱信号 (信噪比 - 15 ~ -25dB) 下均可高精度地复原 Logistic 随机序列信号, 并可精确估计其参数 a_j 及序列初值. 具迭代收敛速度快的性能.

本文仅对数字仿真例的效果进行分析, 对于实际问题必须准确确定与 Logistic 混沌序列叠加过程有关的有成因关系的多变量观测序列, 才能获得预期效果.

参考文献:

- [1] Schweizer S M, et al. TLS parameter estimation for filtering chaotic time series. Proc [A]. ICASSP '96 [C], 1996, 3: 1609 - 1612.
- [2] Drake, D. F. Minimum mean square error estimation for a class of chaotic systems. Proc [A]. ICASSP '96 [C], 1996, 5: 2960 - 2963.
- [3] Papadopoulos H C, Womell G W. Maximum likelihood estimation of a class of chaotic signals [J]. IEEE Trans. Information Theory, 1995, 41 (1): 312 - 317.
- [4] Lee C, Williams D B. Generalized iterative methods for enhancing contaminated chaotic signals [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44(6).
- [5] Schreiber T, Kantz H. Noise in chaotic data: Diagnosis and treatment [J]. CHAOS, 1995 (1): 133 - 142.
- [6] Jin Youyu. The ALCAR Model and Decomposition of Overlapping Process. 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON SIGNAL PROCESSING [C]. Publishing House Electronics Industry, Beijing/ IEEE, New York, 1996, 1 of II: 40 - 43.
- [7] 杨位钦, 顾岚. 时间序列分析与动态数据建模 [M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1986, 455 - 461.
- [8] 方保熔. 矩阵论基础 [M]. 南京: 河海大学出版社, 1993: 206 - 220.
- [9] 楼顺天, 李博菡. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——信号处理 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998: 36 - 236.

作者简介:



金友渔 男, 1942 年 1 月生于福建省福州市. 教授, 1965 年北京矿业学院煤田地质专业毕业, 1981 年武汉地质学院北京研究生部数学地质专业毕业, 获硕士学位. 1981 年至今在中国地质大学 (武汉) 从事科研和教学工作. 研究方向为非线性科学与多变量时间序列分析及地质过程模拟. 主持并完成两项国家自然科学基金项目, 出版专著 3 部, 发表论文 40 多篇.