

区域分解时域有限差分方法 (DD-FDTD) 及其在散射问题中的应用

许 锋, 洪 伟, 童创明

(东南大学国家毫米波重点实验室, 江苏南京 210096)

摘 要: 本文提出一种区域分解的时域有限差分算法 (DD-FDTD). 依据待解问题的特点, 把待解问题分解为几个子区域, 在各个子区域中, 采用适合于该区域的共形网格进行划分计算, 通过一种有效的信息传递方案, 把各个子区域综合起来, 获得原问题的解. 通过采用这种方法, 一个复杂的问题可以得到简化, 从而变得适于求解, 同时, 共形网格和精确的信息传递方案的使用, 大幅度提高了计算精度. 文中, 用该算法对二维电磁散射问题进行了分析计算, 获得了精确的计算结果.

关键词: 区域分解; 时域有限差分法; 共形网格; 二维散射问题

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 12-1642-04

The Domain Decomposition FDTD Algorithm (DD-FDTD) and Its Application in Scattering Problems

XU Feng, HONG Wei, TONG Chuang-ming

(State Key Lab. of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: The domain decomposition FDTD method (DD-FDTD) is presented for solving complex problems and improving the accuracy of solutions. Based on this idea, the original domain is decomposed into several sub-domains according to the features of the problem. In each sub-domain, the conformal meshes are created in local coordinates and the FDTD computation is carried out independently in local meshes and local time step, and there is no stability concern. In the iteration procedure of FDTD, the data are exchanged between adjacent sub-domains with overlapped meshes. A suitable data-exchanging scheme proposed here integrates the sub-domains and leads to a more exact solution. This greatly increased the calculation efficiency. A 2-D scattering problem is calculated by using this method and the accuracy of the solution validates the usefulness and exactness of this method.

Key words: domain decomposition; time-domain finite-difference; conformal meshes; 2-D scattering

1 引言

时域有限差分法的有效性和精确性已被普遍接收并获得了广泛的应用. 但是, 该方法的计算特点, 限制了划分网格的自由度, 这使得在应用 FDTD 方法计算复杂问题和不规则边界等问题时, 遇到了一些困难并导致计算精确性下降. 本文针对这个问题, 提出一种区域分解的思想, 把待解问题分解为若干子区域, 在各个子区域中, 依据待解问题的特点, 采用适合于该区域的共形网格进行划分, 然后独立计算. 各个子区域的共形网格在相邻的边界区域相互重叠, 所需的边界上的信息, 从相邻的子域中获得. 该方法能够实施的关键是需要一种行之有效的、精确的信息传递方案, 把各个子区域综合起来, 获得原问题的精确解. 文中, 根据 FDTD 方法的特点, 采用插值后再修正的办法, 大幅度地削减了插值误差, 解决了因插值误差累积而导致的迭代发散的问题, 提高了计算精度和效率, 从

而使区域分解的构想得以实现.

2 区域分解时域有限差分法

区域分解思想的引入, 避免了解决复杂结构问题时, 划分网格所面临的折衷权衡的困难, 从而简化了复杂问题. 同时, 总区域被分解后, 解决各个子域就获得了很大的自由度, 各个子域中共形网格的使用使得计算精度和效率得到很大的提高.

为了把各个子域综合起来, 在各个子域相邻的边界区域中, 各个子域的共形网格在此要相互重叠. 各子域最外层或最里层电场或磁场的信息, 除吸收边界条件和已知边界条件外, 必须从相邻子域中获得. 由 FDTD 方法的计算特点和各个子域网格划分的多样性, 决定了要用插值的办法加以解决.

例如, 在计算二维多柱体散射问题时, 如图 1 所示, 入射波为 TM 波, 图中理想导体柱相对于其余柱体, 旋转了一个角

度,因而其共形网格也要旋转相同的角度.对该子域来说,虚线上最外层电场 E_z 只能由另一网格区域中的电场通过插值而获得;同时,外围区域最里层的电场 E_z 要在该理想导体子域中通过插值而获得.

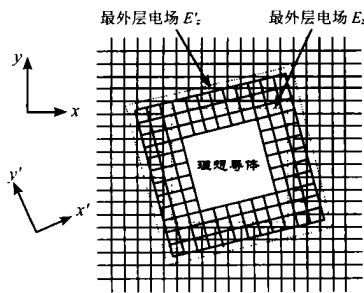


图 1 网格重叠的信息交换方法示意图

对应于二维问题,所选用的插值方法是双线性插值.通过插值处理,各子域就可综合在一起.如果各子域时间步长相同,所有插值将在每一个迭代时间上同步进行;若时间步长不全相同,则插值处理时间要按时间插值的规律进行^[1].通过这些处理,就可以在仍然保持 FDTD 方法简洁性的同时解决一些复杂问题.但是,由于插值误差的存在,当该误差累积到一定程度后,就会使得时间迭代过程发散,造成 FDTD 法计算崩溃,因此,能否大幅度削减插值误差,维持稳定的迭代过程并保持 FDTD 方法的精确性,是区域分解时域有限差分法(DD-FDTD)能否实现的关键.

2.1 二维直角坐标下误差修正

如果采用图 2 所示的二维 Yee 网格,二维直角坐标的 TM 波的 Maxwell 方程按中心差商展开.

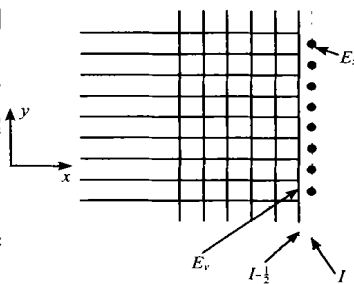


图 2 二维 TM 波的 Yee 网格

平面电磁波的电场和磁场各分量可表示为:

$$E_x^e(i, j) = E_e \exp[J(n t - k_x i x - k_y j y)] \quad (1a)$$

$$H_x^e(i, j) = H_e \exp[J(n t - k_x i x - k_y j y)] \quad (1b)$$

$$H_y^e(i, j) = H_e \exp[J(n t - k_x i x - k_y j y)] \quad (1c)$$

式中, J 表示虚数单位,将式(1)代入按中心差商展开的 FDTD 差分方程可以得到,

$$H_x \sin\left(\frac{-t}{2}\right) = \frac{-t}{\mu y} E_z \sin\left(\frac{k_y y}{2}\right) \quad (2a)$$

$$H_y \sin\left(\frac{-t}{2}\right) = -\frac{-t}{\mu x} E_z \sin\left(\frac{k_x x}{2}\right) \quad (2b)$$

如图 2 所示,在子域的边界第 l 层上的电场 E_z 是在另一子域中通过插值而获得的,插值误差可表示为:

$$e_{n1} = \tilde{E}_z^n(I, j) - E_z^n(I, j) \quad (3)$$

式中, $E_z^n(I, j)$ 表示精确值, $\tilde{E}_z^n(I, j)$ 表示通过插值而获得电场值.该插值误差的存在,当其大小到一定量级时,随着误差的积累,会导致计算崩溃.为了减小该误差,可以把网格重叠的联接区域的网格进一步取小,但是,这必然会造造成计算量和存储量的增加.受文献[2]中超吸收边界条件思想的启发,如果把插值层看作广义吸收边界,采用广义的超吸收边界条件就可以大幅度修正插值误差.

如图 2,第 $l - 0.5$ 层上的磁场 H_y 可以从 FDTD 迭代算法中获得,也可以从相邻子域中通过插值而获得,通过迭代计算获得的磁场可以表示为,

$$\tilde{H}_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) = H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) + \frac{-t}{\mu x} \cdot [\tilde{E}_z^n(I, j) - E_z^n(I - 1, j)] \quad (4)$$

式中, $\tilde{H}_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right)$ 表示因 $\tilde{E}_z^n(I, j)$ 而含有误差的磁场,把式(4)代入式(3)可得,

$$\tilde{H}_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) = H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) + \frac{-t}{\mu x} e_{n1} \quad (5)$$

式中, $H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right)$ 表示精确值.

通过插值计算获得的第 $l - 0.5$ 层上的磁场,其引入的插值误差可表示为:

$$e_{n2} = H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) - \tilde{H}_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) \quad (6)$$

如果在获取电场和磁场信息时,使用相同的插值方法,那么,由式(2b)的简谐波 H_y 和 E_z 的关系式可知, e_{n1} 和 e_{n2} 也满足相同的有关系式,

$$e_{n2} \sin\left(\frac{-t}{2}\right) = -\frac{-t}{\mu x} \sin\left(\frac{k_x x}{2}\right) \cdot e_{n1} \exp\left[J\left(\frac{-t}{2} + \frac{k_x x}{2}\right)\right] \quad (7)$$

式中 $\exp\left[J\left(\frac{-t}{2} + \frac{k_x x}{2}\right)\right]$ 由 E_z 和 H_y 处于不同的时间步和空间位置而引入.综合式(5)、(6)和(7),得到精确的磁场为:

$$H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) = \left\{ H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) + c_{TM} \exp\left[J\left(\frac{-t}{2} + \frac{k_x x}{2}\right)\right] \tilde{H}_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) \right\} / \left\{ 1 + c_{TM} \exp\left[J\left(\frac{-t}{2} + \frac{k_x x}{2}\right)\right] \right\} \quad (8)$$

式中,

$$c_{TM} = \sin\left(\frac{k_x x}{2}\right) / \sin\left(\frac{-t}{2}\right) \quad (9)$$

在相邻区域,通常取 $x \leq 20$,甚至更小.这样,有 $k_x x \ll 1$, 及 $t \ll 1$, 于是,

$$\exp\left[J\left(\frac{-t}{2} + \frac{k_x x}{2}\right)\right] \approx 1,$$

以及,

$$c_{TM} = \frac{\sin\left(\frac{k_x x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{-t}{2}\right)} \cdot \frac{k_x x}{x} = \left(\frac{-x}{v t}\right) \cos \quad (10)$$

式中 $v = 1/\sqrt{\mu}$, 是传播矢量 k 与插值界面法线(x 轴,如图 2 所示)的夹角.平面波通过相邻区域时,一般均满足 $| \quad | \leq 45^\circ$, 因此可以把式(8)简化为:

$$H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) = \left[\tilde{H}_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) + H_y^{n+(1/2)}\left(l - \frac{1}{2}, j\right) \right] / (1 + \quad) \quad (11)$$

式中, $\quad = v t / x$. 式(11)是在实际计算中使用的修正表达式,它可以大幅度削减插值误差,从而得到精确的计算结果.

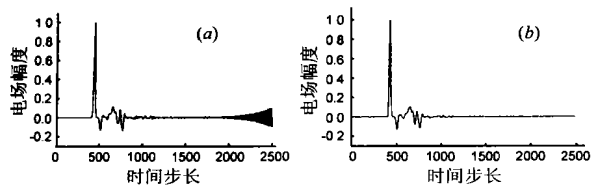


图3 在图4所示的结构中近场一点电场时域信号

(a) 无插值修正; (b) 有插值修正

2.2 二维圆柱坐标下误差修正

应用和上面直角坐标相类似的推导过程, 二维圆柱坐标的 TM 波误差修正式为:

$$H^{n+(1/2)}(I-\frac{1}{2}, j) = \left[\tilde{H}^{n+(1/2)}(I-\frac{1}{2}, j) + \cdot H^{n+(1/2)}(I-\frac{1}{2}, j) \right] / (1 +) \quad (12)$$

式中, $\tilde{H}^{n+(1/2)}(I-\frac{1}{2}, j)$ 表示由第 I 层上插值获得的 E_c 经 FDID 计算得到的第 $I-0.5$ 层上的磁场 H , $H^{n+(1/2)}(I-\frac{1}{2}, j)$ 表示直接在第 $I-0.5$ 层上插值获得的 H .

应用 DD-FDID 法求解下节图 4 所示的问题时, 如果仅采用插值而未进行修正, 则如图 3(a) 所示, 记录的近场中的某点场时域信号在 2000 时间步后, 因插值误差的累积而发散. 若采用式(11)和(12)修正, 则如图 3(b) 所示, 因插值误差被修正而获得了稳定的结果. 当然, 如果将网格分得很小, 那么, 由于插值精度的提高, 也可以不进行修正, 但是, 这会带来沉重的计算和存储负担.

3 数值计算结果及分析

本文应用 DD-FDID 法对图 4 所示的二维介质结构进行了 TM 波入射的散射场分析. 图中圆柱直径为 44mm, 正方体边长为 12mm.

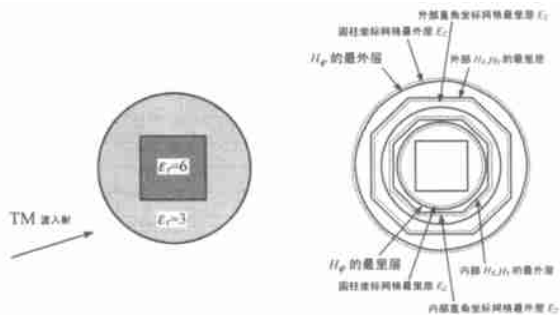


图4 二维混合介质柱散射(TM波入射)

图5 DD-FDID法各子域联接方法示意图

计算时, 将整个区域分解为三个子域. 在内部方柱区域采用直角坐标网格. 在圆柱区域采用共形的圆柱坐标, 以代替阶梯逼近, 提高算法的计算精度. 在圆柱以外, 直到吸收边界采用直角坐标网格. 如图 5 所示, 网格从直角坐标变换到圆柱坐标, 再变换到直角坐标. 在联接区域, 两种网格相互重叠, 图上虚线是各区域的最外层或最里层. 其上均为电场 E_z , 它只能

从相邻区域插值获得. 在虚线内半层或外半层上的 H_x 、 H_y 或 H , 可由插值获得, 也可由迭代计算获得, 在该层上, 利用两种方法获得的场值, 对插值误差进行修正. 最终三个子域被精确的联接起来.

另外, 在用 FDID 法计算散射问题时, 通常要把计算域划分为总场区和散射场区^[3,4], 这样做可以设置任意的入射平面波, 增大计算的动态范围. 简化散射体的设置及增加程序的通用性等. 计算 RCS 时, 在散射区中设置一虚拟围线, 使用其上的等效电流和磁流来计算远区场. 这些已有技术这里就不再叙述了.

图 6 和图 7 给出了 DD-FDID 法计算的双站 RCS, 波长为 30mm. 如图 6(a) 所示, 零角度入射时, DD-FDID 法计算结果与矩量法(MM)计算结果相当吻合, 充分证明了该方法的精确性. 在图 6(b) 中, 把 DD-FDID 的结果与阶梯近似圆柱边界的 FDID 法计算结果进行了比较, 同时又与网格细化一倍后的阶梯近似 FDID 法计算结果进行了比较, 图中可见, 网格细化后的结果与 DD-FDID 法的结果很吻合, 充分证明了 DD-FDID 方法的有效性. 图 7(a) 和图 7(b) 示出了另外两种入射角度下的 DD-FDID 法和矩量法的计算结果. 它们也相当吻合.

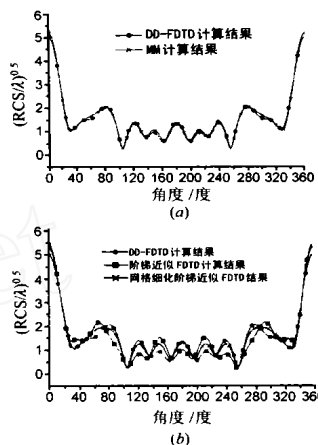


图6 零度 TM 波入射. (a) DD-FDID 法和 MM 法结果; (b) DD-FDID 法、阶梯近似 FDID 法和网格细化后阶梯近似 FDID 法, 三者计算结果比较

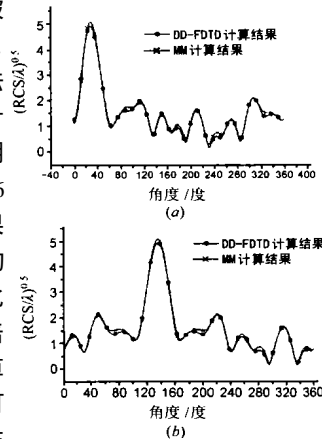


图7 (a) TM 波 30 度入射时, (b) 135 度入射时, DD-FDID 法和 MM 法计算结果比较

4 结论

本文对插值再修正的信息传递方案进行了详细的推导, 利用误差修正的办法, 大幅度地削减了插值误差, 从而使区域分解的时域有限差分算法得以实现. 这是一种简练、实用的计算方法. 将之应用于二维散射问题, 获得了精确的计算结果, 又充分说明了该方法的有效性和精确性. 通过采用这种方法, 一个复杂的问题可以得到简化, 从而变得适于求解, 进一步拓展了 FDID 方法的求解域.

参考文献:

[1] S S Zvanovic, K S Yee, K K Mei. A subgridding method for the time-

- domain finite-difference method to solve Maxwell's equations [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., 1991, 39(3): 471 - 479.
- [2] J Y Fang, K K Mei. A super-absorbing boundary algorithm for numerical solving electromagnetic problems by time-domain finite difference method [A]. IEEE AP-S International Symposium [C], Syracuse, NY, USA, 1988: 427 - 475.
- [3] K Umashankar, A Taflove. A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects [J]. IEEE Trans. EMC, 1982, 24(4): 397 - 450.
- [4] A Taflove, K Umashankar. Radar cross section of general three-dimension scatters [J]. IEEE Trans. EMC, 1983, 25(4): 433 - 440.
- [5] K S Yee, Jie Shuan Chen, Albert H Chang. Conformal finite-difference time-domain (FDTD) with overlapping grids [J]. IEEE Trans. AP, 1992, 40(9): 1068 - 1075.
- [6] U Oguz, L Gurel, O Rhan. An efficient and accurate technique for the incident-wave excitations in the FDTD method [J]. IEEE Trans. MTT, 1998, 46(6): 869 - 880.
- [7] Yijun Lu, C Y Shen. A domain decomposition finite-difference method for parallel numerical implementation of time-dependent Maxwell's equations [J]. IEEE Trans. AP, 1997, 45(3): 556 - 562.

作者简介:



许 峰 男. 1963 生于江苏省南通. 目前正在东南大学攻读博士学位. 研究方向是电磁场时域方法数值计算, 电磁散射和电路分析.



洪 伟 男. 1962 生于河北省张家口市. 1988 年于东南大学获博士学位. 现为东南大学无线电工程系教授、博士生导师、系主任. 在国内外权威学术刊物上发表论文 170 多篇, 学术专著一部. 获一项国家自然科学基金四等奖、两项国家教委科技进步一等奖等多项科技奖励. 获国家人事部“突出贡献中青年专家”等多项荣誉称号. 获“国家杰出青年基金”和国家教委“跨世纪优秀人才基金”等. 任多种国内外权威刊物, 如 IEEE Trans. on MTT, IEEE Trans. on AP, IEEE Trans. on CPMT, IEE Proc. -H, Electron. Lett. 《电子学报》, 《微波学报》, 《电波科学学报》等的审稿人或编委.