第 1 期
2002 年 1 月

电　子　学　报
ACTA ELECTRONICA SINICA

Vol. 30　No. 1
Jan.　2002

# 用提升方法设计 M 带 LPPR-FIR 滤波器组

陈　佩，张卫东，全亚斌，许晓鸣
（上海交通大学自动化系，上海 200030）

**摘　要**：本文研究了如何用提升方法构造 M 带 PR - FIR 滤波器组，并且考虑了一种特殊情形的线性相位（Linear Phase，LP）性质，及其优化设计问题，即如何转化为一个二次型优化问题.

**关键词**：提升方法；M 带滤波器组；完全重构；线性相位
**中图分类号**：TN919.18　**文献标识码**：A　**文章编号**：0372-2112（2002）01-0136-03

## Construction of M-band LPPR-FIR Filter Banks by Lifting Scheme

CHEN Pei，ZHANG Wei-dong，QUAN Ya-bin，XU Xiao-ming
*(Department of Automation，Shanghai Jiaotong University，Shanghai 200030，China)*

**Abstract**：Lifting scheme is generalized to perfectly reanstruct M-band（PR）FIR filter banks in this paper. Linear-phase property is studied in a special case. The design and optimization of filter banks can be commutated into a quadratic optimization problem.

**Key words**：lifting scheme；M-band filter banks；perfect reconstruction；linear phase



## 1　引言

提升方法[1,2]是构造小波及其滤波器组的一种强有力的工具. 不但可以用来构造第二代小波[1,2]，也可以构造第一代小波[3]. 文献[4]分析了用提升方法构造的小波的两点性质：双正交性和线性相位性质.

本文把提升方法推广到 M 带滤波器组，研究了具有相同 M 模性的滤波器组的线性相位问题. 并且考虑用提升方法构造该类滤波器组的优化设计问题. 根据文献[4]中对提升方法系数 $s(z)$ 的分析，进而给出参数化的形式，从而达到优化设计的目的.

本文第 2 部分把提升方法推广到 M 带滤波器组的情形. 第 3 部分研究怎样用提升方法对滤波器进行优化设计，如何把它转化为一个二次型优化问题. 第 4 部分举例说明该方法.

## 2　用提升方法构造具有线性相位性质的 M 带 PR 滤波器组

用多相表示法来分析 M 带滤波器组 $\{H_k(z), F_k(z)\}$ $(0 \le k < M)$ 如下：$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_{kl}(z^M)$，$E(z) = [E_{kl}(z)]$，$F_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(m-1-l)} R_{kl}(z^M)$，$R(z) = [R_{kl}(z)]$，则该滤波器组具有完全重构的条件[5]是：

$$\det E(z) = 1 \tag{1}$$

### 2.1　提升方法在 M 带 PR 滤波器组中的推广

Daubechies 等学者[3]研究了如何提升方法构造二进小波及其滤波器组，文献[4]对该类小波的线性相位性质做了详细的分析. 同样的，也可以用提升方法构造新的 M 带 PR 滤波器组. 根据多相表示的结构，很容易实现这样的推广.

**定理**　给定 M 带分析滤波器组 $[H_0(z), H_1(z), \cdots, H_{M-1}(z)]^T$，对应的 $E(z)$ 满足 $\det E(z) = 1$，即满足 PR 条件. 则如下构造的 M 带分析滤波器 $[H_0^{new}(z), H_1^{new}(z), \cdots, H_{M-1}^{new}(z)]^T$ 也满足 PR 条件：

$$H_i^{new}(z) = H_i(z) + \sum_{k=0,\,k\neq i}^{M-1} s_k(z^M) H_k(z)\ (0 \le i < M), \tag{2}$$

$$H_k^{new}(z) = H_k(z)\ (k \neq i)$$

该定理是对文献中定理 3 的推广，证明从略.

从该定理可以看出，很容易在某一个 M 带 PR 滤波器组的基础上构造另外一个具有特定性质的 PR 滤波器组，并且自由度大. 因为与两带滤波器组不同，为了使某个滤波器具有适当的响应，可以对其它 $M-1$ 个滤波器加权组合，以满足要求.

### 2.2　线性相位

与两带 PR 滤波器组的情况不同，M 带 PR 滤波器组的情形比较复杂，为了使它们具有线性相位性质，各个滤波器的长度、奇偶性和对称/反对称性质没有那么多限制. 为了使新构造的滤波器组具有线性相位性质，本文中只考虑一种比较特殊的情形：各滤波器具有相同的 M 模性，即 $N_k = m_k M + I$ $(0 \le k < M)$. 其中 $N_k$ 是第 $k$ 个滤波器的长度，$0 \le I < M$. 不失一般性可以设 $I = 0$. 可以证明，在这种情况下，如果滤波器组具有线性相位性质，那么，当 M 为偶数时，其对应的多相表示矩阵

收稿日期：2000-05-15；修回日期：2001-04-16

$E$ 可表示为

$$E(z)=\begin{bmatrix} E_{00}(z) & \cdots & E_{0,M/2-1}(z) & J_0\tilde{E}_{0,M/2-1}(z) & \cdots & J_0\tilde{E}_{00}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{M-1,0}(z) & \cdots & E_{M-1,M/2-1}(z) & J_{M-1}\tilde{E}_{M-1,M/2-1}(z) & \cdots & J_{M-1}\tilde{E}_{M-1,0}(z) \end{bmatrix} \tag{3}$$

当 $M$ 为奇数时, $E$ 可以表示为

$$E(z)=\begin{bmatrix} E_{00}(z) & \cdots & E_{0,(M-3)/2} & E_{0,(M-1)/2} & J_0\tilde{E}_{0,(M-3)/2}(z) & \cdots & J_0\tilde{E}_{00}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ E_{M-1,0}(z) & \cdots & E_{M-1,(M-3)/2} & E_{M-1,(M-1)/2} & J_{M-1,}\tilde{E}_{M-1,(M-3)/2}(z) & \cdots & J_{M-1,}\tilde{E}_{M-1,0}(z) \end{bmatrix} \tag{4}$$

反之,也成立. 其中, $\tilde{E}_{ij}(z)=z^{-2c_i}E_{i,j}(z^{-1})$, $c_i$ 为 $E_{ij}(z)$ 的中心,这里采用文献[6]的表示法. $J_k=\begin{cases}1, & H_k(z)\text{ 是对称} \\ -1, & H_k(z)\text{ 是反对称}\end{cases}$. 并且在 M 为奇数的时候, $\tilde{E}_{i,(M-1)/2}=J_iE_{i,(M-1)/2}$.

在提升方法中,假设原有的 PR 滤波器组具有线性相位性质,即其多相矩阵 $E(z)$ 能够表示成式(3)或者式(4)的形式. 可以证明,如下选择 $S(z)$,由式(2)新构造的 PR 滤波器组也具有线性相位性质,即 $E^{new}(z)$ 也必须具有式(3)或者式(4)的形式: $s_k(z)$ 具有线性相位性质,即 $\hat{s}_k(z)=D_ks_k(z)$, $D_k=1$ 或者 $D_k=-1$; $r_k$ 是 $s_k(z)$ 的中心,使得 $s_k(z)E_{kj}(z)$ 与 $E_{ij}(z)$ 具有相同的中心;且 $J_i=J_kD_k$.

## 3　滤波器组的设计

本节考虑用提升方法构造两带滤波器组的优化设计问题. 设初始滤波器组为 $[H_0(z), H_1(z)]$,通常 $H_0(z)$ 是低通的,而 $H_1(z)$ 是高通的. 提升方法是如此构造 $H_0^{new}(z)=H_0(z)+H_1(z)s(z^2)$,其中 $s(z)$ 是一 Laurent 多项式,即 $s(z)=\sum_{k=k_a}^{k_b}s_kz^{-k}$.

### 3.1　设计准则

这里采用最小均方误差准则来设计滤波器. 通常情况下,希望低通滤波器的幅频响应是(本文只限于低通滤波器,对于高通滤波器可以类似处理):

$$D(\omega)=\begin{cases}1, & 0\le\omega\le\omega_p \\ 0, & \omega_s\le\omega\le\pi\end{cases} \tag{5}$$

最小均方误差准则就是选取 $H_0(z)$

$$\min\ E: E=\int[D(\omega)-H_0(\omega)]^2d\omega, R\in[0,\pi] \tag{6}$$

通常不考虑过渡带的误差:

$$E=\alpha\int^{p}|H_0(e^{j\omega})-1|^2d\omega+\beta\int_{s}|H_0(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{7}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 可以调节通带误差和阻带误差的权值. 如果 $\alpha=1$, $\beta=0$ 就是只考虑通带误差;如果 $\alpha=0$, $\beta=1$ 就是只考虑阻带误差.

### 3.2　提升方法的参数化

为了构造具有线性相位的滤波器组,在文献[7]中讨论了其中可能的情形: EE 和 OO(两者具有相同的奇偶性). 文献[4]考虑了提升方法在构造如此滤波器组时对 $s(z)$ 的要求,下面给出它们的参数化形式.

对于 EE 情形: $s_n$ 关于 1/2 对称,且 $s(1)=0$. 即 $s(z)=(z^{-1}-1)s'(z)$, $s'_n$ 关于 0 反对称.

$$s(z)=(z^{-1}-1)\sum_{k=1}^{N}s_k(z^k-z^{-k}) \tag{8}$$

对于 OO 情形: $s_n$ 关于 0 反对称,且 $s(1)=0$. 即 $s(z)=(z^{-1}-1)s'(z)$, $s'_n$ 关于 1/2 对称.

$$s(z)=(z^{-1}-1)\sum_{k=1}^{N}s_k(z^k-z^{1-k}) \tag{9}$$

### 3.3　优化计算

在本小节只讨论两带 PR 滤波器组中 EE 情形,其它情况可以类似得到. 即 $H_0^{new}(z)=H_0(z)+H_1(z)s(z^2)$. 由式(8), $s(z)$ 取 $s(z)=(z-1)\sum_{k=1}^{N}s_k(z^k-z^{-k})$ 的形式.

设　$H_0(z)=\sum_{n=-N_0}^{N_0}h_nz^{-n}$, $H_1(z)=z^{-1}\sum_{n=-N_1}^{N_1}\tilde{h}_nz^{-n}$

其中　$h_n=h_{-n}$, $\tilde{h}_0=\tilde{h}_{-n}$, $N_0+N_1=2m+1$

用提升方法设计滤波器就是选择一个相量 $S=[s_1,s_2,\cdots,s_n]^T$,使误差 $E$ 最小: $E=\alpha\int^{p}|H_0^{new}(e^{j\omega})-1|^2d\omega+\beta\int_{s}|H_0^{new}(e^{j\omega})|^2d\omega$

误差 $E$ 是关于提升系数 $S$ 的一个二次多项式:

$$E=a+\sum_{k=1}^{N}a_ks_k+\sum_{k,l=0}^{N}a_{kl}s_ks_l \tag{10}$$

对于 EE,有

$$\begin{aligned} a=&\alpha[2\sum_{k,l=0,k\ne l}^{N'}h_k^Lh_l^L(\frac{1}{k+l}\sin(k+l)\omega+\frac{1}{k-l}\sin(k-l)\omega) \\ &+2\sum_{k=1}^{N'}h_k^{L^2}(\frac{1}{2k}\sin2k\omega+\omega)+4h_0^{L^2}\omega]_0^{\omega_p} \\ &+\beta[2\sum_{k,l=0,k\ne l}^{N'}h_k^Hh_l^H(\frac{1}{k+l}\sin(k+l)\omega+\frac{1}{k-l}\sin(k-l)\omega) \\ &+2\sum_{k=1}^{N'}h_k^{H^2}(\frac{1}{2k}\sin2k\omega+\omega)+4h_0^{H^2}\omega]_{\omega_s}^{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k=&\alpha[2\sum_{m,n=0,m\ne n}^{N'}(h_m^Lg_{n,k}+h_n^Lg_{m,k})(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\omega+\frac{1}{m-n} \\ &\sin(m-n)\omega)+4\sum_{n=1}^{N'}h_n^Lg_{n,k}(\frac{1}{2n}\sin2n\omega+\omega)+8h_0^Lg_{0k}\omega]_0^{\omega_p} \\ &+\beta[2\sum_{m,n=0,m\ne n}^{N'}(h_m^Hg_{n,k}+h_n^Hg_{m,k})(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\omega+\frac{1}{m-n} \\ &\sin(m-n)\omega)+4\sum_{n=1}^{N'}h_n^Hg_{n,k}(\frac{1}{2n}\sin2n\omega+\omega)+8h_0^Hg_{0k}\omega]_{\omega_s}^{\pi} \end{aligned}$$

$$a_{k,l}=\alpha[2\sum_{m,n=0,m\ne n}^{N'}g_{m,k}g_{n,l}(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\omega+\frac{1}{m-n}$$

$$\sin(m-n)\omega) + 2\sum_{n=1}^{N'} g_{n,k}g_{n,l}(\frac{1}{2n}\sin 2n\omega + 1) + 4g_{0k}g_{0l}\omega]_{0}^{\omega_p}$$

$$+\beta[2\sum_{m,n=0,m\neq n}^{N'} g_{m,k}g_{n,k}(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\omega + \frac{1}{m-n}$$

$$\sin(m-n)\omega) + 2\sum_{n=1}^{N'} g_{n,k}g_{n,l}(\frac{1}{2n}\sin 2n\omega + 1) + 4g_{0k}g_{0l}\omega]_{\omega_s}^{\pi}$$

其中 $[f(\omega)]_{\alpha}^{\beta} = f(\beta) - f(\alpha)$

其中 $h_k^L = h_k^H = h_k(k \neq 0)$, $h_0^L = (h_0 - 1)/2$, $h_0^H = h_0/2$,

$$g_{n,i} = (\widetilde{h}_{n+1+2i} - \widetilde{h}_{n-1+2i} - \widetilde{h}_{n+1-2i} + \widetilde{h}_{n-1-2i})\ (n \geq 1),$$

$$g_{0,i} = (\widetilde{h}_{1+2i} - \widetilde{h}_{-1+2i} - \widetilde{h}_{1-2i} + \widetilde{h}_{-1-2i})/2$$

## 4 例子

用提升方法构造具有线性相位性质的双正交小波,只有两种情形:两个滤波器具有相同的奇偶性,即 EE 和 OO. 下面就第 3 节分析过的 EE 情形举例. 取 $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\phi_p = 1.47$, $\phi_s = 1.67$.

在文献[7]中构造了一个阶次为 22 的滤波器;用前面的优化设计方法,同样可以构造出相同长度的低通滤波器,即阶次 22 的滤波器. 设原有的 PR 滤波器组 $[H_0(z), H_1(z)]$ 为文献[8]中例子,即:

$$[H_0(z), H_1(z)] = [1/4(z^{-1} + 2 + z), 1/8(-z^{-3} - 2z^{-2} + 6z^{-1} - 2 - z^{1})]$$

为此,设 $s(z) = (z-1)\sum_{i=1}^{4} s_i(z^i - z^{-i})$,可得:

$$\begin{aligned}E = {} & 0.1329 + 1.8365s_1 - 1.8988s_2 + 1.2060s_3 - 0.7526s_4 \\ & + 9.5793s_1^2 + 10.4397s_2^2 + 10.2500s_3^2 + 10.0098s_4^2 \\ & - 12.0084s_1s_2 + 1.7206s_1s_3 + 0.1184s_1s_4 - 11.8900s_2s_3 \\ & + 1.3414s_2s_4 - 11.4552s_3s_4\end{aligned}$$

计算得到:在 $[s_1, s_2, s_3, s_4] = [-0.0681, 0.0426, -0.0128, 0.0278]$ 时取最小值,滤波器 $H_0^{new}$ 为:

$$\begin{aligned}H_0^{new}(z) = {} & 0.4659 + 0.3064(z+z^{-1}) + 0.0107(z+z^{-2}) \\ & - 0.0985(z+z^{-3}) + 0.0138(z+z^{-4}) \\ & + 0.0605(z+z^{-5}) - 0.0037(z+z^{-6}) \\ & - 0.0408(z+z^{-7}) + 0.0032(z+z^{-8}) \\ & + 0.0259(z+z^{-9}) - 0.0069(z+z^{-10}) \\ & - 0.0035(z+z^{-11})\end{aligned}$$

$E_{min} = 0.0116$;而文献[7]中的例子,其均方误差为 0.0547;波波器 $H_0$ 的均方误差为 0.1329.

## 5 结论

本文首先讨论了提升方法在 M 带 PR 滤波器组中的推广,然后研究了在提升方法中滤波器的优化设计问题,关键是如何转化为一个二次型的优化问题. 文中的例子说明了该方法的可行之处:无论是相对于原有滤波器,还是相对于其它方法,该方法都有明显的改进效果.

**参考文献**:


[1] W Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets [J]. SIAM J. Math. Anal., 1997, 29(2): 511 - 546.

[2] W Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal., 1996, 3 (2): 186 - 260.

[3] I Daubechies, W Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps [J]. J. Fourier Anal. Appl., 1998, 4(3): 247 - 269.

[4] 陈佩,许晓鸣,等. 用 lifting 方法构造具有线性相位的双正交小波 [J]. 电子与信息学报.

[5] P P Vaidyanathan. Quadrature mirror filter banks, M-band extension and perfect reconstruction technique [J]. IEEE ASSP Mag., 1987, 4 (1): 4 - 20.

[6] T Q Nguyen, P P Vaidyanathan. Structures for M-channel perfect-reconstruction FIR QMF banks which yield linear-phase filters [J]. IEEE Trans. on ASSP, 1990, 38(3): 433 - 446.

[7] T Q Nguyen, P P Vaidyanathan. Two-channel perfect-reconstruction FIR QMF structures which yield linear-phase analysis and synthesis filters [J]. IEEE Trans. On ASSP, 1989, 37(5): 676 - 690.

[8] A Cohen, I Daubechies. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. Commu. Pure Appl. Math., 1992, XLV, 485 - 560.


**作者简介**:


**陈 佩** 男. 1975 年生. 博士,研究方向是小波变换、图像处理和计算机视觉. e-mail: chenpei75@263.net

**张卫东** 男. 1967 年生. 博士生导师,研究方向是复杂工业过程的鲁棒控制.

**全亚斌** 男. 1973 年生. 博士,研究方向是子空间方法.

**许晓鸣** 男. 1957 年生. 博士生导师,上海交通大学副校长,研究方向是智能控制.