

离散混沌系统的小波模型和定量分析

魏 荣¹, 卢俊国², 李 军¹, 王执铨¹

(1. 南京理工大学自动化系, 江苏南京 210094; 2. 上海交通大学电信学院, 上海 201102)

摘 要: 本文对一类离散混沌系统提出一种新的多分辨小波模型. 利用小波时频局域化特性确定最初的小波模型, 根据匹配寻优准则选择最小的模型结构. 模型的降维分解结构消除了张量积构造多维小波基在高维空间中的“维数灾”问题. 仿真研究不仅表明了该方法辨识混沌系统的有效性, 还计算了模型的动态不变量, 并与原系统进行了比较.

关键词: 混沌系统; 非线性系统辨识; 小波模型; 多分辨分析; 降维分解

中图分类号: O231.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0073-03

A New Wavelet Model for Identification of Discrete Chaotic Systems and Qualitative Analysis of Model

WEI Rong, LU Jun-guo, LI Jun, WANG Zhi-quan

(1. Dept. of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. Dept. of Electronics & Information Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 201102, China)

Abstract: This paper develops a new multiresolution wavelet model for a special class of nonlinear system / discrete chaotic system. Based on the time-frequency localization properties of wavelet, an initial model is obtained. To obtain a parsimonious dynamical reconstruction, the structure selection algorithm based on match pursuit algorithm is implemented. Lowering dimension decomposition method is proposed to solve the computational cost by the tensor product in high input dimensions. Simulation examples not only show the efficiency of the proposed method, but also compute dynamical invariants of model that is close to those of the original system.

Key words: chaotic system; nonlinear system identification; wavelet model; multiresolution analysis; lowering dimension decomposition

1 引言

非线性系统辨识在实际应用中的一个重要领域就是混沌系统的建模. 在过去几十年中, 混沌的发现促进了耗散系统的研究. 非线性系统辨识通常是比较困难的, 而混沌系统是非线性系统中一类特别系统, 更有其特殊性^[1]: (1) 因为系统是耗散的, 所以从实验数据中获得模型就变得更加困难; (2) 虽然系统输出是有界的, 但混沌行为本质上是不稳定的, 它渐进收敛到一个分形集合上, 即奇异吸引子; (3) 混沌系统对初始条件极端敏感, 两个(或多个)相近的初始条件将导致完全不同的混沌轨迹, 这就使得判别模型与原系统是否等价变得很困难.

针对混沌行为的特性, 本文采用小波多分辨模型来辨识混沌系统. 小波作为强有力的非线性函数逼近工具, 具有其他辨识工具不可比拟的优点^[2~4]. 现有的小波模型主要是 Zhang 和 Benevise 在 1992 提出的小波网络^[5]及其推广, 而 Zhang 所提出的小波网络更像是径向基函数网络(RBF), 这种构造方法无法应用小波特有的多分辨分析理论. 本文采用张量积

造多维小波框架, 可以直接应用多分辨分析, 利用降维分解的建模方法来解决高维空间中的“维数灾”问题, 根据匹配寻优准则^[6]不但确定了模型的初始结构, 还减小了过度拟合的风险. 文中通过定量计算混沌系统和模型的动态不变量来判别其等价性, 最后的仿真结果表明了该方法对混沌系统辨识的有效性.

2 问题的描述

考虑到实验数据一般受到测量噪声的干扰, 我们采用 NARMAX 模型描述实际动态系统:

$$y(t) = f[y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-1), \dots, u(t-n_u), e(t-1), \dots, e(t-n_e)] + e(t) \quad (1)$$

其中 $e(t)$ 是附加的随机变量, 一般假定与输入不相关. 式(1)中的 $f(\cdot)$ 通常是未知的非线性函数, 而且即使 n_u, n_y, n_e 已知, $f(\cdot)$ 的可能实现在理论上也是无穷多的. 本文研究用小波级数来逼近未知非线性函数 $f(\cdot)$, 最终得到未知函数的多分辨近似模型, 它由有限的小波基函数组成. 我们以一组样本的

原系统输出与小波模型输出之间的均方误差来定义小波模型的误差目标函数,即

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(i) - \hat{y}(i)]^2 \quad (2)$$

其中 N 为采样点个数. 学习算法的目的就是寻找模型,使得误差目标函数式(2)中的 J 最小.

3 多分辨分析和多维小波基构造

若存在一允许小波函数及其尺度函数 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, 则可由 ϕ 和 ψ 的膨胀和平移构造一维小波基 $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ 和 $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, 它们生成闭子空间 $V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \{ \phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \}$ 和 $W_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \{ \psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \}$, 称序列 $\{V_j\}, \{W_j\}$ 构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨分析^[4].

对于多维空间 $L^2(\mathbb{R}^d), d > 1$, 设 $x = (x_1, \dots, x_d)$, 由张量积方法构造的 d 维基函数 $\{\phi(X)\}$ 和 $\{\psi(X)\}_{l=1, 2^d-1}$ 可直接构成 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个多分辨分析 $\{V_j\}$:

$$V_j = \{ \phi_{j,k} \}_{k \in \mathbb{Z}^d}, W_j = \{ \psi_{j,k,l} \}_{k \in \mathbb{Z}^d, l=1, \dots, 2^d-1} \quad (3)$$

4 离散多分辨小波模型

4.1 模型降维分解结构

用张量积方法构造多维小波基的优点在于:张量积产生的基函数在各个方向上保持不同的行为,不需要径向构造中的过渡变量来进行方向的选择.但是张量积构造的基函数个数 n 与空间维数 d 成指数关系,即 $n = 2^d$, 在高维空间中会产生所谓“维数灾”问题. Kavli 在文献[7]中指出:高维输入空间可以分解成低维子空间的和.我们给出类似 ASMOD 的降维分解小波模型结构,最终得到的模型是一些低维子模型的和.

对式(1)所示的 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n_u+n_y+n_e})$, 设输入变量集合

$$I = \{ y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-1), \dots, u(t-n_u), e(t-1), \dots, e(t-n_e) \} \quad (4)$$

因为随机噪声 $e(t-j), j=1, \dots, n_e$ 在实际辨识过程中是不可测量的,所以噪声项常常被残差项或预测误差所代替,即 $e(t-j) = \hat{e}(t-j) = y(t-j) - \hat{y}(t-j), j=1, \dots, n_e$, 则 I 重写为:

$$I = \{ y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-1), \dots, u(t-n_u), \hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-n_e) \} \quad (5)$$

设 $X_i(t)$ 为 I 的子集,且满足条件:(1) $\bigcup_{i=1}^{n_f} X_i(t) = I$, (2) $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j$, 其中 n_f 是子集的个数, $d(i)$ 为 $X_i(t)$ 的维数, $n_f = \sum_{i=1}^{n_f} d(i) = n_y + n_u + n_e$. 则式(1)可表示为: $y(t) = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(X_i(t))$, 其中每一个子模型 f_i 可表示成多分辨小波模型:

$$f_i(X_i(t)) = \sum_{k=1}^{2^{d(i)-1}} \sum_{p=1}^{j+N_s(i)} \phi_{j,k}^{(i)}(X_i(t)) + \sum_{l=j+1}^{j+N_s(i)} \psi_{j,k}^{(i)}(X_i(t)) \quad (6)$$

这里 j 为第 i 个子模型的初始尺度, $N_s(i)$ 为终止尺度.

显然,最简单的模型是一维模型 ($d(i) = 1$) 的和. 我们以此作为初始模型,如果当前模型不能满足给定的精度要求,那

么需要寻找一个更复杂的小波模型结构. 这个模型可以做如下更新:用合并两个低维子模型为一个更高维的子模型,重新辨识参数,若满足要求则停止;若不满足要求,则继续合并上个模型中的两个子模型,依此类推,直至满足要求为止.

4.2 模型初始化

利用小波杰出的时频局域化特性可以确定模型的初始结构. 设信号 f 的支撑^[8]是包含 $(1-\epsilon)$ 信号总能量的最小区间,可任意给定. 那么对一给定允许小波 ϕ , 设其时域支撑:

$$\text{supp}(\phi, \cdot) = [-L, L], \text{频域的支撑: } \text{supp}(|\hat{\phi}|^2, \wedge) = [-1, -\epsilon] \cup [0, 1]. \text{可以证明: } \text{supp}(\phi, \cdot) = [2^{-n}(-L+m), 2^{-n}(L+m)], \text{supp}(|\hat{\phi}|^2, \wedge) = [2^{-n}(-1-\epsilon), 2^{-n}(1-\epsilon)].$$

那么对一大类能量有限信号,只需要有限数目的小波就可以覆盖信号的 $(1-\epsilon)$ 能量区间.

由上述的小波时频局域化特性可以进行模型初始化,确定初始的回归因子的个数:

(1) 对给定信号进行频谱分析,得到信号 $y(t)$ 带宽的估计 $[\tilde{\omega}_{\min}, \tilde{\omega}_{\max}]$ 及 $[x_{\min}, x_{\max}]$,

(2) 确定所选小波 ϕ 的支撑或支撑 $[0, 1] \times [-L, L]$,

(3) 利用下式挑选 m 使得

$$[2^{-m}(x_0(\cdot) + n), 2^{-m}(x_1(\cdot) + n)] \times [2^{-m}(\cdot), 2^{-m}(\cdot)] \times [x_{\min}, x_{\max}] \times [\tilde{\omega}_{\min}, \tilde{\omega}_{\max}] \cap \phi$$

其中 $n = -(2^m - 1), \dots, 2^m - 1$. 令 $D = \{(m, n)\}$, 这样可以确定初始尺度范围.

4.3 结构选择和参数估计算法

经过降维分解和初始化后,式(1)可表示为一组小波基函数的线性组合:

$$y(t) = \sum_{l=1}^M g_l(t) \phi_l + e(t) \quad (7)$$

其中 $g_l = g_{j,k}(X_l(t)), (j, k) \in D, X_l(t) \subset I, M$ 为小波基函数的个数, ϕ_l 为待估参数.

为了得到最小的模型结构,我们用匹配寻优的方法对初始模型做进一步的改善. 匹配寻优方法是由小波理论专家 Mallat 提出的,它是一种迭代挑选过程,通过在每一步挑选过程中把与分解残差最匹配的一个元素挑出来. 在文献[6]中, Mallat 证明了如果初始选择空间在 Hilbert 空间中是完全的,那么每一步挑选后的残差收敛到 0,从而保证了在一定条件下算法的收敛性.

将参数估计算法与上面所给出的匹配寻优方法结合,可得到最终的估计模型. 其中,估计参数的算法可采用最小二乘法、BP 算法、最速下降法等已广泛使用的算法.

4.4 模型定量分析

一般系统辨识方法只采用式(2)所示的性能指标来判别模型与系统的等价性,但当系统是混沌的,由于其自身的特殊性,很难由此判定两个系统的等价性. 因此本文主要比较模型与系统的 Lyapunov 指数和奇异吸引子,这些都是动态不变量,它们与混沌系统的初始值无关,能表征混沌系统的本质特性.

计算这些特征量的主要困难在于需要知道未知非线性系统的物理结构. 然而最近几年, 许多直接从实验数据估计动态不变量的算法涌现出来. 我们采用文[1]中的方法, 根据系统输入输出测量数据计算混沌吸引子的最大正 Lyapunov 指数.

5 仿真研究

考虑一离散混沌系统 Henon 映射:

$$x(k) = 1 - ax^2(k-1) + y(k-1) \quad (8)$$

$$y(k) = bx(k-1) \quad (9)$$

其中 $a=1.4$, $b=0.3$. 这是一个两输入 $\{x(k-1), y(k-1)\}$, 两输出系统 $\{x(k), y(k)\}$, 分别应用多分辨小波模型, 经降维分解成一维子模型的和:

$$x(k) = f_1(x(k-1)) + f_2(y(k-1)) \quad (10)$$

$$y(k) = g_1(x(k-1)) + g_2(y(k-1)) \quad (11)$$

在仿真中采用著名的四阶 B 样条小波, 它是紧支撑双正交小波. 随机设定初始值 (在 $(0, 0)$ 附近) $(x_0, y_0) = (0.02, 0.05)$, 采得 500 组数据 $\{x(k-1), y(k-1)\}$ 和 $\{x(k), y(k)\}$, $k=2, \dots, 501$ 作为学习样本. 经初始化后, 再由匹配寻优进一

步挑选, 最终得到模型 (10) 的小波元个数为 5, 模型 (11) 包含 10 个小波基函数. 两个模型根据误差目标函数 (2) 计算的数据如下: $J_x(500) = 3.66 \times 10^{-4}$, $J_y(500) = 8.74 \times 10^{-6}$. 由以上的统计数据可知, 模型已很好得逼近原混沌系统, 为了进一步检测模型的质量, 我们画出模型和原系统的混沌吸引子. 图 1 所示的是原系统的混沌吸引子, 图 2 为训练后模型的混沌吸引子, 由图上直观地看, 两者很相似. 定量描述奇异吸引子的一个标准方法就是计算混沌系统的最大 Lyapunov 指数, 在本例中, 原系统的最大 Lyapunov 指数 $\max = 0.418$, 训练后模型的最大 Lyapunov 指数 $\max = 0.412$, 两者很接近.

改变初始值 $(x_0, y_0) = (0.01, 0.03)$, 采样 500 组测试数据作为模型输入, 将模型输出 $\{x(k), y(k)\}$ 与原系统输出 $\{x(k), y(k)\}$ 进行比较, 得到如下结果: $J_x(500) = 3.90 \times 10^{-4}$, $J_y(500) = 8.42 \times 10^{-6}$. 同样画出测试后模型的混沌吸引子如图 3, 它的最大 Lyapunov 指数为 $\max = 0.417$.

显然, 用模型测试后的数据计算的动态不变量非常接近原系统, 这说明了用此方法建立的模型具有较强的泛化能力.

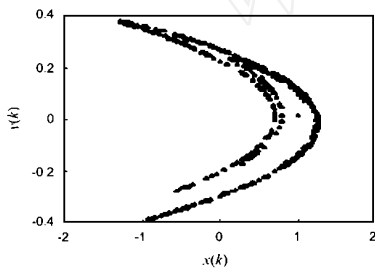


图 1 原系统的混沌吸引子

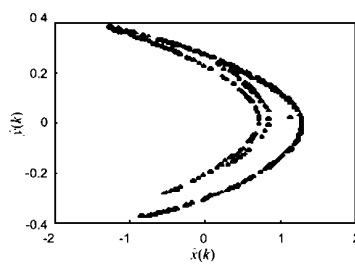


图 2 模型逼近后的混沌吸引子

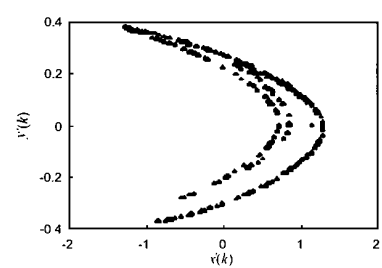


图 3 模型测试后的混沌吸引子

6 结束语

本文研究了一类特殊非线性系统⁴混沌系统的建模方法, 建立了小波多分辨模型结构. 针对张量积构造多维小波基在高维空间中产生的所谓“维数灾”问题, 给出了模型降维分解结构, 较好地解决了这一问题. 同时利用小波时频局域化特性, 方便地确定了初始模型结构. 匹配寻优算法使得模型以最少的系数近似了被辨识系统. 采用多个模型有效性判别策略定量分析了模型的质量, 显示了本文提出的小波多分辨模型不仅很好地描述了原非线性系统的输入与输出之间的关系, 而且还保持了混沌系统的本质特性. 最后的仿真研究表明了该方法对混沌系统辨识的有效性, 同时结果还表明了模型具有较强的泛化能力.

参考文献:

- [1] M T Rosenstein, J J Collins, C J de Luca. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets [J]. Physica D 1993, 65:117 - 134.
- [2] R A DeVore, B Jawerth, et al. Compression of wavelet decompositions [J]. Am. J. Math. 1992, 114:737 - 785.
- [3] D L Donoho. Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities and spectra from indirect and noisy data [C]. Proc. Symp. Applied

Mathematics, 1993:159 - 205.

- [4] 崔锦泰, 等. 小波分析导论 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.
- [5] Q Zhang, A Beneviste. Wavelet networks [J]. IEEE Trans. NN 1992, 3:889 - 898.
- [6] S G Mallat, Z Zhang. Matching pursuit with time-frequency dictionaries [J]. IEEE Trans. Signal Process, 1993, 41(12):3397 - 3415.
- [7] T Kavli, E Weyer. ASMOD (Adaptive Modeling of Observational Data) some theoretical and experimental results [R]. Proc. IEE Coll. Advances in Neural Networks for Control & Systems, 1994, 78:3/1 - 7.
- [8] Y C Pati, P S Krishnaprasad. Analysis and synthesis of feedforward neural networks using discrete affine wavelet transformations [J]. IEEE Trans. NN, 1993, 4(1):73 - 85.

作者简介:



魏 荣 女. 1975 年 9 月出生于安徽马鞍山. 1997 年获南京理工大学工学学士学位, 现为南京理工大学自动化系 98 级博士生. 主要从事信号处理、小波分析理论及其在控制领域中应用研究.