

多小波变换及其在信号滤波中的应用

谢荣生, 孙 枫, 郝燕玲

(哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘 要: 多小波拥有对称性、正交性、有限支撑等这些信号处理中十分重要的特性, 从而弥补了单小波的不足, 具有更为广阔的应用前景. 本文从滤波的角度, 重点分析并设计了多小波预滤波与多小波分解系数处理方法. 仿真表明多小波分析方法的优越性.

关键词: 多分辨分析; 多小波; 信号滤波; 降噪

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 03-0419-03

Multiwavelet Transform and Its Application in Signal Filtering

XIE Rong sheng, SUN Feng, HAO Yarr ling

(Automation College, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: Multiwavelet possesses such very important properties in signal processing as orthogonality, symmetry, and short support, which makes up for the shortcoming of scalar wavelet, and takes on broader application prospects. This paper, from the aspect of filtering, mainly analyzes and designs multiwavelet filter. The processing method for multiwavelet coefficients is also presented in the paper. The simulation indicates the advantages of multiwavelet.

Key words: multiresolution analysis; multiwavelet; filtering; denoising

1 引言

对称性、正交性、有限支撑是小波信号处理中十分重要的性质, 已经证明实系数单小波不能同时具有这些性质, 限制了其应用. 多小波放松了对单小波函数的限制, 可以同时拥有这些性质. 多小波由多个尺度函数和多个小波函数组成, 具有更大的自由度, 容易按照所需性质构造, 从而具有广阔的应用前景.

与单小波不同的是, 多小波分析必须对输入数据进行预处理. 本文设计了基于 GHM 双小波的一种预处理方法, 并基于该方法应用 D L Donoho 的软阈值方法处理多小波变换系数, 从而实现信号的去噪、滤波.

2 正交多小波变换

令 $\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_r(t)]^T (r \in N)$ 是多分辨率分析空间 $\{V_k\}_{k \in Z}$ 的正交多尺度函数, 与其相对应的正交多小波函数 $\Psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{r-1}(t)]^T$ 满足 $\text{span}\{2^{j/2} \psi_i(2^j t - k) : k \in Z, i = 0, 1, \dots, r-1\} = W_j$, 使得 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补, 即 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ 满足两尺度方程

$$\Phi(t) = 2 \sum_{k \in Z} h_k \Phi(2t - k) \quad (1)$$

$$\Psi(t) = 2 \sum_{k \in Z} g_k \Phi(2t - k) \quad (2)$$

其中, h_k, g_k 是 $r \times r$ 的矩阵. 从信号滤波的角度看, $H(\omega) =$

$\sum_{k \in Z} h_k e^{-i\omega k}$ 和 $G(\omega) = \sum_{k \in Z} g_k e^{-i\omega k}$ 是与尺度函数和小波函数对应的 $r \times r$ 的矢值滤波器.

对于信号 $f(t) \in v_0$, 可以表示成 $\sum_{k \in Z} \Phi_i(t - k)$, $0 \leq i \leq r-1$,

$k \in Z$ 的线性组合, 即 $f(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k \in Z} c_{i,0,k} \phi_i(t - k)$, 由多分辨率分析知 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{j-1} \oplus W_j$ 从而有:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k \in Z} c_{i,0,k} \phi_i(t - k) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k \in Z} c_{i,j_0,k} 2^{j_0/2} \phi_i(2^{j_0} t - k) + \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\substack{j_0 \leq j \leq j-1 \\ k \in Z}} d_{i,j,k} 2^{j/2} \psi_i(2^j t - k) \quad (3)$$

其中:

$$\begin{cases} c_{i,j,k} = \int f(t) 2^{j/2} \phi_i(2^j t - k) dt \\ d_{i,j,k} = \int f(t) 2^{j/2} \psi_i(2^j t - k) dt \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, r-1; k \in Z, j < 0 \quad (4)$$

将正交单小波中的分解与重构的 Mallat 算法推广至正交多小波, 可以得到:

多小波分解:

$$C_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_{n-2k} C_{j,n}, \quad k \in Z, D_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} g_{n-2k} D_{j,n}, \quad j, k \in Z \quad (5)$$

多小波重构:

$$C_{j,k} = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_{k-2n}^* C_{j-1,n} + g_{k-2n}^* D_{j-1,n} \quad (6)$$

其中, $C_{j,k} = [c_{0,j,k}, c_{1,j,k}, \dots, c_{r-1,j,k}]^T$,

$$D_{j,k} = [d_{0,j,k}, d_{1,j,k}, \dots, d_{r-1,j,k}]^T$$

h_n^*, g_n^* 分别为 h_n, g_n 的共轭转置.

由分解过程知, 如果已知初始尺度系数 $C_{0,k}$, 则可以得到信号分解的所有尺度系数和小波系数, 与单小波不同的是, 进入 Mallat 塔式算法的初始尺度系数为矢量, 因而必须先对信号进行预处理.

3 多小波预滤波器设计

以 GHM 多小波为例设计多小波预滤波器. 对于 GHM 双小波, 式(1)、(2)中的系数分别为^[1]:

$$h_0 = \begin{bmatrix} 3/10 & 2\sqrt{2}/5 \\ -\sqrt{2}/40 & -3/20 \end{bmatrix}, h_1 = \begin{bmatrix} 3/10 & 0 \\ 9\sqrt{2}/40 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9\sqrt{2}/40 & -3/20 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/40 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g_0 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/40 & -3/20 \\ -1/20 & -3\sqrt{2}/20 \end{bmatrix}, g_1 = \begin{bmatrix} 9\sqrt{2}/40 & -1/2 \\ 9/20 & 0 \end{bmatrix},$$

相反地, 可以由 $c_{1,0,k}$ 重建 $f(n/2)$:

$$\begin{cases} f(k) = c_{1,0,k} \phi_1(1) \\ f(\frac{2k+1}{2}) = c_{0,0,k} \phi_0(\frac{1}{2}) + c_{1,0,k} \phi_1(\frac{1}{2}) + c_{1,0,k} \phi_1(\frac{3}{2}) \end{cases}$$

令 $x(n) = f(n/2)$;

$$Q_1(\omega) = -\frac{\phi_1(3/2)}{\phi_0(1/2)\phi_1(1)} + \frac{1}{\phi_0(1/2)} e^{i\omega} - \frac{\phi_1(1/2)}{\phi_0(1/2)\phi_1(1)} e^{i2\omega};$$

$$Q_2(\omega) = \frac{1}{\phi_1(1)} e^{i\omega};$$

$$P(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_0(1/2) & \phi_1(1/2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \phi_0(1) \\ 0 & \phi_1(3/2) \end{bmatrix} e^{-i\omega}$$

4 多小波软阈值去噪算法

假设噪声信号 $x(n)$ 可表示为:

$$x(n) = f(n) + \mathcal{Q}(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$f(n)$ 为一维真实信号, $z(n)$ 为高斯白噪声, σ 为噪声方差, N 为采样点数.

小波分析的目的就是要根据实际应用对小波分解系数作出合理的处理, 然后通过小波重构重建信号. 小波软阈值处理小波分解系数的方法可以表达为

$$\eta_t(w) = \begin{cases} \text{sgn}(w)(|w| - t), & |w| \geq t \\ 0, & |w| < t \end{cases}$$

其中 w 是小波系数, t 是阈值. 也就是说, 对小于 t 的小波系数置零, 而对大于 t 的小波系数作趋零处理. David L

$$g_2 = \begin{bmatrix} 9\sqrt{2}/40 & -3/20 \\ -9/20 & 3\sqrt{2}/20 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/40 & 0 \\ 1/20 & 0 \end{bmatrix}$$

GHM 双小波拥有实值对称(或反对称)性、紧支撑和正交性, 并具有二阶逼近^[2,3](见图1).

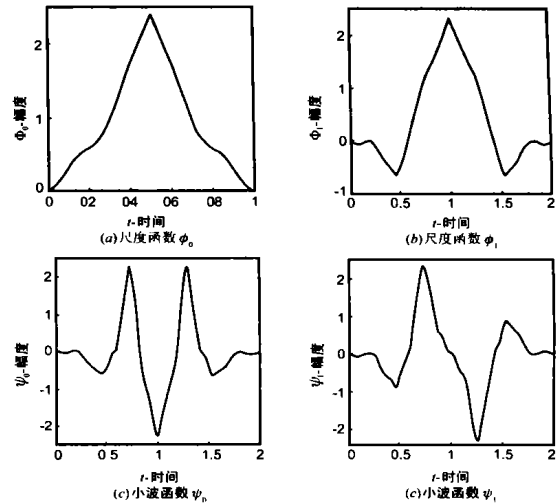


图1 GHM 双重尺度函数和双重小波函数

ϕ_0 的支撑是 $[0, 1]$, ϕ_1 的支撑是 $[0, 2]$, 因而 $\forall f \in V_0$, 由式(3), $c_{i,0,k}$ ($i = 0, 1; k \in Z$) 可以由 $f(n/2)$ 求得:

$$\begin{cases} c_{0,0,k} = f(\frac{2k+1}{2})/\phi_0(1/2) - f(k+1)\phi_1(\frac{1}{2})/(\phi_1(1)\phi_0(\frac{1}{2})) - f(k)\phi_2(\frac{3}{2})/(\phi_1(1)\phi_0(\frac{1}{2})) \\ c_{1,0,k} = f(k+1)/\phi_1(1) \end{cases} \quad (7)$$

再令 $Q(\omega)$ 为滤波器 $Q_1(\omega)$ 和 $Q_2(\omega)$ 的 2 倍采样速率的多相滤波矩阵, 则:

$$Q(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{\phi_1(3/2)}{\phi_0(1/2)\phi_1(1)} - \frac{\phi_1(1/2)}{\phi_0(1/2)\phi_1(1)} e^{i\omega} & \frac{1}{\phi_0(1/2)} \\ \phi_1(1) e^{i\omega} & 0 \end{bmatrix}$$

由式(7)知 $Q(\omega)$ 即为 GHM 多小波的预滤波器, $P(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ 满足 $P(\omega)Q(\omega) = I_2$.

多小波分解和重构见图 2. $2\downarrow$ 表示隔点采样, $2\uparrow$ 表示隔点插零.

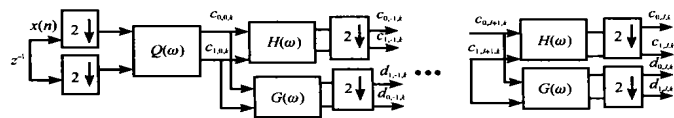


图 2(a) 多小波预滤波及多小波分解

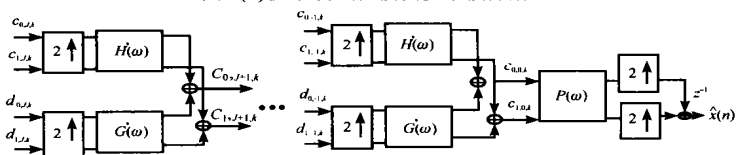


图 2(b) GHM 多小波重构

Donoho 从理论上严格证明了当 $t = \sigma \sqrt{2 \log(N)}$ 时, 重构信号具有很好的光滑性和适应性^[6]. 因而应用小波软阈值方法从

$x(n)$ 中恢复 $f(t)$, 算法如下:

- (1) 用图 2(a) 的多小波预处理和分解算法求 $x(n)$ 的小波系数;
- (2) 用软阈值 $t_N = \sigma \sqrt{2 \log N}$ 处理小波系数;
- (3) 用图 2(b) 的小波重构算法重建信号.

5 多小波信号去噪仿真

在实验中我们使用了图 2 的 GHM 多小波分解及重构算法和 D_4 单小波进行比较, 采样点数 $N = 1024$. 结果如图 3 和表 1 所示, 从中可见, 多小波的效果明显优于单小波.

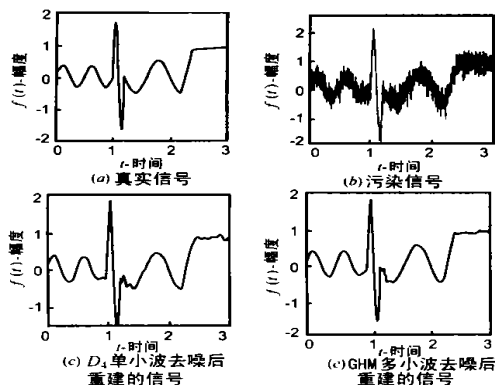


图 3 一维信号滤波

表 1 小波阈值去噪比较

	噪声(σ)	D_4 单小波	GHM 多小波
绝对平均误差	0.6102	0.2434	0.1151
均方误差	0.4940	0.1278	0.0317

6 结束语

多小波是单小波的推广, 单小波分析中的很多原理、方法都可以推广到多小波. 但多小波是矢量小波, 有许多自身的特点, 正由于这些特点使得多小波在某些方面的应用效果优于单小波. 根据具体应用设计性能良好的多小波预处理器和多小波分解系数处理方法是多小波走向工程应用的两个重要环节.

参考文献:

- [1] G Strang, V Strela. Short wavelets and matrix dilation equations [J]. IEEE Trans. on SP., 1995, 43(1): 108–115.

- [2] J S Geronimo, et al. Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions [J]. SIAM. Math. Anal., 1996, 27(4): 1158–1192.
- [3] J S Geronimo, et al. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions [J]. J. Approx. Theory, 1994, 78(3): 373–401.
- [4] Qingtang Jang. Orthogonal multiwavelets with optimum time frequency resolution [J]. IEEE Trans. on SP., 1998, 46(4): 830–884.
- [5] X G Xia. Design of prefilter for discrete multiwavelet transforms [J]. IEEE Trans. on SP., 1996, 44(1): 25–35.
- [6] D L Donoho. De noising by soft thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613–626.
- [7] V Strela, et al. The application of multiwavelet filter banks to signal and Image Processing [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(4): 548–563.

作者简介:



谢荣生 男, 1974 年生于江西宁都县. 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生, 研究方向: 多小波分析, 导航、制导与控制. 已发表学术论文 6 篇.



孙 枫 男, 1944 年生于黑龙江省桦川县. 1967 年毕业于哈尔滨工业大学. 哈尔滨工程大学教授, 博导. 主要研究方向: 多导航传感器数据融合技术, 组合导航及数据处理, 惯性导航系统等. 获省部级科技进步奖 6 项, 编著教材二部, 主要发表学术论文 30 多篇.

郝燕玲 女, 1944 年生于山东省掖县. 1967 年毕业于哈尔滨工业大学, 哈尔滨工程大学教授, 博士生导师. 主持多项国防重点科研项目、博士点基金项目、国防基金项目, 获国家、省部级科技进步奖 16 项. 编著教材二部, 主要发表学术论文 30 余篇. 主要研究方向: 惯性导航系统, 组合导航系统, 电子导航图系统, 信息融合滤波技术.