

波导不连续问题分析中基函数 对收敛性能影响的研究

刘发林,徐善驾

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系,安徽合肥 230027)

摘要: 提出了利用多种新的基函数系列展开波导不连续处的场并求解该不连续性的散射参量的方法. 通常可结合不连续处的金属楔近旁的边缘条件,构造出满足该边缘条件的变形三角基函数用以展开不连续处的电磁场,匹配公共口面处的切向电磁场即可得到一个线性方程组,可得到极好的数值收敛;还进一步采用不同的多种基函数,也可以获得极好的数值收敛. 对于一个不连续性,方程组的阶数与基函数的个数(几个甚至一个)相等,因而方程组保持了较低的阶数,极大地提高了计算效率.

关键词: 电磁场边缘条件;波导不连续;数值收敛

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 03-0339-04

Investigation on Effect of Basis Functions on Convergence Property in Analysis of Waveguide Discontinuity Problems

LIU Fa-lin, XU Shan-jia

(Department of Electronic Engineering and Information Science, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China)

Abstract: An algorithm is raised to deal with waveguide step discontinuity problems by using various new basis functions in the expansion of the fields at the discontinuity to solve the scattering parameters. The electromagnetic field's edge condition in the vicinity of metal wedges is generally taken into account and modified trigonometric functions are constructed as basis functions to expand the electromagnetic fields at the discontinuity. Matching the tangential fields over the common aperture can form a set of linear equations. Very good numerical convergence is observed. Furthermore, some different basis functions are constructed and evaluated, and the excellent convergence property is also obtained. For one discontinuity, the order of the linear equations is the same as the number (a few or only one) of the basis functions. This keeps the equations at the lowest order and the numerical computation efficiency is thus improved drastically.

Key words: electromagnetic edge condition; waveguide discontinuity; numerical convergence

1 引言

规则波导的模式概念明确,构造有规律,因此基于此概念的模式匹配方法常被用于分析多种类型的波导不连续性. 有的直接给出散射参数^[1,2],更多的是通过散射参数给出等效电路参数用于设计滤波器^[3~6]、分析谐振腔^[7]或提取可与商用电路分析软件相容的电路模型^[8]. 由于波导不连续处的非均匀结构,仅仅利用均匀结构条件下的波导本征模展开不连续处的场,其收敛速度通常较慢. 并且,不连续性越剧烈,需要的模式数目越多. 通常需要考虑十几个、几十个模式才能达到有效收敛,例如对于零厚度的波导容性膜片,甚至需要上百个模式. 这样大大降低了计算效率. 而且解高阶方程时,很有可能出现奇异解或无解.

在模式匹配方法中,通常选择基函数与试探函数的形式

一致,且均为三角函数^[1~8],使其内积能够以显式表示,在这一点上有利于节省计算时间. 但是通过对该类基函数的展开系数进行深入分析,发现随模式增加,展开系数衰减较慢,导致其收敛性能较差. 近来,考虑不连续性本身金属楔的特点,对基函数选择进行了一些改进^[9],采用耦合积分方程技术(CIET)求解由切向场匹配获得的方程,既可以计算单个不连续性,也可以直接计算一系列不连续性的整体响应. 该类基函数与三角函数的内积也可以由 Bessel 函数显式表示,而且仅用一个或几个基函数即可获得较好的收敛,明显改善算法的收敛性,可以获得较高的计算效率.

既然模式匹配法可以采用普通的三角函数展开不连续处的电磁场,而这在不连续处并不满足金属楔的边缘条件,却仍旧能够获得可靠的结果,而采用满足金属楔的边缘条件的变

形三角函数,也可获得良好的快速收敛结果,因此,我们认为,考虑不连续性本身的特点,基函数的选择也可以是多种多样的.当然,选择基函数,使其与模式展开中的三角函数的内积可以用显式直接表示是一种较为有效的方式.然而,这给基函数的选择带来了一定的限制.实际上,只要一组函数符合正交性与完备性,均可以被选作基函数.至于它们与模式展开中的三角函数的内积可否用显式表示,只会影响计算的效率.考虑到计算机技术的快速发展,用高效率的数值积分可以逐步克服这种限制.并且,由于使用了较少的基函数,由场匹配获得的方程的阶数很低,可以更有效地保证解的存在与正确性.本文将图 1 所示波导 H 面单边阶跃不连续性为例,说明基函数的选择可以有多种形式,而且,存在很多形式的基函数,均可以保证有效的数值计算的收敛.

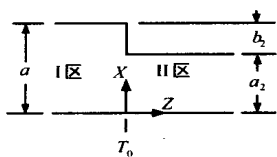


图 1 波导 H 面单边阶跃不连续性示意图

2 理论分析

我们以图 1 所示波导 H 面单边阶跃不连续为例,说明本文的方法与应用.该结构是常用的不连续性之一,可用于滤波器、阻抗变换网络、波束分离装置等.

设入射波为 TE₁₀ 模式,可以写出两个区域的电磁场如下:

$$E_y(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{-jk_1^l z} + \sum_{m=1} B_m^l \sin\left(m \frac{x}{a}\right) e^{-jk_m^l z} \quad (1)$$

$$E_y(x) = \sum_{m=1} F_m \sin\left(m \frac{x}{a_2}\right) e^{-jk_m^l z} \quad (2)$$

$$H_x(x) = -Y_1 \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{-jk_1^l z} + \sum_{m=1} Y_m^l B_m^l \sin\left(m \frac{x}{a}\right) e^{-jk_m^l z} \quad (3)$$

$$H_x(x) = -\sum_{m=1} Y_m F_m \sin\left(m \frac{x}{a_2}\right) e^{-jk_m^l z} \quad (4)$$

式中设定入射波的幅度为 1, B_m 、 F_m 分别为 I 区的第 m 个模式的反射波幅度和 II 区的第 m 个模式的透射波幅度, Y_m 、 Y_m^l 分别为 I 区、II 区第 m 个模式的导纳.

为满足切向电场连续,令

$$E_y(x) = E_y(x) = \begin{cases} X_1(x), & x \in [0, a_2] \\ 0, & x \notin [0, a_2] \end{cases} \quad (\text{在 } T_0 \text{ 面}, z=0) \quad (5)$$

以 $\sin(m x/a)$ 为基取 $X_1(x)$ 的傅立叶变换,则展开系数为

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(m) &= \frac{2}{a} \int_0^a X_1(x) \sin\left(m \frac{x}{a}\right) dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{a_2} X_1(x) \sin\left(m \frac{x}{a}\right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

同理,以 $\sin(m x/a_2)$ 为基取 $X_1(x)$ 的傅立叶变换,则展开系数为

$$\tilde{X}_1(m) = \frac{2}{a_2} \int_0^{a_2} X_1(x) \sin\left(m \frac{x}{a_2}\right) dx \quad (7)$$

将式(6)、(7)代入式(5),

$$E_y(x) = X_1(x) = \sum_{m=1} \tilde{X}_1(m) \sin\left(m \frac{x}{a}\right) \quad (8)$$

$$E_y(x) = X_1(x) = \sum_{m=1} \tilde{X}_1(m) \sin\left(m \frac{x}{a_2}\right)$$

比较式(8)和式(1)、(2),并令 $z=0$,可得

$$B_m = -\tilde{X}_1(m) + \tilde{X}_1(m) \quad (9)$$

$$F_m = \tilde{X}_1(m) \quad (10)$$

将式(9)、(10)代入式(3)、(4),并根据切向磁场连续,取

$H_x(x) = H_x(x)$,可得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1} Y_m \tilde{X}_1(m) \sin\left(m \frac{x}{a_2}\right) + \sum_{m=1} Y_m \tilde{X}_1(m) \sin\left(m \frac{x}{a}\right) \\ = 2 Y_1 \sin\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

下面,以基函数系列 $B_{1j}(x)$ 展开函数 $X_1(x)$,令

$$X_1(x) = \sum_{j=1}^J c_{1j} B_{1j}(x) \quad (12)$$

很明显

$$\tilde{X}_1(m) = \sum_{j=1}^J c_{1j} \tilde{B}_{1j}(m) \quad (13)$$

$$\tilde{X}_1(m) = \sum_{j=1}^J c_{1j} \tilde{B}_{1j}(m)$$

而

$$\tilde{B}_{1k}(m) = \frac{2}{a} \int_0^{a_2} B_{1k}(x) \sin\left(m \frac{x}{a}\right) dx \quad (14)$$

$$\tilde{B}_{1k}(m) = \frac{2}{a_2} \int_0^{a_2} B_{1k}(x) \sin\left(m \frac{x}{a_2}\right) dx$$

现在用伽略金方法处理式(11).在其两边乘以 $(2/a) B_{1k}(x)$,并在两区公共口面积分可得

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \sum_{j=1}^J c_{1j} \sum_{m=1}^M Y_m \tilde{B}_{1k}(m) \tilde{B}_{1j}(m) + \sum_{j=1}^J c_{1j} \sum_{m=1}^M Y_m \tilde{B}_{1k}(m) \tilde{B}_{1j}(m) \\ = 2 Y_1 \tilde{B}_{1k}(1) \end{aligned} \quad (15)$$

可以表示成如下矩阵形式:

$$A_{1k} c_1 = U \quad (16)$$

其中,对波导本征模式的无穷级数已经截断为 M ,而

$$A_{1kj} = \sum_{m=1}^M Y_m \tilde{B}_{1k}(m) \tilde{B}_{1j}(m) + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^M Y_m \tilde{B}_{1k}(m) \tilde{B}_{1j}(m) \quad (17)$$

$$U_k = 2 Y_1 \tilde{B}_{1k}(1) \quad (18)$$

考虑到直角金属楔近旁的切向电场按距离的 $2/3$ 次方衰减^[10],可选择下述基函数形式

$$B_{1k}(x) = \frac{\sin\left(k \frac{x}{a_2}\right)}{[1 - (x/a_2)^2]^{1/p}}, \quad p=3 \quad (19)$$

查积分表^[11],

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(uy)}{[1 - y^2]^{1/p}} dy = \left(\frac{1}{2}\right) \left(v + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{u}\right)^v J_v(u), \\ v &= \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \end{aligned} \quad (20)$$

通过变量代换 $w = x/a_2$,可以推导出

$$\tilde{B}_{1k}(m) = G \left\{ \frac{J_\nu(|k-m|)}{(|k-m|)^\nu} - \frac{J_\nu((k+m))}{((k+m))^\nu} \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{B}_{1k}(m) = \frac{a_2}{a} G \left\{ \frac{J_\nu(|k-\tilde{m}|)}{(|k-\tilde{m}|)^\nu} - \frac{J_\nu((k+\tilde{m}))}{((k+\tilde{m}))^\nu} \right\}$$

其中, $G = 0.5 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\nu + \frac{1}{2}\right) 2^\nu$, 而 $\tilde{m} = ma_2/a$.

求解方程式(16)可得展开系数 c_{1j} , 再代入式(9)、(10)即可得到该不连续性的反射特性与传输特性.

当然,也可以直接简单地选择正弦函数作为基函数,这样将与普通的模式匹配法完全一样,尽管可以得到正确的结果,但数值收敛较慢.

3 数值分析举例

首先,为验证上述方法的正确性,以图 1 所示的波导 H 面单边阶跃不连续性为例,给出其在一个波段的反射系数的幅度与相位.取参数如下: $a = 22.86\text{mm}$, $a_2 = 15\text{mm}$. 对应的截止频率约为 10GHz. 值得一提的是,式(21)的傅立叶系数与频率无关,因此可以较大地提高扫频计算效率. 计算中,取波导本征模式的无穷级数截断为 $M = 15$, 而基函数的个数为 $J = 2$. 基函数满足金属楔近旁的边缘条件,其指数 $p = 3$, 对应的 $\nu = 1/6$. 结果如图 2 所示. 由图 2 可见,利用新的基函数的前二项即可获得满意的结果. 对比数据^[8]是由模式匹配法得到的.

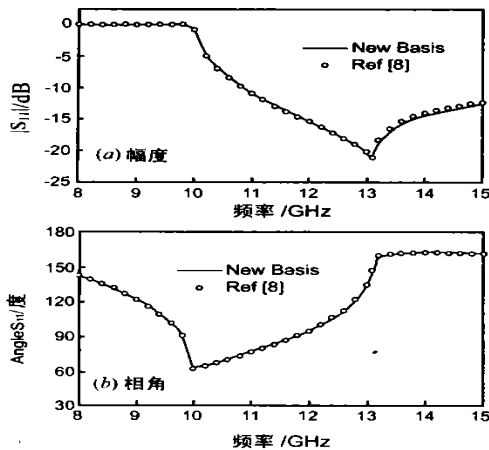


图 2 波导 H 面单边阶跃不连续性的反射系数:幅度 (a) 与相位 (b)

其次,讨论比较一下新的基函数与波导本征基函数的收敛特性. 结果示于表 1. 从表 1 可见,用新的基函数,一项即可获得与收敛结果十分接近的结果. 对于该不连续性,仅需三到四项即可收敛. 与此相比,采用正弦本征基函数时,需要十项以上才能达到有效收敛.

最后,采用不同的新的基函数,证明数值计算的可行性,表 2 分别列出了 $\nu = 1/10$ (对应 $p = 2.5$) 和 $\nu = 1/4$ (对应 $p = 4$) 时的计算结果. 前者依然收敛较快,而后者收敛明显变慢. 另外,还选择了多组指数 ν , 发现 $0 < \nu < 1/6$ 时 (对应的指数 $2 < p < 3$), 均可获得快速收敛. 而当 $\nu > 1/6$ 时, 即 $p > 3$ 时, 收敛性能开始变差. 由式(19)可以看出, p 越大, 其对于分母上的本征三角函数的修正作用越弱, 因而收敛变慢.

表 1 新基函数与波导本征基函数的收敛性能比较

$A = 22.86\text{mm}, A_2 = 15\text{mm}, f = 10\text{GHz}$

M	New Basis ($\nu = 1/6$)		Sinusoidal Basis	
	Amplitude	Angle	Amplitude	Angle
1	.9039	63.05	.8582	0
2	.9013	62.54	.8976	56.59
3	.9010	62.48	.8972	57.45
4	.9009	62.47	.8994	58.63
5	.9009	62.46	.9009	61.13
6	.9009	62.46	.9009	61.24
7	.9009	62.46	.9013	61.44
8	.9009	62.46	.9017	62.16
9	—	—	.9017	62.18
10	—	—	.9018	62.27
11	—	—	.9019	62.59
12	—	—	.9019	62.58
13	—	—	.9020	62.64
15	—	—	.9021	62.80

此外,式(19)基函数 $B_{1k}(x)$ 中关于横坐标 x 的平方项也可以改换为一次方或多次方项,只要满足 $0 < \nu < 1/6$, 仍可快速收敛,但此时需要数值积分才能得到相应的内积. 此处不再赘述.

表 2 不同新基函数的收敛性能比较

$A = 22.86\text{mm}, A_2 = 15\text{mm}, f = 10\text{GHz}$

M	New Basis ($\nu = 1/10$)		New Basis ($\nu = 1/4$)	
	Amplitude	Angle	Amplitude	Angle
1	.9074	64.34	.9009	62.78
2	.9021	62.72	.9007	62.78
3	.9012	62.42	.9008	62.77
4	.9010	62.34	.9008	62.76
5	.9009	62.31	.9009	62.74
6	.9009	62.30	.9009	62.72
7	.9009	62.30	.9009	62.70
8	.9009	62.30	.9009	62.68
9	—	—	.9009	62.64
10	—	—	.9009	62.56
11	—	—	.9009	62.52
12	—	—	.9009	62.50

由上述分析可见,通过选择满足金属楔边缘条件的基函数,可以有效地改善数值收敛性能. 并且基函数的选取可以灵活多样.

4 结论

本文就波导不连续问题的分析中基函数的选择对于收敛性能的影响问题进行了深入研究. 结合不连续处的金属楔近旁的电磁场边缘条件,构造了多种变形的三角基函数用以展开不连续处的电磁场,利用切向电磁场连续构造一个线性方程组,可得到极好的数值收敛. 由于基函数的数目通常很少,因而使方程组保持了较低的阶数,十分利于数值求解. 几组例子充分说明了该方法的正确性和数值有效性,另外还证明了基函数的选择范围可以进一步扩大,同样可以获得较快的数

值收敛性能.

必须指出,当不连续性长度趋于零时,普通的模式匹配算法需用几十个甚至近百个本征模式才能获得收敛的正确结果.预计用本文叙述的方法,采用符合金属楔边缘条件的基函数,可以明显改善其收敛性能,提高计算效率.这方面的后续理论与计算工作将另文给出.

参考文献:

- [1] J Uher, J Borneman, U Rosenberg. Waveguide Components for Antenna Feed Systems: Theory and CAD [M]. Norwood, MA: Artech House, Inc., 1993: 9 - 23.
- [2] Falin Liu. A unified approach to the analysis of a category of H-plane discontinuities [J]. International Journal of Infrared & mmr waves, 1998, 19(8): 1103 - 1112.
- [3] 李嗣范, 陈忆元. 平面电路波导带通滤波器的机助设计 [J]. 中国科学 A 辑, 1982, (9): 857 - 866.
- [4] 戎敖生, 李嗣范. E 面膜片不连续性及其在毫米波滤波器中的应用 [J]. 电子科学学刊, 1989, 11(1): 1 - 9.
- [5] 洪嘉生, 石俊明. 确定鳍线膜片等效电路参数的数值方法 [J]. 电子学报, 1988, 16(3): 65 - 70.
- [6] 刘发林. 波导 E 面偏置金属插片宽带滤波器 [J]. 微波学报, 1998, 14(4): 324 - 329.
- [7] Falin Liu, Shanjia Xu, Yijian Sheng. An alternate method for analysis of waveguide loaded cavity [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2000, 25(4): 283 - 285.
- [8] A Weisshaar, M Mongiardo, V K Tripathi. CAD-oriented equivalent circuit modeling of step discontinuities in rectangular waveguides [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1996, 6(4): 171 - 173.
- [9] S Amari, J Bornemann, R Vahldieck. Fast and accurate analysis of

waveguide filters by the coupled-integral-equations technique [J]. IEEE Trans on MTT, 1997, 45(9): 1611 - 1618.

- [10] R Mittra, S W Lee. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves [M]. New York: Macmillan Co., 1971.
- [11] I S Gradshteyn, I M Ryzhik. Table of Integrals, Series and Products [M]. New York: Academic Press, 1965.

作者简介:



刘发林 男. 1963 年 7 月生于河北邢台市. 高级工程师. 1985 年毕业于清华大学, 1988 年于中国科技大学获工学硕士, 现为中国科技大学微波毫米波工程研究中心副主任, 微波学会毫米波与亚毫米波专业委员会委员. 1997 至 1998 年为日本东北大学访问学者. 研究领域为: 毫米波混合集成、介质导波结构、卫星无线通信等. 曾获国家科技进步二等奖, 中国科学院科技进步一等奖等. 发表论文 20 余篇.



徐善驾 男. 1939 年 7 月出生于浙江省. 教授, 博士生导师. 现为国家自然科学基金委学科评审组成员, 中国微波学会副主任委员. IEEE 微波和导波快报副主编, IEEE 微波理论和技术汇刊、通信学报等重要刊物编委. 长期从事微波、毫米波和光波理论和技术的教学与科研工作. 曾获中国科学院自然科学一等奖、国防科工委光华科技一等奖和中科院重大科技成果二、三等奖. 在国内外发表论文 320 余篇.