

基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪

曲天书, **戴逸松**, 王树勋

(吉林大学南岭校区信息学院, 吉林长春 130025)

摘 要: 本文在 D. L. Donoho 提出的小波阈值去噪的基础上, 提出了一种新的阈值函数, 与原来的分段阈值函数相比, 此函数具有明显优点, 表达式简单易于计算, 连续可微, 易于求导. 此函数的这些优点为实现信号的自适应去噪提供了可能. 本文应用此阈值函数, 基于 SURE 无偏估计, 给出了一种自适应去噪方法. 并用受污染的 blocks、bumps、heavy sine、doppler 等典型信号做实验, 实验结果显示此方法能在最小均方误差 (MSE) 意义上收敛, 而且其最小均方误差优于其他文献中的阈值去噪的方法.

关键词: 小波变换; 阈值函数; 自适应去噪; 最小均方误差; 小波阈值去噪

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 02-0266-03

Adaptive Wavelet Thresholding Denoising method Based on SURE Estimation

QU Tian-shu, DAI Yi-song, WANG Shu-xun

(Jilin University, Information Department, Changchun, Jilin 130025, China)

Abstract: This paper presents a novel adaptive denoising method based on wavelet shrinkage method. First, we present a new class of thresholding function that has continuous derivative while the derivative of standard soft-thresholding function is not continuous. The new thresholding function makes it possible to construct an adaptive algorithm whenever using the wavelet shrinkage method. Second, by using the new thresholding function, we present an adaptive method based on SURE Risk. At last, several numerical examples are given, the result shows that the proposed method is very effective in adaptively finding the optimal solution in mean square error (MSE) sense. It also indicates that this method gives better MSE performance than other wavelet shrinkage methods.

Key words: wavelet transformation; thresholding function; adaptive denoising; LMS; wavelet shrinkage

1 引言

在对含噪信号进行去除噪声的应用中, 一般大多利用噪声的一些先验知识对含噪信号在最小均方误差意义上进行估计. 1995 年, D. L. Donoho 在小波变换的基础上提出了阈值去噪的概念^[1], 由于此方法在 Besov 空间上可得到最佳估计值, 而任何其他线性估计 (包括核估计、近邻估计以及局部多项式估计) 都达不到与此相同的估计效果. 因此, 阈值去噪的方法引起了国内外很多学者的注意. 除斯坦福大学的 D. L. Donoho 和 I. M. Johnstone 继续对此方法进行了较深入的理论研究外^[2], 耶鲁大学的 R. R. Coifman^[3]、德克萨斯大学的 Xiao - Ping Zhang、M. D. Desai^[4] 等都对此方法做了进一步研究和应用, 在国内西北工业大学的潘泉、戴冠中等^[6], 上海交通大学的李冲泥、胡光锐^[7], 北京理工大学的梅文博^[8] 都拓宽了此方法的应用前景. 但是由于此方法的所采用的阈值函数是分段函数 (见图 1 中曲线 a 所示), 其函数连续但导数不连续, 在具体应用中不便于进行运算处理, 限制了它的进一步应用. 本文提出了一种新的阈值函数 (见图 1 中曲线 b 所示), 它具有与原函数相同的功能, 但它连续且具有无穷阶导数, 便于进行各种数学处理, 为阈值的自适应选择提供了可能. 本文用此函数取代原阈值函数基于 SURE 无偏估计提供了一种自适应阈值去噪的

方法, 并通过实验验证了此方法的有效性和优异性.

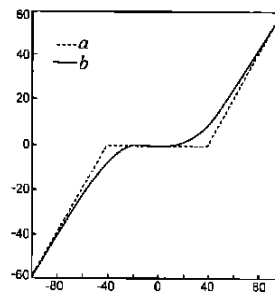


图 1 新旧阈值函数比较

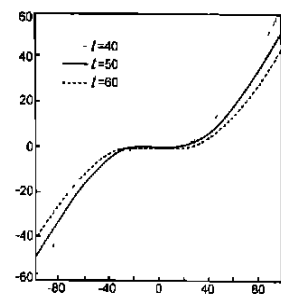


图 2 新阈值函数

2 小波阈值去噪

假设 $X = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}]^T$ 为含噪信号的观测值, 即:

$$x_i = s_i + n_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

s_i 是信号在 i 时刻的真实值, n_i 是独立分布的高斯白噪声 (i. i. d) $N(0, \sigma^2)$, 我们的目的就是根据观测值 X 找出信号 S 的估计值 \hat{s} , 使 \hat{s} 与 S 的最小均方误差 (MSE) 最小, 用均值取代数学期望可得:

$$(\hat{s}, S) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{s}_i - s_i)^2 \quad (2)$$

D.L. donoho 提出的小波阈值噪声消除方法在最小均方误差意义上是有效的并且可达到较好的视觉效果,它主要的理论依据为属于 Besov 空间的信号在小波域内其能量主要集中在有限的几个系数中,而噪声的能量却分布于整个小波域内,因此经小波分解后信号的系数要大于噪声的系数,因此采用阈值的办法可把信号系数保留,而使大部分噪声系数减少至零.此方法可按以下三个步骤实现:

(1)对观测信号 X 应用离散小波变换(DWT),得出各尺度小波系数 $cd_{jk} (j=1,2, \dots, J), J$ 为小波分解的尺度数.在这里需注意 ca_{0k} 是尺度函数系数,不参加阈值运算.

(2)应用非线性阈值函数(如软阈值函数: $s(x, t_j) = \text{sgn}(x) (|x - t_j|)_+$)处理各尺度小波系数,基于所选择的阈值 $t = [t_1, t_2, \dots, t_J]^T$ 得出各尺度小波系数的估值.

(3)在各尺度小波系数的基础上应用离散小波反变换(IDWT),得到信号 s 的估值 \hat{s} .

在上述方法中,小波变换和小波反变换的基常采用正交小波基,此时根据 Parseval 公式,可得:

$$(\hat{S}, S) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{s}_i - s_i)^2 + \frac{1}{N} \sum_{j,k} (cd_{j,k} - cd_{j,k})^2 \quad (3)$$

3 一种新的阈值函数

目前获得广泛应用的阈值函数是 D.L. Donoho 使用的软阈值函数,其表达式如下所示:

$$s(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| < t \\ \text{sgn}(x) (|x - t|), & |x| > t \end{cases} \quad (4)$$

图 1 中曲线 a 为此式的图形表示,可以看出它虽连续,但它的导数不连续,而在实际应用中,经常需要连续的一阶导数甚至高阶导数进行运算处理,因此此函数的应用具有一定的局限性,基于以上考虑,本文提出一种新的函数如下所示:

$$N(x, t) = x - t + \frac{2t}{1 + e^{2.1x/t}} \quad (5)$$

图 1 中曲线 b 为此函数的图形表达,图 2 为此函数分别对应不同 t 值时的曲线表达,从图形中可以看出本函数可实现与原软阈值函数相同的功能,即本函数也可起到阈值去噪的作用,同时由于本函数表达式简单且具有无穷阶连续导数,便于进行各种数学处理,因此与原函数相比具有明显的优越性和广阔的应用前景.本文把它应用于含噪信号的去噪过程中,基于 SURE 无偏估计,可实现自适应小波阈值去噪.

4 基于 SURE 无偏估计的自适应去噪

目前自适应滤波器去噪的算法中最常用的是最小均方误差算法,即 LMS 算法. LMS 算法的依据是最优化方法中的最速下降法,即下一时刻的阈值 $t(k+1)$ 应等于现时刻的阈值 $t(k)$ 加上一项比例于负的均方误差函数的梯度值 $t(k)$,即:

$$t(k+1) = t(k) - \mu \cdot t(k) \quad (6)$$

其中 μ 为步长, $t(k)$ 为:

$$t(k) = \frac{\partial g(k)}{\partial t(k)} \quad (7)$$

因此推导此算法的关键是求出 $t(k)$,可设一个关于观测值 X 的函数 $g(X)$,其表达式为:

$$g(X) = \hat{s}(X) - X \quad (8)$$

在这里, $\hat{s}(X)$ 为基于观测值 X 对信号 s 的估值,因此 $g(X)$ 属于从 R^N 到 R^N 的映射,且 $g(X)$ 可微,根据 SURE 无偏估计^[5]可得:

$$(\hat{S}, S) = E \hat{s}(X) - s^2 = N + E g(X)^2 + 2 \nabla_X \cdot g(X) \quad (9)$$

其中
$$\nabla_X \cdot g(X) = \sum_{i=0}^{N-1} (g_i / \partial x(i))$$

SURE 是上述均方误差的无偏估计^[5],表达式为:

$$(\hat{S}, S) = N + g(X)^2 + 2 \nabla_X \cdot g(X) \quad (10)$$

则,均方误差的梯度表达式为:

$$t(k) = \frac{\partial g(k)}{\partial t(k)} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \frac{\partial g_i}{\partial t(k)} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x(i) \partial t(k)} \quad (11)$$

由式(8)可得:

$$g_i = (t_k, x_i) - x_i$$

因此,

$$t(k) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \frac{\partial (t_k, x_i)}{\partial t(k)} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial^2 (t_k, x_i)}{\partial x(i) \partial t(k)} \quad (12)$$

此时如采用 Donoho 使用了分段函数软阈值函数做为阈值函数,由于其导数不连续,无法进行自适应迭代,因此只能根据观测值 $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ 选择软阈值 t^s ,^[1]

$$t^s = \arg \min_{t \in \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}} (\hat{S}, S) \quad (13)$$

从这里可以看出,由于 t^s 是基于有限序列 $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ 得出的软阈值,因此它不是最佳阈值.如果采用本文提出了的算法(见式(5)),它具有无穷阶连续导数,可基于式(12)进行自适应迭代运算动态寻求最佳阈值,由式(12)可得:

$$\frac{\partial g(i)}{\partial t(k)} = \frac{\partial N(t_k, x_i)}{\partial t(k)} = -1 + \frac{2}{1 + e^{2.1x(i)/t(k)}} + \frac{4.2x(i)e^{2.1x(i)/t(k)}}{t(k)(1 + e^{2.1x(i)/t(k)})^2} \quad (14)$$

和

$$\frac{\partial^2 g(i)}{\partial x(i) \partial t(k)} = \frac{\partial^2 N(t_k, x_i)}{\partial t(k) \partial x(i)} = \frac{8.82x(i)e^{2.1x(i)/t(k)}}{t^2(k)(1 + e^{2.1x(i)/t(k)})^2} - \frac{17.64x(i)e^{4.2x(i)/t(k)}}{t^3(k)(1 + e^{2.1x(i)/t(k)})^3} \quad (15)$$

把式(14)(15)带入式(12),再带入式(6)即可得出自适应迭代算法.

如采用正交小波基,则根据式(3)可把均方误差分解到小波系数的各个尺度中,再针对每一尺度的小波系数及其估值应用上述自适应迭代公式,则式(6)可用下式表达:

$$t_j(k+1) = t_j(k) - \mu_j t_j(k), \quad j=1,2, \dots, J \quad (16)$$

式中 t_j 为尺度为 j 时的小波系数阈值, μ_j 为尺度为 j 时自适应迭代步长, t_j 为根据尺度为 j 时小波系数及其估值的最小均方误差的梯度,即:

$$t_j(k) = \frac{\partial_j g(k)}{\partial t_j(k)} \quad (17)$$

这样就可求出每一尺度小波系数的最佳估值,其具体步骤如下:

(1)对观测信号 X 应用离散小波变换(DWT),得出各尺度小波系数 $cd_{jk} (j=1,2, \dots, J)$,其中 ca_{0k} 是尺度函数系数,不参加阈值运算.

(2) 引用本文提出的阈值函数处理各尺度小波系数,得到各尺度小波系数的估值,然后根据式(17)得出 $t_j(k)$,则 $t_j(k+1) = t_j(k) - u_j t_j(k)$.

(3) 用各尺度小波系数估值做离散小波反变换(IDWT),得到信号的估值 \hat{s} ,输出 \hat{s} .

(4) 采样下一次观测信号 X ,重复步骤(1) - (4).

5 仿真实验

在这个实验中我们采用 Donoho 所采用的四个典型信号(Blocks, Bumps, HeaviSine, Doppler)作为实验信号,数据总长度定为 2048 个,输入信噪比(SNR)为 7.采用 db8 作为小波基,小波分解的尺度数定为 6,在自适应迭代过程中阈值的初值 t_0 采用 D. L. Donoho 在软阈值算法中给出阈值^[1], $t_0 = \sqrt{2 \log n/n}$,收敛条件定为 $t(i)/t(i-1) < 1e-6$.图 3、图 4、图 5、图 6 分别为四种信号各自的实验结果,其输出信噪比分别提高到 25.7417, 27.8945, 30.2711, 26.3453.为便于比较,本文采用最小均方误差(MSE)作为判定标准,用几种文献中采用的方法和本文的方法进行比较,其结果如表一所示,其中 Original 为原始信号,WaveShrink 为 Donoho 提出的软阈值方法,但其阈值为全局阈值,SureShrink 为 Donoho 提出的软阈值方法,其阈值各尺度独立,ADPSure 采用本文提出的阈值函数,其阈值各尺度独立.

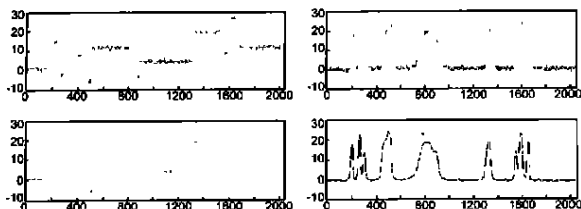


图 3 Blocks

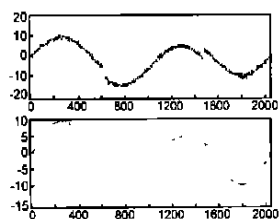


图 5 HeaviSine

图 4 Bumps

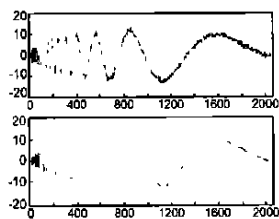


图 6 Doppler

从表 1 中可以看出,采用本文提出的阈值函数,其结果优于传统的软阈值方法,并且由于此函数具有无穷阶导数,因此为此方法的深入发展和广泛应用提供了可能.

表 1 几种算法的均方误差比较

	Blocks	Bumps	HeaviSine	Doppler
Original	0.9866	1.0038	1.0591	0.9669
WaveShrink	0.9080	1.0471	0.0952	0.3207
SureShrink	0.3366	0.2846	0.0612	0.1372
AdpShrink	0.2933	0.1088	0.0497	0.1168

6 结论

本文提出了一种新的阈值函数,基于它与原阈值函数在

功能上的相似性,本文用它取代了原阈值函数应用于小波阈值去噪的实现,而与原阈值函数(Donoho 提出的软阈值函数^[1])相比,此函数最大的优越性是克服了原函数的分段性及导数不连续的弱点,它具有连续的无穷阶导数,因此可以用自适应梯度下降法寻求最佳阈值,本文基于 SURE 无偏估计,给出了这种自适应算法,实验结果显示此算法优于其他文献中的阈值去噪的方法.另外,此函数优越的数学特性为它获得更广阔的应用前景提供了可能.

参考文献:

- [1] D L Donoho. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, May 1995, 41: 613 - 627.
- [2] D L Donoho, I M Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. J. Am. Stat. Assoc., 1995, 90: 1200 - 1224.
- [3] R R Coifman, D L Donoho. Translation Invariant de-Noiseing [M]. Tech. Rep., Dept. Statistics, Stanford Univ., 1995, to be published in Wavelets and Statistics, A. Antoniadis, Ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- [4] Xiao-Ping Zhang, M D Desai. Adaptive denoising based on SURE risk [J]. IEEE Signal Processing Letters, October 1998, 5: 265 - 267.
- [5] C Stain. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution [J]. Ann. Stat., 1981, 9: 1135 - 1151.
- [6] 潘泉,戴冠中,张洪才,张磊.基于阈值决策的子域去噪方法[J].电子学报,1998,26(1):115 - 117.
- [7] 李冲泥,胡光锐.一种改进的子域语音增强方法[J].通信学报,1999,20(4):88 - 91.
- [8] 梅文博, Lik-Kwan Shark. 分形信号估计的最佳子波门限方法[J].电子学报,1998,26(4):15 - 18.

作者简介:



曲天书 男,1971年6月生于吉林省长春市.1996年至1999年吉林工业大学通信电子专业获硕士学位,1999年至今吉林大学通信与电子专业博士研究生.主要从事微弱信号检测和信号处理方向的研究工作,发表论文4篇,获机械部科技进步二等奖一项.



戴逸松 男,1936年11月生于上海,卒于2001年.1961年至2001年在吉林工业大学电子工程系任教,为通信与信息系统博士生导师.主要从事电噪声计量和微弱信号检测方向的研究工作.出版专著4部,发表论文200余篇,获国家及部委奖励7项.

王树勋 男,1946年3月生于吉林省长春市.1970年毕业于清华大学电机系,1983年在吉林工业大学电子系获工学硕士学位,现任吉林大学通信与电气工程学院教授、博士生导师.主要研究方向为高维统计量在信号处理中的应用及微计算机应用.已出版著作3部,发表论文60余篇.