

# 三维涡流计算中最少变量数边界积分方程的一个注记

方蜀州,王泽毅

(清华大学计算机科学与技术系,北京 100084)

**摘 要:** 本文回顾了求解三维电磁场涡流问题的数值计算方法,其中最少变量数边界积分方程法(Boundary Integral Equations of Minimum Order Method)具有很多优点,但提出该方法的论文以及后续论文中的边界积分方程中存在一些错误,本文给出了边界积分方程的极限推导过程,改正了这些错误。

**关键词:** 三维;边界积分方程;互连线;寄生参数提取;大规模集成电路

**中图分类号:** TN4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2002)08-1114-03

## A Note of Boundary Integral Equations of Minimum Order for the Calculation of 3-D Eddy Current Problem

FANG Shu-zhou, WANG Ze-yi

(Dept. of Computer Science & Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The methods to solve 3-D eddy current problem are reviewed, and the boundary integral equations of minimum order shows many advantages among them. But its formulations in previous papers have some flaws. So, the limiting procedure to obtain the boundary integral equations (BIE) of minimum order is presented, and the errors in the previous equations are corrected.

**Key words:** 3-D; boundary integral equations; interconnects; parasitic parameter extraction; VLSI Circuits

### 1 引言

目前,在高速、高密度集成电路中,制约其速度提高的主要因素已不是器件的门延迟,而是互连寄生效应引起的时间延迟。随着工作频率的不断提高,互连电阻电感提取对高性能电路设计的重要性已引起广泛关注<sup>[1]</sup>。当前,三维寄生电阻电感提取方法有两大类,第一类是体积元法,主要有电路模型法<sup>[1]</sup>等,由于离散变量较多,难以模拟较完整的寄生电磁效应。第二类是边界元法<sup>[2]</sup>,属边界离散化方法,离散变量少,能模拟包括涡流在内的较完整电磁效应,具有模型精度高,离散化变量数目少等优点,正逐渐受到重视。求解电磁场三维涡流问题的数学模型有多种,本文指出最小阶边界积分方程法(Boundary Integral Equations of Minimum Order Method)<sup>[3]</sup>是目前涉及未知量最少的计算模型,可用于随频率变化电阻电感的提取,并有望应用于大规模集成电路的互连寄生效应分析。

早期计算涡流问题主要采用有限差分法<sup>[4,5]</sup>,或者体积积分方程法(Volume Integral Equation methods),后者分为模态解法(Modal Solution Method)<sup>[6]</sup>与耦合电路法(Coupled Circuit Method)<sup>[7]</sup>。后来有限元法被用于求解二维问题<sup>[8]</sup>,并可在小型计算机上求解相当复杂的二维涡流问题<sup>[9]</sup>。但是,这些方法都需离散整个求解区域,计算量较大。Fawzi 在七十年代初开始用边界积分方程表示和求解二维涡流问题<sup>[10]</sup>。在一系列经典论文中,该方法应用于二维横电波、横磁波与波导问题,后

来又应用于旋转对称的几何形体上<sup>[11]</sup>。

1978年,英国学者 Brebbia 采用边界元法涵盖此前的多种边界元积分方程解法<sup>[12]</sup>。近二十年来,由于输入数据的简单性、数值上的准确性以及几何上的很强适应性,边界元法得到包括涡流计算在内的广泛应用,取得大量重要进展<sup>[10,11,13~15]</sup>。除此以外,与有限元法相比,边界元法十分便于求解无限大边界问题,并具有大规模并行计算的潜力。

边界积分方程法可以分为直接与间接方法两类。直接方法以导体表面的电场强度与磁场强度作为积分方程中的未知函数。此类积分方程见于许多论文中<sup>[10,11,13~15]</sup>,几乎毫无例外地应用于二维问题。这些方法的优点是:若感兴趣的是导体表面的电磁场,则可直接得到而无须后处理。而对于三维问题,这类方法的缺点是,方程涉及六个未知的向量分量,离散化所得线性方程组的规模将会很大,从而给数值求解带来较大困难。

Mayergoz 于 1982 年提出一种间接边界积分方程法,使得三维涡流问题更便于计算。在他的论文<sup>[16]</sup>中,导体内的磁场强度用导体表面的虚拟电流密度向量表示,导体外的自由空间磁场强度用导体表面的虚拟磁荷密度标量表示。从而,三维涡流问题的边界积分方程仅包含四个未知分量。这一组边界积分方程称为最小阶边界积分方程(boundary integral equations of minimum order)。袁建生<sup>[3]</sup>进一步指出,导体表面的虚拟电

收稿日期:2001-08-06;修回日期:2002-05-13

基金项目:国家自然科学基金(No. 69876024)

流密度矢量可以简化为只包含两个切向分量,使未知分量的个数进一步减少到三个,仅为直接边界积分方程法的一半.因此,这是目前求解三维涡流问题所含未知量数目最少的算法.但是,在 Mayergoz 和后续研究的论文中,推导边界积分方程的极限过程被忽略了.本文将补充这部分内容,以改正原边界积分方程中的一些错误.

## 2 推导最少变量数边界积分方程

将整个求解空间分为一个不导电的充满空气的区域(可以无限大),以及若干导体区域.设每个区域的磁导率为常数,并忽略位移电流与自由电荷的影响.电磁场为时谐电磁场.在导体区域中任意一点  $Q$ , 磁场强度可以表示为<sup>[3,16,17]</sup>

$$H^+(Q) = \frac{1}{4} \nabla_Q \times \int_S K(M, Q) J(M) dS_M \quad (1)$$

$$K(M, Q) = e^{-(1+i)kR_{MQ}/R_{MQ}}, k = \sqrt{\mu/2}$$

其中  $i, \omega, \mu$  分别为虚数单位、角频率、电导率和磁导率.  $J(M)$  是该导体表面  $S$  上  $M$  点处的虚拟电流密度向量, 含有两个切向分量.  $R_{MQ}$  是点  $M$  与点  $Q$  之间的距离.

可以在文[17]中找到式(1)的证明.但点  $Q$  趋近  $S$  的极限过程推导被忽略了, 而这是得到边界积分方程的关键步骤, 下面给出详细推导过程.

将任意导电区域与一个具有很小半径、以  $S$  上的  $Q$  点为中心的球体作并运算, 得到一个组合形体. 该组合形体的表面可分为两部分:  $S$  和  $S_1$ .  $S$  是球体表面的一部分, 突出在导体表面上, 如图 1 所示.

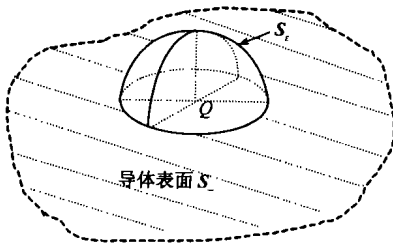


图 1 组合形体表面  $Q$  附近情况

假设导体表面  $S$  在  $Q$  点处是光滑的, 当  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $S$  将趋近半球表面.  $S_1$  是  $S$  被球体挖去一个洞形成的表面. 在组合形体中, 式(1)是成立的, 因为  $Q$  点位于内部. 当  $\epsilon \rightarrow 0$ , 组合形体及其表面将恢复为原始的导体形体及其表面. 那么, 导体表面上一点  $Q$  的磁场强度可以表示为

$$H^+(Q) = \frac{1}{4} \text{Limit}_0 \nabla_Q \times \int_S K(M, Q) J(M) dS_M - \frac{1}{4} \text{Limit}_0 \int_{S_1} J(M) \times \nabla_Q (K(M, Q)) dS_M \quad (2)$$

式(2)右端第二项可化为

$$\frac{1}{4} \int_S \text{Limit}_0 J(M) \times \left( \frac{Q_x - M_x}{R_{MQ}^3}, \frac{Q_y - M_y}{R_{MQ}^3}, \frac{Q_z - M_z}{R_{MQ}^3} \right) e^{-(1+i)kR_{MQ}} \cdot (1 + R_{MQ}k + iR_{MQ}k) dS_M = \frac{1}{4} \int_S J(Q) \times \text{Limit}_0 \left( \frac{Q_x - M_x}{3}, \frac{Q_y - M_y}{3}, \frac{Q_z - M_z}{3} \right) dS_M \quad (3)$$

将式(3)变换到球坐标系中, 其中  $Q$  取为原点,  $z$  方向取作导体表面  $S$  在  $Q$  点的外法向. 则式(3)成为

$$\frac{1}{4} J(Q) \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{Limit}_0 \left( \frac{\sin \theta \cos \phi}{3}, \frac{\sin \theta \sin \phi}{3}, \frac{\cos \theta}{3} \right)^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{4} J(Q) \times (0, 0, 1)$$

注意到矢量  $(0, 0, 1)$  是导体表面  $S$  在  $Q$  点的单位外法向矢量, 记作  $n(Q)$ . 式(2)变成

$$H^+(Q) = -\frac{1}{4} \int_S J(M) \times \nabla_Q K(M, Q) dS_M + \frac{1}{4} J(Q) \times n(Q), Q \in S \quad (4)$$

在非导电区域(自由空间)中, 任意一点  $Q$  处的磁场强度可以表示为<sup>[3,16,17]</sup>

$$H^-(Q) = -\frac{1}{4} \int_{S_{\text{all}}} m(M) \nabla_Q \left( \frac{1}{R_{MQ}} \right) dS_M \quad (5)$$

其中,  $S_{\text{all}}$  是所有导体表面的并集,  $m(M)$  是  $S_{\text{all}}$  上  $M$  点处的虚拟磁荷密度标量. 与推导式(4)类似, 导体表面  $S_{\text{all}}$  上任意一点  $Q$  处的磁场强度可以表示为

$$H^-(Q) = -\frac{1}{4} \int_{S_{\text{all}}} m(M) \nabla_Q \left( \frac{1}{R_{MQ}} \right) dS_M + \frac{1}{4} m(Q) n(Q), Q \in S_{\text{all}} \quad (6)$$

非导电区域中由已知电流密度产生的磁场强度记为  $H$ , 则式(4)与式(6)必须满足导体表面任意点  $Q$  处的如下边界条件

$$n(Q) \times [H^+(Q) - H^-(Q)] = n(Q) \times H(Q) \quad (7)$$

$$n(Q) \cdot [\mu H^+(Q) - \mu_0 H^-(Q)] = n(Q) \cdot \mu_0 H(Q) \quad (8)$$

其中  $\mu$  是导体磁导率,  $\mu_0$  是非导电区域磁导率. 将式(4)和(6)代入边界条件(7)和(8), 并考虑下面的矢量恒等式

$$n \times (J \times n) = J(n \cdot n) - n(n \cdot J) = J \quad (9)$$

$$n \cdot (J \times n) = 0 \quad (10)$$

$$n \times n = 0, n \cdot n = 1 \quad (11)$$

可得到如下完整的边界积分方程

$$-\frac{1}{4} J(Q) + \frac{1}{4} n(Q) \times \int_S J(M) \times \nabla_Q K(M, Q) dS_M - \frac{1}{4} n(Q) \times \int_{S_{\text{all}}} m(M) \nabla_Q \left( \frac{1}{R_{MQ}} \right) dS_M = -n(Q) \times H(Q) \quad (12)$$

$$\frac{1}{4} m(Q) + \frac{\mu}{4\mu_0} n(Q) \cdot \int_S J(M) \times \nabla_Q K(M, Q) dS_M - \frac{1}{4} n(Q) \cdot \int_{S_{\text{all}}} m(M) \nabla_Q \left( \frac{1}{R_{MQ}} \right) dS_M = -n(Q) \cdot H(Q) \quad (13)$$

与文[3,16,17]中的方程相比, 自由项  $J(Q)$  和  $m(Q)$  的系数应该是  $1/4$ , 而不是  $1/2$ .

## 3 结论

最少变量数边界积分方程法是目前得到的变量数最少, 可用于计算三维电磁场涡流问题的物理模型, 与边界元素法相结合, 将可能成为提取三维随频率变化电感与电阻的有效方法. 但原来的方程表达式中存在一些错误. 因为过去的文献中忽略了关键的极限推导过程, 使得这些错误很久没有得到纠正. 本文补充了这一部分内容, 并改正了这些错误, 使这一最为经济的计算方法在数学上更为准确.

## 参考文献:

- [ 1 ] M Kamon ,M J Tsuk ,J White FastHenry. A multipole accelerated 3-D Inductance Extraction Program [ J ]. IEEE Trans on MTT ,1994 ,42 ( 9 ) : 1750.
- [ 2 ] Junfeng Wang. A new surface integral formulation of EMQS impedance extraction for 3-D structures [ D ]. Massachusetts :Massachusetts Institute of Technology ,1999.
- [ 3 ] J S Yuan ,A Kost. A three-component boundary element algorithm for three-dimensional eddy current calculation [ J ]. IEEE Trans on Magnetics ,1994 ,30 ( 5 ) :3028 - 3031.
- [ 4 ] R L Stoll. Numerical method of calculating eddy currents in nonmagnetic conductors [ J ]. Proc. IEE ,1967 ,114 :775 - 780.
- [ 5 ] Chari M ,V K Silvester ,P P Finit. Elements in electric and magnetic field problems [ M ]. New York :Wiley ,1980.
- [ 6 ] Fawzi T H. Two-dimensional and quasi-two-dimensional induction problems [ D ]. Toronto :University of Toronto ,1973.
- [ 7 ] Fawzi T H ,Ali K F ,Burk P R. Boundary integral equations analysis of induction devices with rotational symmetry [ J ]. IEEE Trans Magnetics , 1983 ,19 :36 - 44.
- [ 8 ] Reichert K. A numerical method to calculate induction heating installations [ J ]. Elektrowaerme Int ,1968 ,26 :113 - 123.
- [ 9 ] Lowther D A ,Silvester P P. Computer-Aided Design in Magnetics [ M ]. New York :Springer-Verlag ,1986.
- [ 10 ] Silvester P P. The accurate calculation of skin effect in conductors of complicated shape [ J ]. IEEE Trans Power App & Syst ,1968 ,87 :735 - 742.
- [ 11 ] Dudley R P ,Chari M V K. The prediction of current distribution in induction heating installations [ J ]. IEEE Trans Ind Appl ,1972 ,8 :565 - 571.
- [ 12 ] Brebbia C A. The Boundary Element Method for Engineers [ M ]. Pentech Press ,1978.
- [ 13 ] Taher Anmed M. Application of the boundary element method and the impedance boundary condition to T-W and 2-D eddy current problems [ D ]. Toronto :University of Toronto ,1986.
- [ 14 ] Ramadan Ahmed M. A boundary element method for eddy current problems having rotational symmetry [ D ]. Toronto :University of Toronto , 1987.
- [ 15 ] Tsuboi H ,Misaki T. Three dimensional analysis of eddy current distributions by the boundary element method [ J ]. IEEE Trans Magnetics , 1987 ,23 :3044 - 3046.
- [ 16 ] I D Mayergoz. Boundary integral equations of minimum order for the calculation of three-dimensional eddy current problems [ J ]. IEEE Trans on Magnetics ,1982 ,18 ( 2 ) :536 - 539.
- [ 17 ] Kalaichelvan S. A boundary integral equation method for 3-dimensional eddy current problems [ D ]. Toronto :University of Toronto ,1987.

## 作者简介:



方蜀州 男,1968年6月出生于甘肃兰州,分别于1990年和1993年在北京理工大学飞行器工程系获得航空宇航推进理论与工程专业学士和硕士学位,1997年进入清华大学计算机科学与工程系攻读博士学位,研究领域涉及VLSI互连寄生参数提取模型与数值算法的研究。



王泽毅 男,1940年出生于香港,1965年毕业于西安交通大学计算数学专业,1987年~1988年作为访问学者在斯坦福大学从事3-D器件模拟并行算法研究,研究领域为VLSI互连寄生参数提取模型与数值算法的研究。