二维反射面天线上电磁波传播的辛几何方法

吴先良,唐 静,赵 瑾,陈东方,李世雄
(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室,安徽合肥 230039)

摘 要: 文中采用辛几何方法得到了二维反射天线上电磁波传播问题的解.通过引入与原物理向量数量相同的新向量,与原物理向量一起组成一个辛空间,把物理空间上的传播问题推广到辛空间进行求解,得到了更为精确的结果.

关键词: 辛几何理论; 渐近方法; 焦散区; 反射天线
中图分类号: TN80 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 09-1402-03

Study on Electromagnetic Wave Propagation in a Two-Dimension Reflector Antenna by Symplectic Geometrical Theory

Wu Xian-liang[1], TANG Jing[1], ZHAO Jin[1], CHEN Dong-fang[1], LI Shi-xiong[2]

(1. *Elec Eng&Info Sci Dept Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China*;
2. *Math Dept. Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China*)

Abstract: Solution on electromagnetic wave propagation in a two-dimensional reflector antenna by Symplectic Geometrical Theory has been gotten. At first, the new vectors having the same numbers with these original physical vectors are introduced. The new vectors combine with those original physical vectors to form a symplectic space. The propagating problem in the physical space is promoted to Langrange manifold in the symplectic space, with better result obtained.

Key words: symplectic geometrical theory; asymptotic method; caustic field; reflector antenna

1 引言

焦散区电磁波传播的计算是一个难题.目前,焦散区求解的传统方法有等效电磁流法(ECM)和物理绕射理论(PTD),但它们都有一定程度的不足之处.当几何光学(GO)变化区域与衍射射线重叠,或在几何光学射线的焦散区,ECM方法无法求解.同时,解的精度较差.PTD方法的问题是最后积分的计算比较困难,所以它的应用是有限的.因此,有必要研究焦散区电磁波传播的计算方法.

本文引入了与物理空间相同数量的波向量空间,由波动向量空间与物理空间组成辛空间,把物理空间的传播问题提升到辛空间上的Langrange流形[C].当Langrange流形投影到物理空间,出现了奇性.只要投影方向适当变化,奇性将消失.在这个方向,基本的高频渐近方法是有效的,然后通过Fourier逆变换把解从混合空间转换到物理空间.这样,用辛几何方法得到了二维圆形反射天线的解.通过与经典方法的比较得知,辛几何方法得到的解更为精确、有效.

2 二维圆形反射天线焦散区的辛几何描述

如图1所示,假设 R 是圆的半径,反射点的坐标是 $(R\cos\theta, R\sin\theta)$.射线函数如下:

$$(y - R\sin\theta)\cos2\theta - (x - R\cos\theta)\sin2\theta = 0 \quad (1)$$

对方程两边微分,得:

$$\begin{aligned} &-R\cos\theta\cos2\theta - 2(x - R\cos\theta)\cos2\theta \\ &-R\sin\theta\sin2\theta - 2(y - R\sin\theta)\sin2\theta = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

结合方程(1)和(2),得到焦散区射线函数,用图表示如下:

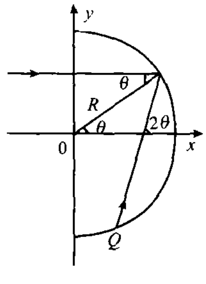

图1 入射线与反射线区

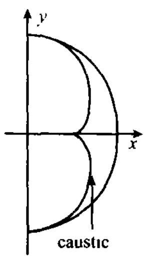

图2 圆形反射天线焦散

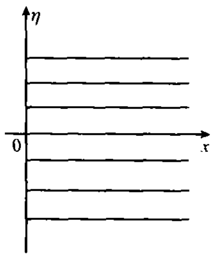

图3 空间(x,η)中的射线

3 二维圆形反射天线的解

考虑只有一次反射的二维圆形反射天线,电磁波动方程为:

收稿日期:2001-05-10;修回日期:2002-05-10
基金项目:国家自然科学基金(No.69971001);安徽省跨世纪学术带头人基金资助

$$\Delta^2 u + k^2 u = 0 \tag{3}$$

在空间(x,y),假设方程(3)的解的表达式为:

$$u(x,y,k) = a(x,y,k)\mathrm{e}^{-ik\phi(x,y)} \tag{4}$$

这里,$\phi(x,y)$是相位,$a(x,y,k)$是振幅.将相位按级数展开,带入方程(3)和(4),得到方程 Eikonal.首先,引入两个新的变量$\xi=\partial\phi/\partial x$和$\eta=\partial\phi/\partial y$,它们与原来的物理空间一起组成四维的辛空间$(x,y,\xi,\eta)$.

Hamilton 函数为:

$$H(x,z,\xi,\eta) = \frac{1}{2}[\xi^2+\eta^2-1].$$

辛空间的轨迹线方程为方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \xi} = \xi \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \xi} = \eta \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

初始条件为:

$$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,\ \xi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta}} = -\cos2\theta,$$

$$\eta = \frac{\partial\phi}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta}} = -\sin2\theta,\ \phi_0 = R\sin\theta.$$

$$\text{方程(5)的解为:}\begin{cases} x = R\cos\theta - t\cos2\theta \\ y = R\sin\theta - t\sin2\theta \\ \xi = -\cos2\theta \\ \eta = -\sin2\theta \end{cases} \tag{6}$$

相位为$\phi(x(\theta,t),y(\theta,t))$为:

$$\phi(x(\theta,t),y(\theta,t)) = \phi_0 + \int_0^t \frac{d\phi}{dt}dt = R\cos\theta + t \tag{7}$$

然后,解出振幅$a(x,y,k)$.当$k\to 0$,存在 GO 能量密度方程:

$$a(x,y,k)\sqrt{J(x,y)} = a(x,y,k)\bigg|_{\substack{x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta}}\sqrt{J(x,y)}\bigg|_{t=0}$$

$$= \sqrt{R\cos\theta} = \mathrm{Const} \tag{8}$$

这里,$J(x,y) = -2t + R\cos\theta$从方程(8)可知,

$$a_0(x,y) = a(x,y,k) = \sqrt{R\cos\theta}/\sqrt{J(x,y)}$$

$$= \sqrt{R\cos\theta}/\sqrt{|-2t+R\cos\theta|}.$$

因此,GO 解如下:

$$u(x(\theta,t),y(\theta,t),k) = a(x,y,k)\mathrm{e}^{-j\omega\phi(x,y)}$$

$$= \sqrt{R\cos\theta}/\sqrt{|-2t+R\cos\theta|}\,\mathrm{e}^{-ik(R\cos\theta+t)} \tag{9}$$

取$J(x,y)=0$,即$t=\frac{1}{2}R\cos\theta$,有振幅$a_0(x,y)\to\infty$.可见,这里出现了焦散现象,解(9)在焦散区无效.

4 二维园形反射天线的辛解

首先,把方程(4)进行 Fourier 变换,并把一些变量从空间(x,y)提升到辛空间(x,η),得到方程:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2(1-\eta^2)v = 0 \tag{10}$$

在空间(x,η)考虑方程(10),假设解为:

$$v(x,\eta,k) = b(x,\eta,k)\mathrm{e}^{-i\omega\psi(x,\eta)} \tag{11}$$

这里,$\psi(x,\eta)$是相位,$b(x,\eta,k)$是振幅.

引入两个新的变量$p=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$,$q=\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}$,于是 Hamilton 函数为:

$$H(x,\eta,p,q) = \frac{1}{2}[p^2+q^2-1] \tag{12}$$

辛空间(x,y,p,q)的迹线方程为:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta} = -\eta \end{cases} \tag{13}$$

其初始条件为:

$$x = x_0 = R\cos\theta,\ \eta = \eta_0 = -R\sin2\theta,$$

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ \eta=\eta_0}} = -\cos2\theta,\ q = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ \eta=\eta_0}} = -R\sin\theta$$

$$\text{方程(13)的解为:}\begin{cases} x = R\cos\theta - t\cos2\theta \\ \eta = -\sin2\theta \\ p = -\cos2\theta \\ q = -R\sin\theta + t\sin2\theta \end{cases} \tag{14}$$

通过 Legendre 变换,得到:

$$\psi(x(\theta,t),\eta(\theta,t)) = \phi(x,y(x,\eta)) - y(x,\eta)\eta$$

$$= R\cos\theta + t - (-\sin2\theta)g(R\sin\theta - t\sin2\theta) \tag{15}$$

然后,计算振幅$b(x,\eta,k)$当$k\to\infty$时,渐近解取第一项,即:$b(x,\eta,\omega)\approx b_0(x,\eta)$,从方程(8)可以知道:

$$b(x,\eta,k)\sqrt{J(x,\eta)} = \mathrm{Cont} = a(x,y,k)\sqrt{J(x,y)} = \sqrt{R\cos\theta} \tag{16}$$

这里,

$$J(x,y) = \left|\frac{\partial(x,\eta)}{\partial(\theta,t)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\eta}{\partial t} \end{vmatrix} = -2\cos^2 2\theta \tag{17}$$

于是

$$b_0(x(\theta,t),\eta(\theta,t)) = b(x(\theta,t),\eta(\theta,t),k)$$

$$= \sqrt{R\cos\theta/2\cos^2 2\theta} \tag{18}$$

因此有:

$$v(x(\theta,t),\eta(\theta,t),k) = b_0(x(\theta,t),\eta(\theta,t))\mathrm{e}^{-ik\psi(x,y)}$$

$$= \sqrt{R\cos\theta/2\cos^2 2\theta}\,\mathrm{e}^{-ik(R\cos\theta(1+2\sin^2\theta)+t\cos^2 2\theta)} \tag{19}$$

用 Fourier 逆变换将空间(x,η)上的解$v(x(\theta,t),\eta(\theta,t),k)$变换到物理空间$(x,y)$中的解$u(x,y,k)$:

$$u(x,y,k) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}\sqrt{R\cos\theta/2\cos^2 2\theta}$$

$$\cdot g\mathrm{e}^{-ik(R\cos\theta(1+2\sin^2\theta)+t\cos^2 2\theta)}\mathrm{e}^{iky\eta}d\eta \tag{20}$$

方程(20)是隐函数的积分,能用稳相点方法计算.当存在二阶或三阶稳相点时,需要对稳相点方法进行改进.

首先，从 $\frac{\partial}{\partial\eta}(\psi(x,\eta)+\eta y)=0$ 得到稳相点 $y=R\sin\theta-t\sin2\theta$，这就是方程(6)的第二个方程，说明了稳相点在 Lanrange 流形上.

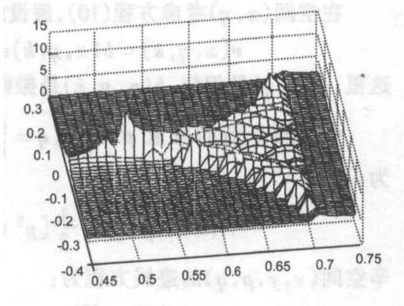

图 4 二维圆形反射天线计算结果

对于二阶稳相点，即当 $\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{R\cos\theta-2t}{2\cos^2 2\theta}=0$，且 $\theta\neq0$，$\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\neq0$ 时，应该用如下改进的二阶稳相点方法：

$$I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}a(x)^{i\omega\varphi(x)}dx$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\omega\varphi'''(x_0)}\right)^{\frac{1}{3}}e^{i\omega\varphi(x_0)}ga_0(x)+O\left(\frac{1}{\omega^{2/3}}\right) \quad (21)$$

$I(\omega)$ 可以通过数值计算得到. 把方程(21)带入方程(20)，即得到辛高频渐近解.

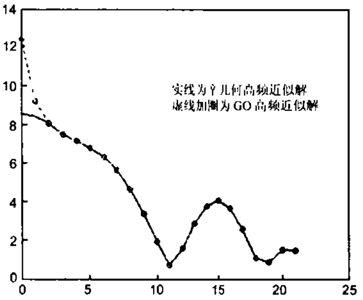

图 5 沿 X 轴方向 GO 解与辛解比较

从图 5 可以看出，沿 X 轴方向 GO 解在焦散区接近无穷大，而辛几何解仍然是有效的. 在远离焦散区的地方，GO 解与辛解是一致的. 这证明了辛几何解的正确性，而且它克服了传统方法的缺点，在解决焦散区的问题时，是一个值得深入研究的方法.

参考文献：

[1] 李世雄. 高频近似与辛几何[M]. 北京：北京科学出版社，1999.

[2] Gorman, A D, Aderson S P, Mohinda R B. On Caustic related to several common indices of refraction [J]. Radio Science, 1986, 21(3): 434 – 436.

[3] Ziolkowski R W, Deschamps G A. Asymptotic evaluation of high-frequency field near a caustic: An introduce to Maslov's method [J]. Radio Sci, 1984, 19(4).

[4] Thomson C J, Champan C H. An introduce to maslov's asymptotic method Geophys [J]. J R Astr Sci, 1985, 83: 143 – 168.

[5] Kohei Hongo, Hirokazu Kobayashi. Radiation characteristics of a plane-convex lens antenna, Radio Science [J], 1996, 31(5): 1025 – 1035.

作者简介：

吴先良 男，1955 年出生于安徽，1982 年毕业于安徽大学电子工程与信息科学系，现为安徽大学计算机科学与信息工程学院教授，中国电子学会高级会员，主要从事电磁散射、电磁理论和数值方法研究工作，出版专著两部，发表论文 40 余篇.