

# 广义 Battle-Lemari é子波

袁 晓<sup>1,2</sup>,陶青川<sup>1</sup>,何小海<sup>1</sup>

(1. 四川大学电子信息学院,四川成都 610064;2. 空军工程大学航空电子工程系,陕西西安 710038)

**摘 要:** 从 Haar 尺度函数入手,提出尺度系数函数概念,引入时移因子,将 Battle-Lemari é子波基拓展而构造出广义 Battle-Lemari é多分辨分析基.然后从理论上论证这种拓展的合理性与广义 Battle-Lemari é基的一些基本性质.研究结果表明:所有广义 Battle-Lemari é基继承了(原始)Battle-Lemari é基的许多优点,比如标准正交性,时、频局域化特征和指数衰减性等,同时还得到一系列新的对称基,广义 Battle-Lemari é基的正则性优于相应的(原始)Battle-Lemari é基.

**关键词:** 子波构造;尺度系数函数; Haar 尺度桥;时移因子;标准正交性

**中图分类号:** TP911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 02-0271-05

## The Generalized Battle-Lemari é Wavelets

YUAN Xiao<sup>1,2</sup>,TAO Qing-chuan<sup>1</sup>,HE Xiao-hai<sup>1</sup>

(1. College of Electronic Information, Sichuan Univ., Chengdu, Sichuan 610064, China;

2. Dept. of Aeronautical Electronic Eng., The Air Force Univ. of Eng., Xi'an, Shaanxi 710038, China)

**Abstract:** Starting with investigating the Haar scaling function, the scaling coefficient function is first presented. Then the Battle-Lemari é basis is extended to the generalized Battle-Lemari é basis by introducing time-shift factor to the scaling coefficient function of the Battle-Lemari é. The rationality of the extending method, which is used in this paper, is theoretically proved. Some basic properties of the generalized Battle-Lemari é basis are also discussed. Our research results show that all the Battle-Lemari é bases inherit many good properties of the original Battle-Lemari é bases, such as orthonormality, time frequency localization, exponential decay and so on. Meanwhile a series of neoteric symmetric multiresolution analysis basis are generated. The generalized Battle-Lemari é wavelets are better than the corresponding original Battle-Lemari é wavelets in regularity.

**Key words:** construction of wavelet; scaling coefficient function; the Haar scaling bridge; time-shift factor; orthonormality

### 1 引言

纵观子波发展史,子波构造始终是子波理论和应用研究进程中的一条主线,也是子波研究的难点<sup>[1~9]</sup>.从不同的角度和方法出发,既能设计出不同性能的子波,也能得到相同的子波.随着基本理论的日益完善,应用的广泛深入,具有良好综合性能指标的子波系统设计和“面向对象”的自适应子波方法成为当前子波研究的热点<sup>[4~9]</sup>,与之同时,人们力图寻找构造子波的统一方法和通用的评价标准来衡量各种各样的母波函数性能.

Battle-Lemari é(简记为 BL)子波是早期的经典标准正交子波族之一,它们是由 Battle 和 Lemari é使用不同方法各自独立构造的<sup>[1~3]</sup>.BL 基的优点是它们具有某种对称性(即线性相位),且是指数衰减的,因此得到广泛应用.本文从 Haar 尺度函数(即零阶 BL 尺度函数)入手,提出尺度系统函数概念,并引入时移因子,将 BL 基拓展而构造出广义 BL 子波.

### 2 Battle-Lemari é子波

$m$  阶基数 B-样条函数  $N_m$  在时域和频域均具有简明的显

式公式,因此它在尺度函数和子波的构造方面具有许多独特优势.一般情况下, $m$  阶基数 B-样条函数的频域形式为

$$N_m(\omega) = \left[ \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right]^{m+1} e^{-i\omega/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

式中,当  $m$  为奇数时,  $N_m(\omega)$  关于  $\omega = 0$  对称,当  $m$  为偶数时,  $N_m(\omega)$  关于  $\omega = \pi/2$  对称.

除  $N_0(\omega)$ ,即零阶基数 B-样条函数——Haar 尺度函数以外,  $\{N_m(\omega - k\pi/2) : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  均不是规范正交的.应用正交化技巧<sup>[1~3]</sup>作用于  $N_m(\omega)$  就得到(正交的)BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(\omega)$ ,对应的滤波函数为

$$H_{BL,m}(\omega) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{2^m(\omega)}{2^m(2-\omega)}} e^{-i\omega/2} = \sum_k h_k e^{-ik\omega} \quad (2)$$

式中  $h_k = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{2^m(\omega)}{2^m(2-\omega)}} e^{-ik\omega}$ ,  $h_k(k \in \mathbb{Z})$  是  $H_{BL,m}(\omega)$  的 Fourier 级数系数,通常称为  $\phi_{BL,m}$  的尺度滤波器  $h_{BL,m} = \{h_k : k \in \mathbb{Z}\}$  系数,或面具(mask)<sup>[1~3]</sup>.

对于低阶情况,滤波函数  $H_{BL,m}(\omega)$  具有简明的解析表达式:

$$H_{BL,0}(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i\omega} = \cos \frac{\omega}{2} \cdot e^{-i\omega/2} = H_{Haar}(\omega) \quad (3a)$$

$$H_{BL,1}(\omega) = \cos^2 \frac{\omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cos^2 \omega/2}{1+2\cos^2 \omega}} \quad (3b)$$

$$H_{BL,2}(\omega) = \cos^3 \frac{\omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{16+13\cos^2 \omega + \cos^4 \omega}{16+13\cos^2 \omega + \cos^4 \omega}} \cdot e^{-i\omega/2} \quad (3c)$$

.....

### 3 广义 Haar 尺度函数

为了阐明广义 BL 基的构造,我们从最简单的 Haar 尺度函数入手. Haar 尺度滤波器  $h_{Haar}$  的系数很容易由其滤波函数  $H_{Haar}(\omega)$  的 Fourier 级数系数(见式(3a))得到,也可通过如下方法得到.

#### 3.1 Haar 尺度系数函数

$H_{Haar}(\omega)$  是 2 周期的,令

$$h_{Haar}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) H_{Haar}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i\omega/2}, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \quad (4)$$

(式中  $\text{rect}(t/W)$  是宽度为  $W$ , 中心在原点的矩形函数)其 Fourier 滤波器反变换为

$$H_{Haar}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin t}{t} + \frac{\sin(t-1)}{(t-1)} \right] \quad (5)$$

则  $h_{Haar}(t)$  的整数点位,即  $t = k, k \in \mathbb{Z}$  的抽样序列就是 Haar 尺度滤波器  $h_{Haar}$  的系数序列,即有

$$h_{Haar} : h_k = h_{Haar}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, 1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases} \quad (6)$$

因此本文称由式(5)给出的  $h_{Haar}(t)$  为 Haar 尺度系数函数,显然  $h_{Haar}(t)$  关于  $t = 1/2$  偶对称且是快速衰减的:

$$h_{Haar}(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(t-1)}{t(t-1)} = O\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \quad (7)$$

#### 3.2 时移因子与 Haar 尺度桥

在式(6)中,我们是对 Haar 尺度系数函数  $h_{Haar}(t)$  的整数点位进行抽样而得到 Haar 尺度系数序列  $h_{Haar}$ , 抽样步距  $\Delta t = 1$ , 由式(4)定义的  $h_{Haar}(t)$  是紧支的,其支撑区间为  $[-1, 1]$ , 根据 Nyquist 抽样定理,同样我们也能以相同的抽样步距  $\Delta t = 1$  对  $h_{Haar}(t)$  的非整数点位( $t = k + \tau, k \in \mathbb{Z}$ )进行抽样. 引入一个时移因子  $e^{-i\omega\tau} \in \mathbb{R}$  作用于 Haar 尺度系数函数,即得  $h_{Haar}(t - \tau)$ , 然后对其整数点位抽样,从而得到依赖于时移因子  $\tau$  的一类新的时间序列

$$h_{Haar}(t; \tau) : h_k = h_{Haar}(k - \tau) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (8)$$

容易验证,这是一类正交的尺度系数序列,它是 Haar 尺度系数的拓展,因此本文称之为广义 Haar 尺度系数序列,对应的尺度函数  $\phi_{Haar}(t)$  和子波  $\psi_{Haar}(t)$  分别称为广义 Haar 尺度函数和广义 Haar 子波,它们共同构成广义 Haar 基.

由  $h_{Haar}(t)$  的速降性知  $h_{Haar}(t; \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  也是快速衰减的.

当  $\tau = l/2, l \in \mathbb{Z}$  时,  $h_{Haar}(t; \tau)$  是对称的,具有线性相位,否则,  $h_{Haar}(t; \tau)$  是非对称的;  $h_{Haar}(t; \tau)$  的对称性关于时移因子是周期的,其周期为 1. 下面我们只讨论  $\tau \in [-0.5, 0.5]$  的情形.

随着时移因子  $\tau$  由 -0.5 到 0.5 逐步增加,广义 Haar 尺度函数  $\phi_{Haar}(t)$  的变化趋势如图 1 所示. 当  $\tau = 0$  对应于 Haar 尺度函数  $\phi_{Haar}(t)$ . 从该图看出,随着  $|\tau|$  由 0 到 0.5 的逐步增加,  $\phi_{Haar}(t)$  的光滑性(或正则性)逐渐增强.

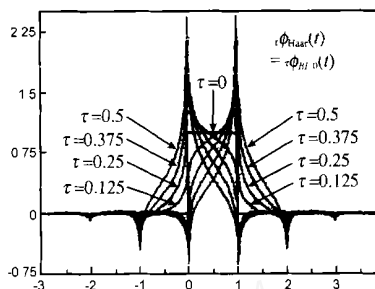


图 1 Haar 尺度桥

### 4 广义 Battle-Lemarié 基构造与性质

#### 4.1 构造方法

将上节构造广义 Haar 基的方法推广到 BL 基. 令

$$h_{BL,m}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot H_{BL,m}(\omega) = \begin{cases} H_{BL,m}(\omega), & |\omega| \leq 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases} \quad m = N = 1, 2, \dots \quad (9)$$

其 Fourier 反变换  $h_{BL,m}(t)$  称为  $m$  阶 BL 尺度系数函数,则  $h_{BL,m}(t)$  的整数点位,即  $t = k, k \in \mathbb{Z}$  的抽样序列就是  $m$  阶 BL 尺度滤波器  $h_{BL,m}$  的系数序列,即有

$$h_{BL,m} : h_k = h_{BL,m}(k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = N \quad (10)$$

引入时移因子  $e^{-i\omega\tau}$  就得到广义  $m$  阶 BL 尺度系数序列

$$h_{BL,m}(t; \tau) : h_k = h_{BL,m}(k - \tau) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (11)$$

对应的子波系数序列  $g_{BL,m}(t)$  为

$$g_{BL,m}(t) : g_k = (-1)^{k-1} h_{1-k} = (-1)^{k-1} h_{BL,m}(1 - k - \tau) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (12)$$

由此二序列就可构造出广义  $m$  阶 BL 基.

可见 BL 基是广义 BL 基中的特例,此时对应于时移因子  $\tau$  为整数的情形. 下面讨论上述拓展的合理性及广义 BL 基的一些性质.

#### 4.2 理论基础

**定理 1** 广义 BL 尺度系数序列  $h_{BL,m}(\omega) : \{h_k = h_{BL,m}(k - \tau); m = N, k \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{R}\}$  对应的滤波函数为

$$H_{BL,m}(\omega; \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{BL,m}(k - \tau) \cdot e^{-i(k - \tau)\omega} \quad (13)$$

$$= h_{BL,m}(\omega) \exp\left[-i\omega\tau + i2 \text{sgn}(\omega) \int \left(\frac{1-t}{2}\right) dt\right] \quad (14)$$

(式中  $\text{sgn}(\cdot)$  是符号函数,  $\int(\cdot)$  表示下取整).

**证明** 将  $h_k = h_{BL,m}(k - \tau) = \frac{1}{2} \sum_{R} h_{BL,m}(k) e^{i(k - \tau)\omega}$  代入  $H_{BL,m}(\omega; \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$ , 再利用 Poisson 求和公式有

$$H_{BL,m}(\omega; \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{BL,m}(k - \tau) \cdot e^{-i(k - \tau)\omega}$$

直接对时间序列  $h_{BL,m}(i - \tau) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t - k)$  进行 Fourier 变换也能得到式(13).

将式(19)代入式(13)并利用  $H_{BL,m}(\cdot)$  的周期性有

$$\begin{aligned}
 H_{BL,m}(\cdot) &= \text{rect}\left(\frac{-2k}{2}\right) H_{BL,m}(\cdot - 2k) \cdot e^{-i(\cdot - 2k)} \\
 &= H_{BL,m}(\cdot) \cdot e^{-i\cdot} \text{rect}\left(\frac{-2k}{2}\right) \cdot e^{i2k} \quad (15)
 \end{aligned}$$

当  $|\cdot - 2k| < 1, k \in \mathbb{Z}$  时,  $\text{rect}\left(\frac{-2k}{2}\right) \cdot e^{i2k} = \exp(i2k)$ , 因而有

$$\text{rect}\left(\frac{-2k}{2}\right) \cdot e^{i2k} = \exp(i2 \text{sgn}(\cdot) \text{int}\left(\frac{|\cdot|+1}{2}\right))$$

将上式代入式(15)则得式(14), 定理 1 获证.

由定理 1 (式(14)) 知, 时移因子  $\tau$  只对滤波函数  $H_{BL,m}(\cdot)$  的相位  $m$  起作用, 而与其幅度  $A_m$  无关, 即有

$$H_{BL,m}(\cdot; \tau) = A_m(\cdot) \exp(i m(\cdot, \tau)) \quad (16)$$

综合式(2)、(13)和(14)得

$$\begin{cases} A_m(\cdot) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{2m(\cdot)}{2m(2)}}, & m \in \mathbb{N} \\ m(\cdot, \tau) = -\left(\frac{|\cdot|}{2} + \tau\right) + 2 \text{sgn}(\cdot) \text{int}\left(\frac{|\cdot|+1}{2}\right), & m \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (17)$$

(式中  $\text{int}$  意义与式(1)中相同). 这表明: 广义 BL 尺度系数序列  $h_{BL,m}(\cdot)$  与 BL 尺度系数序列  $h_{BL,m} = h_{BL,m}(0)$  具有相同的幅度谱  $A_m(\cdot)$ ; 其相位  $m$  与时移因子  $\tau$  成线性关系, 并有

$$m(\cdot, \tau) = -\frac{|\cdot|}{2} + \tau \quad [-1, 1] \quad (18)$$

对于广义 Haar 尺度系数序列  $h_{Haar}(\cdot) = h_{BL,0}(\cdot)$  则有

$$\begin{cases} A_0(\cdot) = |\cos \frac{\cdot}{2}| \\ m(\cdot, \tau) = -\left(\frac{|\cdot|}{2} + \tau\right) \end{cases} \quad [-1, 1]$$

**推论 1**  $|H_{BL,m}(\cdot; \tau)|^2 + |H_{BL,m}(\cdot + 2; \tau)|^2 = |A(\cdot)|^2 + |A(\cdot + 2)|^2 = 1$ .

**推论 2** 对于所有广义 BL 尺度系数序列  $h_{BL,m}(\cdot), m \in \mathbb{N}, \mathbb{R}$  有

$$h_k = 1 \quad (20a)$$

$$(-1)^k h_k = 1 \quad (20b)$$

**证明** 由式(9)有  $h_{BL,m}(k) = h_{BL,m}(\cdot)(k)$ , 则

$$h_k = H_{BL,m}(0; \tau) = h_{BL,m}(2k) e^{-i2k} = h_{BL,m}(2k) e^{-i2k} = 1;$$

$$(-1)^k h_k = H_{BL,m}(\cdot; \tau) = h_{BL,m}((2k-1)) e^{-i(2k-1)} = 0$$

推论 2 证毕

推论 2 说明对于所有广义 BL 尺度系数序列  $h_{BL,m}(\cdot), m \in \mathbb{N}, \mathbb{R}$  来说, 其相应的尺度和子波函数均具有一定程度的光滑性, 即满足正则性的两个基本条件<sup>[1,2,10]</sup>.

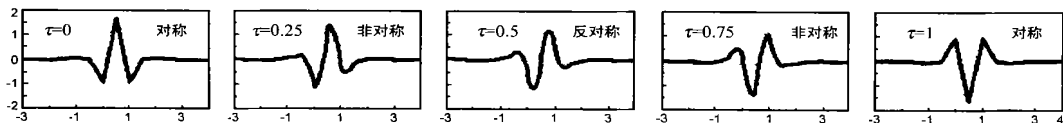


图 4 广义一阶 Battle-Lemari é子波函数  $h_{BL,1}(t)$  的时域波形

**定理 2** 广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  的 Fourier 变换为

$$\begin{cases} \phi_{BL,m}(\cdot) = \phi_{BL,m}(\cdot) e^{-i\cdot} \wedge(\cdot) \\ \wedge(\cdot) = \exp\left[i2 \text{sgn}(\cdot) \cdot \text{int}\left(\frac{|\cdot|+1}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (21)$$

**证明** 将式(14)代入双尺度方程

$$\phi_{BL,m}(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} H_{BL,m}(\cdot/2^j; \tau) \quad (22)$$

就可得到式(21), 定理 2 获证.

上述论证说明式(22)在点态意义下定义出连续函数  $\phi_{BL,m}(\cdot)$ , 且具有分段线性相位特性.

**推论 3** 所有广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  使  $\{\phi_{BL,m}(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是标准正交的.

**证明** 根据定理 2, 立即可有

$$(\cdot) = \int_{k \in \mathbb{Z}} |\phi_{BL,m}(\cdot + 2k)|^2 = \int_{k \in \mathbb{Z}} |\phi_{BL,m}(\cdot + 2k)|^2 = 1$$

推论 3 得证.

由以上的理论分析可得知, 本文引入时移因子  $\tau$  对 BL 基的拓展是合理的, 所构造出的广义 BL 基是正则的和标准正交的.

### 4.3 一些基本性质

**对称性** BL 基(任意阶)的一大优点是它们具有某种对称性, 广义 BL 基(当然包括尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  与子波函数  $h_{BL,m}(t)$ )的对称性是由广义 BL 尺度系数函数  $h_{BL,m}(\cdot)$  的对称性和时移因子  $\tau$  共同决定, 即完全由序列  $h_{BL,m}(\cdot)$  的对称性所确定.

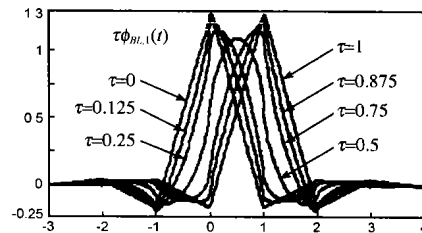


图 2 广义一阶 Battle-Lemari é尺度函数  $\phi_{BL,1}(t)$

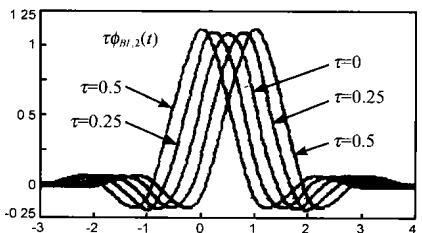


图 3 广义二阶 Battle-Lemari é尺度函数  $\phi_{BL,2}(t)$

当  $m=1$  和 2 时, 一阶广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,1}(t)$  和二阶

广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  的对称性随  $l$  的变化趋势分别如图 2 和图 3 所示,分析图 1、图 2 和图 3 可知,广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  的对称性随  $l$  呈周期性变化,周期为 1. 同样广义 BL 子波函数  $\psi_{BL,m}(t)$  的对称性也存在同样的周期性,图 4 给出了部分一阶广义 BL 子波函数  $\psi_{BL,1}(t)$  的时域波形.

关于广义 BL 基的对称性有如下结论:

(1) 当  $l = 1, l \in \mathbb{Z}$  时,对应于 BL 基情形. 尺度系数序列  $h_{BL,m}(l)$  关于  $k = l + 1/2$  (意义与式(1)中相同)对称;相对应的 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  关于  $t = l + 1/2$  对称;而子波函数  $\psi_{BL,m}(t)$  的对称性还与阶数  $m$  有关. 当  $m$  为偶数时,  $\psi_{BL,m}(t)$  关于  $t = l + 1/2$  反对称,即奇对称;当  $m$  为奇数时,  $\psi_{BL,m}(t)$  关于  $t = l$  (偶)对称.

(2) 当  $l = l + 1/2, l \in \mathbb{Z}$ , 即半整数点时,序列  $h_{BL,m}(l + 1/2)$  关于  $k = l + 1/2 - 1/2$  对称;  $\phi_{BL,m}(t)$  关于  $t = l + 1/2 - 1/2$  对称;当  $m$  为偶数时,  $\psi_{BL,m}(t)$  关于  $t = l + 1/2$  (偶)对称;当  $m$  为奇数时,  $\psi_{BL,m}(t)$  关于  $t = l$  反对称.

(3) 当  $l \in \mathbb{Z}$  时,序列  $h_{BL,m}(l)$  非对称,但具有线性相位特性(见定理 1),此时对应的  $\phi_{BL,m}(t)$  和  $\psi_{BL,m}(t)$  也是非对称的,但其相位是分段线性的(见定理 2).

可见正是引入了时移因子  $\tau$  这一奇特的控制参变量,使我们构造出丰富多彩的尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  和子波函数  $\psi_{BL,m}(t)$ ,从而大大地拓展了 BL 基,得到许许多多新的正交多分辨分析基.

正则性 函数的正则性也即函数的光滑性, BL 基是分段  $(m - 1)$  次多项式,在其节点  $(m - 1)$  次连续可导,  $\phi_{BL,m}(t)$ ,  $\psi_{BL,m}(t) \in C^{m-1}$ , 其 Hölder 正则性指标  $^{[1-3,10]}$   $m = m$ .

分析图 1~4 可知,广义 BL 基的正则性与时移因子  $\tau$  明显相关,即  $m = m(\tau)$ , 显然有

$$m(l) = m(l - \tau) \quad l \in \mathbb{Z} \quad (23)$$

这正好对应于(原始的) BL 基情形. 由尺度系数序列  $h_{BL,m}(l)$  的周期性,必然导致  $m(\tau)$  具有相同的周期,其周期为 1, 即有

$$m(\tau + 1) = m(\tau) \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (24)$$

从图 1~4 的时域波形可直观看出,  $\tau = l + 1/2, l \in \mathbb{Z}$  时的低阶广义 BL 基的正则性明显好于同阶 BL 基的正则性.

由定理 2 有

$$\phi_{BL,m}(t) = [\phi_{BL,m}(t - \tau)] = \phi_{BL,m}(t - \tau) * \delta(t) \quad (25)$$

而  $\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{BL,m}(t) dt = 1$ ,  $\hat{\phi}(\omega)$  是低通滤波器, 上式右边的(卷积)算子  $\delta(t)$  对信号(或函数)  $\phi_{BL,m}(t - \tau)$  具有磨光作用,因此必有  $m(\tau) = m$ .

另一方面,  $|\hat{\phi}(\omega)| = 1$ , 这说明  $\hat{\phi}(\omega)$  又是全通的, 对  $\phi_{BL,m}$  的磨光作用较弱,不可能提升其 Hölder 正则性阶数. 因为增加 Hölder 正则性阶数要求  $\hat{\phi}(\omega)$  必须是带通的. 所以  $m(\tau) < m + 1$ .

定理 3 对所有广义 BL 基有

$$m(\tau) < m + 1, m \in \mathbb{N}^+, \tau \in \mathbb{R} \quad (26)$$

该定理表明,广义 BL 基的正则性(也即光滑度)优于(原始) BL 基.

式(25)中的算子  $\delta(t)$  我们可称为磨光算子,对应的卷积函数  $\delta(t)$  称为磨光函数. 从数值上准确估计正则性指标  $m(\tau)$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  在技术上是不易的<sup>[2,10]</sup>,关于该问题我们将另文探讨.

衰减性和局域化特征 BL 基的另一优点是尽管它们支撑无限,但却是指衰减的<sup>[1-3]</sup>,即存在  $\alpha > 0$ ,使得尺度函数  $|\phi_{BL,m}(t)| \leq C e^{-\alpha|t|}, \forall t$ . 其它广义 BL 基的衰减性如何呢?

直接从理论上论证广义 BL 基的衰减性十分困难,由式(17)知,广义 BL 基与(原始) BL 基具有相同的幅度谱,因而它们的频率局域化特征完全一致,而与时移因子  $\tau$  无关,完全由其阶数  $m$  确定,现在我们来探讨广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  的时间局域化特征,除  $\tau = l, l \in \mathbb{Z}$  以外,  $\hat{\phi}(\omega) = 1, \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_{BL,m}(t) = \delta(t)$ , 因而根据卷积性质,式(26)中的算子  $\delta(t)$  必然展宽  $\phi_{BL,m}(t - \tau)$ , 从而使  $\phi_{BL,m}(t)$  的时间局域化特征似乎有所变差(这一点从图 1 中广义 Haar 尺度函数的时域波形可以明显看出),但这只是表现现象,在理论上

定理 4 广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  的时间局域特征与时移因子  $\tau$  无关,完全由其阶数  $m$  确定.

证明 函数或信号  $s(t)$  的时间局域化特征通常用时间标准偏差  $\sigma_t$  来刻画<sup>[1-3,11,12]</sup>:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 |s(t)|^2 dt = t^2 - \tau^2 \quad (27)$$

对于  $\phi_{BL,m}$ , 除  $\tau = l, l \in \mathbb{Z}$  以外,在时域不可能写出显式形式,但它们在频域却由式(21)显式给出,因此  $\phi_{BL,m}(t)$  的平均时间

$$\begin{aligned} t_o &= \tau = \int_{-\infty}^{\infty} t |\phi_{BL,m}(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_{BL,m}^*(\omega) (i \frac{d}{d\omega}) (\frac{1}{2} \phi_{BL,m}(\omega)) d\omega \\ &= \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{BL,m}^*(\omega) \phi_{BL,m}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{BL,m}(\omega)|^2 d\omega \\ &\quad / (2) |d\omega| + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{BL,m}(\omega)|^2 \omega^2 d\omega \end{aligned}$$

上式第一项即为  $\phi_{BL,m}(t)$  的平均时间:  $\tau/2$ ; 第二项中的积分是  $\phi_{BL,m}$  的能量,其值为 1; 在第三项中

$$\omega^2 = \sum_{j=1}^l (j - 2)^2 + \sum_{j=1}^l (j + 2)^2$$

而  $\phi_{BL,m}(2j) = \phi_{BL,m}(j)$ , 因此第三项的值为零,从而得

$$t_o = \frac{\tau}{2} + \sigma_t^2 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \phi_{BL,m}(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{BL,m}(\omega) - i \phi_{BL,m}'(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\omega} \phi_{BL,m}(\omega) + i \left(\frac{\tau}{2} + \tau\right) \phi_{BL,m}(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\omega} \phi_{BL,m}(\omega) \right|^2 d\omega + \left(\frac{\tau}{2} + \tau\right)^2 \end{aligned}$$

将上式和式(28)代入式(27)得

$$t^2 = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\omega} \phi_{BL,m}(\omega) \right|^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (29)$$

可见,完全由阶数  $m$  确定,与  $\alpha$  无关,定理 4 得证.

以上论述说明:广义 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  与 BL 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  具有相同的(时、频)局域化特征.

更进一步,通过数值分析发现,所有  $\phi_{BL,m}(t)$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $R \geq 1$  几乎仍然是指数衰减的.

## 5 结束语

广义 BL 基是 BL 基的扩展,它们是通过一个新的参变量——时移因子  $\alpha$  作用于 BL 尺度系数函数  $h_{BL,m}(t)$  后,再对其整数点位进行抽样得到的序列  $h_{BL,m}(n)$  而构造出来的,更准确地说,BL 基是  $\alpha$  为整数时的情形,广义 BL 基是为实数时的情形.

广义 BL 基是以 BL 基为基础构造出来的,因此它们继承了(原始)BL 基的许多优点,比如:标准正交性,时、频局域化特征和指数衰减性等,同时除对称的 BL 基以外,当  $\alpha$  为半整数时,还得到一系列新的对称基,更值得注意的是新基的正则性优于(原始)BL 基.

由定理 1 和定理 2 知,时移因子  $\alpha$  仅仅改变原始 BL 基的相位,利用这一特征,可以对实序列信号进行相位分析,也即复分析,由于篇幅限制,关于该问题另文讨论<sup>[1,3]</sup>.

关于广义 BL 基,本文的工作仅是一个开端,还有许多问题值得进一步探讨,比如:

① 本文广义 BL 基的构造方法能否推广,用于拓展其它经典的正交、双正交多分辨分析基,比如 Daubechies 基、Coiflets 基等;

② 式(26)中算子  $\mathcal{L}$  的性质与定量磨光作用;

③ 如何从理论上严格论证广义 BL 基的指数衰减性;

④ 如何从理论和数值分析两方面准确估计广义 BL 基的正则性指标;

⑤ 广义 BL 子波和正交的分数样条子波<sup>[5]</sup>在理论和应用上有何异同等课题.

## 参考文献:

- [ 1 ] C K Chui. An Introduction to Wavelets [M]. Academic Press, 1992.
- [ 2 ] I Daubechies. Ten Lectures on Wavelets [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [ 3 ] 龙瑞麟. 高维小波分析[M]. 北京:世界知识出版公司, 1995.
- [ 4 ] M Unser. P Thénaz, A Aldroubi. Shift-orthogonal wavelet bases [J]. IEEE Trans, SP, 1998, 46(7): 1827 - 1836.
- [ 5 ] M Unser. Splines, a perfect fit for signal and image processing [J]. IEEE SP Magazine, 1999: 22 - 38.
- [ 6 ] X-P Zhang, M D Desai, Y-N Peng. Orthogonal complex filter banks and wavelets: some properties and design [J]. IEEE Trans SP, 1999, 47(4): 1039 - 1048.
- [ 7 ] 袁晓. 子波算法、构造、解析子波变换及其在信号处理中的应用 [D]. 成都:电子科技大学, 1998.
- [ 8 ] 张健康. 小波级数变换的初始化及 M 带插值小波理论研究 [D]. 西安:西安电子科技大学, 1999.
- [ 9 ] Yuan Xiao, Yu Juebang. A new kind of wavelets based on super-Gaussian spectrum functions [A]. IESP2000 [C]. Beijing, China: ISEP, 2000.
- [ 10 ] O Rioul. Regular wavelets: a discrete-time approach [J]. IEEE Trans SP, 1993, 41(12): 3572 - 3579.
- [ 11 ] L 科恩. 时-频分析:理论与应用[M]. 白居宪,译. 西安:西安交大出版社, 1998.
- [ 12 ] 袁晓, 虞厥邦. 超高斯谱函数及其时-频局域化特征[J]. 电子学报, 2001, 29(1): 80 - 83.
- [ 13 ] 袁晓, 陈向东, 王俊波. 经典规范正交子波的一种简单广义化方法及其应用[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(12): 1870 - 1878.

## 作者简介:



袁 晓 男, 1964 年生于四川中江, 工学博士, 1998 年毕业于电子科技大学, 感兴趣的领域有电路与系统、神经网络、现代信号分析处理等, 已发表论文三十余篇.

陶青川 1972 年出生, 在职博士生, 现为四川大学电子信息学院助教.



何小海 男, 1964 年生于四川盐亭, 教授, 四川大学图像信息研究所副所长.