

# 基于多尺度 Wiener 滤波器的分形噪声滤波

胡 英, 杨 杰, 周 越

(上海交通大学图像处理与模式识别所, 上海 200030)

**摘 要:** 针对淹没在  $1/f$  噪声中的有用信号恢复问题, 本文提出了一套基于双正交小波变换与 Wiener 滤波的多尺度滤波算法, 并设计出多尺度 Wiener 滤波器. 首先, 利用双正交小波变换将带有  $1/f$  噪声的信号分解成多尺度的子带信号, 通过小波变换对  $1/f$  噪声的白化作用, 消除了  $1/f$  噪声的非平稳性、自相似性和长程相关性. 其次, 在小波域内, 利用 Wiener 滤波, 实现了噪声和有用信号的分离, 估计出了各子带中的有用信号. 最后, 利用双正交小波的精确重构性, 较好地恢复出淹没在  $1/f$  噪声中的有用信号. 仿真实验表明, 该滤波器能有效的抑制分形噪声, 显著地提高信噪比.

**关键词:**  $1/f$  噪声; 双正交小波变换; 多尺度 Wiener 滤波器

**中图分类号:** TP911. 7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 04-0560-04

## Multiscale Wiener Filter for the Estimation of Signal Embedded in $1/f$ Noise

HU Ying, YANG Jie, ZHOU Yue

(Inst. of Image Processing & Pattern Recognition, Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China)

**Abstract:**  $1/f$ -Type noise, specially modeled by fractional Brownian motion (fBm) has attracted much attention in many fields. A multiscale Wiener filter based on biorthonormal wavelets and equipped with Wiener filter is proposed in this paper for signal restoration embedded in  $1/f$  family of fractal signals. First, the signal with  $1/f$  noise is transformed via the analysis filter bank into multiscale subsystems in time-scale domain based on biorthonormal wavelets. Some nonstationary properties, e. g. self-similarity, long-term dependencies of fractal signals are attenuated in each subband by wavelet multiresolution decomposition so that the Wiener filter bank can be applied to estimate the multiscale input signals. Then the estimated multiscale input signals are synthesized to obtain the estimated signal. Some simulation examples are given for testing the performance of the proposed algorithm. With this multiscale analysis/synthesis design via the technique of the wavelet filter bank, the multiscale Wiener filter can be applied to treat the signal restoration problem from nonstationary  $1/f$  fractal noise.  $1/f$  fractal noise was restrained effectively and the signal to noise is improved evidently.

**Key words:**  $1/f$  noise; biorthonormal wavelet transform; multiscale wiener filter

### 1 引言

近年来随着分形理论的发展, 分形信号处理已成为信号处理研究领域的重要内容.  $1/f$  统计过程是分形信号中重要的一类. 它具有不平稳、自相似、长程相关、 $1/f$  类型的谱密度等特性, 可广泛应用于地理、经济时间序列、生物医电、语音、图像、雷达信号、水声信号、网络通信等众多领域. 许多分形信号处理的研究主要侧重于白噪声中分形信号的波形与参数估计<sup>[1-3]</sup>, 信号的分形特征等<sup>[4]</sup>. 而分形噪声中有用信号的提取、估计、检测是信号处理领域经常遇到的一类问题. 例如, 从电子器件噪声、分形背景上的电磁散射、通信信道上的猝发误差等  $1/f$  类分形噪声中提取有用信号. 对于这类问题的研究

最近才刚刚起步<sup>[5-6]</sup>. 本文针对以  $1/f$  类分形噪声为背景噪声的有用信号估计, 提出将双正交小波变换与 Wiener 滤波结合起来的滤波算法, 设计出多尺度 Wiener 滤波器, 用于  $1/f$  噪声中信号估计.

### 2 $1/f$ 噪声的小波变换特性

若随机过程  $x(t)$  的功率谱  $S_x(\omega)$  满足:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{|\omega|}, \quad \omega > 0, \quad \omega < 0 \quad (1)$$

则称随机过程  $x(t)$  为  $1/f$  过程或  $1/f$  噪声<sup>[7]</sup>.

$1/f$  噪声在自然界中大量存在. 人们发现和生成的描述  $1/f$  噪声的模型有许多, 其中分数布朗运动模型  $B_H(t)$ , ( $0 <$

$H < 1$ ),  $H$  为分形噪声的余维数, 因其在数学处理上的简便性而成为  $1/f$  噪声的一个经典模型. 分数布朗运动模型是高斯零均值的非平稳过程, 且具有长程相关性和  $1/f$  类型的谱密度. 由于分数布朗运动模型的非平稳性, 使得在对它的处理的过程中, 面临许多困难. 经过 Wornell<sup>[3]</sup> 等的分析发现  $B_H(t)$  的非平稳性要求做时变分析, 它的自相似性又要求做尺度分析, 而小波变换同时具有时频分析和尺度分析的功能, 因此小波变换成为研究  $1/f$  过程的重要工具. 研究发现: 分数布朗运动的小波变换系数可近似为高斯白噪声. 当选择的小波基具有  $R$  阶消失矩时,  $1/f$  类的分形噪声的小波系数序列是不相关或者弱相关<sup>[8]</sup>.

$$E[d_j(n) d_k(m)] \sim O(|2^j n - 2^k m|)^{2(H-R)} \quad (2)$$

这里  $d_j(n)$  是  $B_H(t)$  的离散小波系数. 因此, 如果利用离散小波变换处理  $1/f$  噪声. 它可将  $1/f$  噪声时间域上的自相似性变换到小波域的尺度上去, 此时小波系数序列的长程相关性与自相似性则被大大减弱, 可以认为是不相关或者弱相关, 从而使得我们可以用传统的平稳信号处理方法对其小波系数做进一步地处理. 另外, 文献<sup>[8]</sup> 研究还得到:

定理 1 给定任意不相关的高斯序列, 其方差满足:

$$V[d_j(n)] = 2^{2j} 2^{2H+1} \quad (3)$$

利用小波合成的近似分数布朗运动:

$$\tilde{B}_H(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_j(n) (2^{-j} k - n) \quad (4)$$

则其功率谱有如下形式:  $\frac{2}{|2^{2H+1}|} S_{B_H} \frac{2}{|2^{2H+1}|}$ .

这给我们提供了一种构造近似分数布朗运动过程. 本文利用了此定理构造出了各种  $H$  的  $1/f$  过程. 图 1 是  $H=0.15$  的近似分数布朗运动过程. 图 2 是它的平均功率谱, 它是  $1/f$  型的.

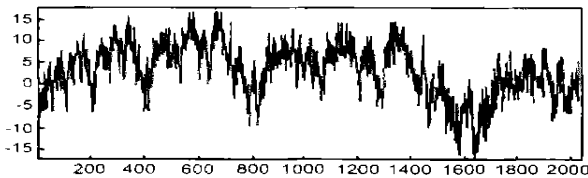


图 1 近似 fBm 噪声  $H=0.15$

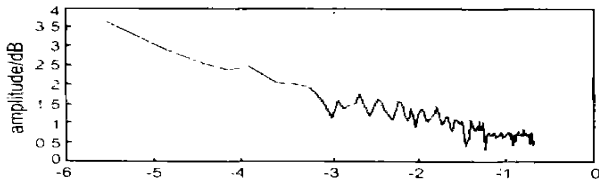


图 2 fBm 噪声的功率谱

### 3 多尺度 Wiener 滤波器算法设计

在分形信号处理中, 尽管估计分形噪声的参数的算法有不少, 但估计分形噪声中信号的工作并不多. 在文献<sup>[5]</sup> 中提出了一种分形噪声中的谐波频率的估计的算法. 它不能针对估计淹没在分形噪声中的平稳信号. 我们将以估计淹没在分

形噪声中的信号为研究对象. 假设得到的观测数据为:

$$y(n) = s(n) + a(n) \quad (5)$$

其中  $a(n)$  是  $1/f$  分形噪声,  $s(n)$  为有用信号, 与  $a(n)$  互相独立.  $s(n)$  可以是确知信号, 随机平稳序列等等. 由于  $1/f$  分形噪声的非平稳性, 使得直接实施平稳信号的分析方法不能取得好的效果.

#### 3.1 小波分析滤波过程

由上节分析, 小波分析是分析  $1/f$  过程的良好工具.  $1/f$  过程的小波系数是平稳的, 近似不相关的, 可看作近似高斯白噪声. 所以将  $1/f$  分形噪声经小波变换, 以上问题就可简化为处理平稳白噪声的问题.

在对  $1/f$  过程处理的许多文献<sup>[1,3,8]</sup> 是利用正交离散小波. 由小波理论知, 正交小波构成的 FIR 滤波器, 除 Harr 基外, 都不具有线性相位. 这使得信号不能被完全重构. 为避免失真, Chui, C. K 等研究了对偶小波的滤波器结构. 它具有线性相位, 能完全重构信号. 因此, 本文认为采用双正交小波变换将更有利于以上提出的问题的解决.

算法的第一步是将  $y(n)$  做离散双正交小波变换, 得:

$$y_j(n) = s_j(n) + d_j(n), j = 1, \dots, J \quad (6)$$

$y_j(n)$  是第  $j$  个子带产生的信号. 其中  $1/f$  的小波系数  $d_j(n)$  已成为弱相关平稳过程. 它的方差满足式 (3), 其中  $2^j, H$  假设已知. 在实践中, 它们需被估计<sup>[3]</sup>.

定理 2 假设  $s(n)$  的均值为零,  $s_j(n)$  是  $s(n)$  的离散小波变换. 则  $s_j(n)$  的自相关函数为:

$$R_{s_j}(n, n+m) = E[s_j(n) s_j(n+m)] = h_{2j}(m) * R_s(2m) \quad (7)$$

证明 设小波变换的各阶滤波器为  $h_j(n)$ . 由小波理论, 它是由低通滤波器  $h_0(n)$  与高通滤波器  $h_1(n)$  构成的:

$$h_1(n) = h_0(n) * h_0(2n) * \dots * h_0(2^{j-2}n)$$

$$h_j(n) = h_1(n) * h_0(n) * h_0(2n) * \dots * h_0(2^{j-1}n), j = 2, \dots, J \quad (8)$$

因  $s_j(n) = s(n) * h_j(2n)$ , 设  $h_{2j}(m) = h_j(m) * h_j(-m)$ , 则利用平稳序列通过线性系统的性质可推出式 (8).

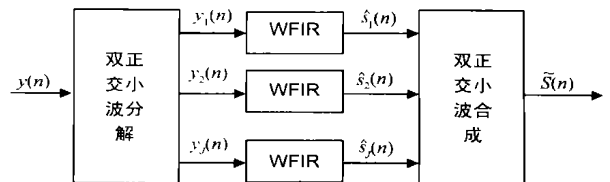


图 3 多尺度 Wiener 滤波器组框图

#### 3.2 Wiener 滤波的构造

现在我们的主要问题是从各个子带中从高斯白噪声中估计出有用信号. 在数字信号处理中, 用来估计信号的方法有许多种, 如用自适应滤波, 卡尔曼滤波等. 考虑到针对对象不同, 以及计算和运行的复杂度, 本文采用 Wiener 滤波用来进行最佳估计.

序列  $y_j(n), j = 1, \dots, J$  作为 Wiener 滤波器的输入. 设 Wiener 滤波器的冲激响应  $f_j(n), j = 1, \dots, J$ . 每个尺度上均取  $M$  个系数的 Wiener 滤波.

**定理 3** 若 Wiener 滤波器的输出是  $s_j(n)$  的最优均方差估计  $\hat{s}_j(n)$ ,  $j=1, \dots, J$ . 则:

$$\hat{s}_j(n) = \sum_{k=0}^{M-1} f_j^0(k) y_j(n-k), j=1, \dots, J \quad (9)$$

这里  $f_j^0(n) = R_{y_j}^{-1} r_{s_j, y_j}$ , 其中

$$f_j^0(n) = [f_j(0), f_j(1), \dots, f_j(M-1)]^T, \\ r_{s_j, y_j} = [R_j(0), R_j(1), \dots, R_j(M-1)]^T, \\ R_{y_j} = \begin{bmatrix} R_j(0) + V[d_j(n)] & R_j(1) & \dots & R_j(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_j(M-1) & R_j(M-2) & \dots & R_j(0) + V[d_j(n)] \end{bmatrix} \quad (10)$$

$R_j(n)$  是  $s_j(n)$  的自相关函数见式(5).  $V[d_j(n)]$  是  $d_j(n)$  的方差.

利用 Wiener 滤波理论可直接得到此定理. 根据定理 2, 3 设计的滤波器如图 3 所示.

### 3.3 小波合成滤波器

将 Wiener 滤波的结果  $\hat{s}_j(n)$  输入到小波合成滤波中, 我们就得到了有用信号的估计. 至此, 我们设计出了分形噪声中信号恢复的多尺度 Wiener 滤波器. 整个多尺度 Wiener 滤波的过程可用框图 3 表示.

## 4 仿真结果及分析

为了验证本文算法的性能, 我们进行了仿真计算. 设观测数据:  $y(n) = s(n) + a(n)$

考虑平稳随机相位序列:

$$s(n) = a(\cos(0.4\pi n + \varphi_1) + \cos(0.7\pi n + \varphi_2)) \quad (11)$$

$\varphi_1, \varphi_2$  是  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布.

图 4 表示了原始信号中的一段.  $a(n)$  是  $1/f$  分形噪声,  $H=0.15, \beta=2$ . 见图 1, 2. 图 5 显示了观测数据, 长度为 2048. 式(11)中  $a$  为调节信号方差的系数. 调节  $a$  使信号的信噪比足够低.

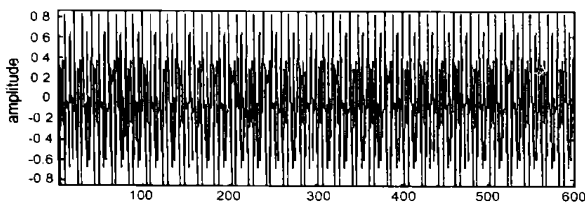


图 4 一段原始信号

将观测数据输入到多尺度 Wiener 滤波器中, 双正交小波选用具有 4 阶消失矩的样条小波, 根据式(2)的结论, 这样可以保证对分形噪声具有较好的白化作用. Wiener 滤波采用的

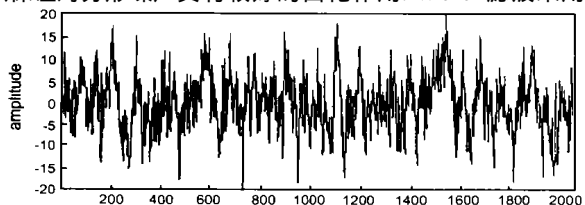


图 5 观测信号(1-2048)

阶数为  $M=4$ . 图 6 是采用本文算法滤波后恢复的数据结果. 图 7 是采用本文算法滤波前后的功率谱比较结果. 从图 7 的结果显示, 与观测信号的功率谱相比, 滤波后的信号的功率谱明显与原信号的功率谱近似. 若采用窄带信噪比定义, 估算信号的信噪比平均由 2.1dB 提高到约 18dB, 多次独立试验的结果也是一致的.

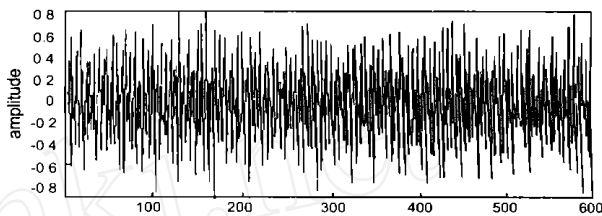


图 6 一段滤波后的信号

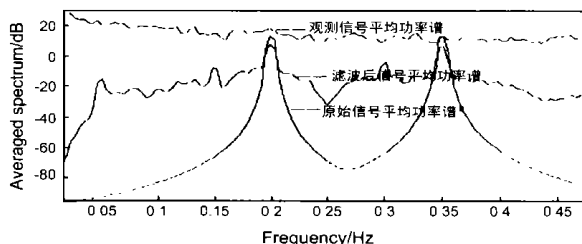
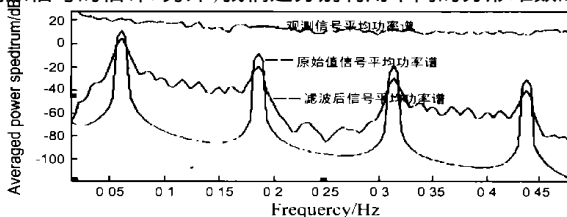
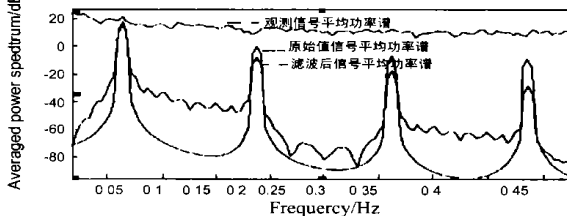


图 7  $M=4$  时功率谱比较图

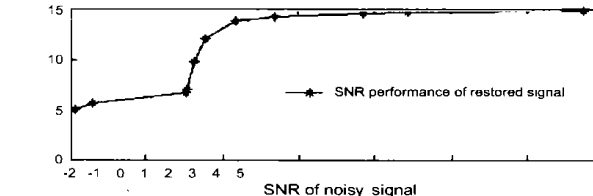
为测定算法的性能, 考虑确定信号: 周期为 16 的三角波. 图 8(a) 是当分形噪声  $H=0.15, \beta=2$  时, 采用本文算法对分形噪声中含有三角波信号滤波前后的功率谱比较结果. 图中可以看到, 本文提出的多尺度能有效的滤除分形噪声, 从而得到原信号的估计. 另外, 我们还分别利用不同的分形维数的噪



(a)  $H=0.15$  时功率谱比较图



(b)  $H=0.05$  时功率谱比较图



(c)  $H=0.05$  时恢复信号的信噪比结果图

图 8 分形噪声中含有三角波的滤波结果

声进行了实验.图 8(b) 是当分形噪声  $H=0.05$  时,采用多尺度 Wiener 滤波的结果比较图.图 8(c) 是对  $H=0.05$  分形噪声中三角波进行滤波的结果.从图中可见,在原始窄带信噪比在大于  $-1\text{dB}$  的情况下,多尺度 Wiener 滤波器都保持了良好的滤波效果.

## 5 结论

本文针对分形噪声中信号的估计问题,提出将双正交小波变换与 Wiener 滤波器组结合起来的尺度滤波算法.从原理上阐明了其可行性,并通过仿真验证了它的有效性.结果表明,通过本算法,能够有效消除分形噪声的长程相关性,得到信号的较好估计.自然界中有许多非平稳随机信号在一定尺度范围内符合分形布朗运动模型,如金融中的道琼斯指数序列、电子器件噪声、网络传输过程、舰船辐射噪声等等.因此,预计本文提出的方法将有助于分形噪声中信号的提取、估计、检测等.

## 参考文献:

- [ 1 ] Wornell G W, Oppenheim A V. Estimation of fractal signal from noisy measurements using wavelets [J]. IEEE Trans on SP, 1992, 40(3): 611 - 623.
- [ 2 ] Weir-Liang Hwang. Estimation of Fractional Brownian motion Embedded in a Noisy Environment Using Nonorthogonal Wavelets [J]. IEEE Trans on SP, 1999, 47(8): 2211 - 2219.
- [ 3 ] Chen B S, Ling C W. Multiscale wiener filter for the restoration of fractals Wavelet filter bank approach [J]. IEEE Trans on SP, 1994, 42(11): 2972 - 2982.
- [ 4 ] 周越. 非高斯信号的多尺度分析与特征提取研究 [D]. 西安: 西北工业大学, 2000.
- [ 5 ] 李海英, 等. 分形噪声中谐波信号的提取 [J]. 声学技术, 2000, 19(3): 131 - 132.
- [ 6 ] 肖创柏, 李衍达. 分形差分高斯噪声中正弦波频率估计 [J]. 通信学报, 1996, 17(3): 21 - 26.
- [ 7 ] 张贤达. 非平稳信号分析与处理 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [ 8 ] A H Tewfik, M Kim. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional Brownian motion [J]. IEEE Trans. Inf. Theo, 1992, 38(2): 904 ~ 909.

## 作者简介:

胡 英 女, 1976 年生于新疆, 上海交通大学图像处理与模式识别所在读博士生, 于 2000 年获上海大学理学硕士学位, 主要研究兴趣: 数字信号处理、目标特征提取与识别、盲信号处理等.

杨 杰 男, 1964 年出生于上海, 上海交通大学图像处理与模式识别所副所长, 教授, 博导, 主要研究领域: 信号检测与识别、数据挖掘、医学图像处理, 图像匹配等.

周 越 男, 1969 年出生于西安, 上海交通大学图像处理与模式识别所博士后, 于 2000 年获西北工业大学博士学位, 主要研究领域: 舰船信号的检测与识别、医学信号处理等.