

关于样本容量、验前信息与 Bayes 决策风险的若干讨论

张湘平,张金槐,谢红卫

(国防科学技术大学机电工程与自动化学院,长沙 410073)

摘要: 针对工程实际中所普遍存在的小子样问题,分析验前信息和样本容量大小对 Bayes 决策的影响.将验前费用和试验费用引入到损失函数中,研究样本容量大小、验前信息以及 Bayes 决策风险三者之间的关系.并在给定决策风险上限和总费用的条件下,理论上推导样本容量大小、验前信息的可信度、总费用以及 Bayes 决策风险关系式,从而为小子样条件下,找到验前信息可信度的保证下限提供了理论依据.

关键词: 小子样; Bayesian 决策风险; 验前信息; 试验费用; 验前费用; 可信度

中图分类号: O212. 8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 04-0536-03

A Few Discussion of Samples, a Prior Information and Bayesian Statistical Decision

ZHANG Xiang-ping, ZHANG Jin-huai, XIE Hong-wei

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Considering the problem of small samples in engineering, we analyze the effect of *a priori* information credibility and samples in Bayesian statistical decision. The relation of samples, *a priori* information and Bayesian statistical decision adventure is studied by introducing *a priori* cost and testing into the Bayesian loss function. Under the condition of given the decision adventure limitation and total cost, two relation formula about samples, *a priori* information credibility, total cost and Bayesian statistical decision adventure have been deduced from theory. Therefore, under the condition of small samples, a kind of theoretical method to find the bottom-line of *a priori* information credibility is presented.

Key words: small samples; bayesian statistical decision adventure; *a priori* information; *a priori* cost; testing cost; credibility

1 引言

在工程实际中,小子样问题是普遍存在的.这其中,有些限于条件(如地震预报,历史上只留下少数记录);有些取样本代价太大(如导弹现场试验、地质勘探等,打一发弹或一口井一般都需要几百甚至几千万人民币);有些很难找到样本(如不常见疾病的患者样本).在这种情况下,经典的统计方法受到了严重的挑战. Bayes 方法作为研究小子样问题的一种有效途径,多年来一直受到人们的重视,并且在许多领域都得到了很好的应用.据近五年(1997~2001)SCI文献检索,与主题词 Bayesian 相关的文献记录就达 210 余篇,表现出勃勃生机.

对于小子样条件下的 Bayes 统计决策,我们所持的学术观点是: Bayes 方法不是少用信息,而是把小子样条件下的统计推断问题向验前信息方面转嫁,即:通过获取和综合运用验前信息来弥补样本信息的不足.然而,在工程实际中,无论是获取样本信息,还是验前信息都是需要付出代价的.对于样本信息,一般主要表现为做 n 次试验的费用,而对于验前信息,则主要表现为获取历史数据和做阶段性研制试验(比如,仿真实验、半实物仿真实验、物理仿真等)所需要的费用,以下为了

表叙方便,权且将这两种费用称为“试验费用”和“验前费用”.因此,如何权衡“费用”与“风险”之间的关系是很重要的.

应该说,“费用”与“决策风险”之间的关系是很密切的,一般认为,投入的费用(包括:“试验费用”和“验前费用”)越多,则获得的样本信息越多,验前信息越可信,这时, Bayes 决策风险也就越小.但实际工程应用中的情况往往是这样,即:任务双方(研制方和使用方)已事先确定了决策风险上限和总费用.因此,我们的问题是:在决策风险上限和总费用一定的条件下,通过合理选定“试验费用”和“验前费用”分别与“样本容量”和“验前信息”之间的近似函数关系,来间接得出样本容量大小、验前信息以及 Bayes 决策风险三者之间的关系,从而为特小子样下,找到验前信息的保证下限提供理论依据.

2 损失函数的定义

如何选取损失函数,是决策理论在应用中的一个关键.在很多实际场合,行为的优劣不一定都能确切地数量化.因此,常常只能在满足一般的合理性的前提下,选择那些在数学上比较实用且易于处理的较简单的函数作为损失函数.不失一般性,我们选择常值损失函数来进行讨论.设有总体 $f(x,)$

收稿日期:2001-10-30;修回日期:2002-12-10

基金项目:航天支撑技术基金(No. 2001-HF-GFKD-09)

$f(x,)$ 为总体的密度函数,考虑统计假设:

$$H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta = \theta_1$$

其中, $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_0 = \theta_1 = \emptyset$, 为整个参数空间, \emptyset 表示空集. 于是,常值损失函数为:

$$L(i; a_j) = \begin{cases} C_{ii}, & i=j \\ C_{ij}, & i \neq j \end{cases}; i, j=0, 1 \quad (1)$$

其中, a_i 表示采纳 H_i 的行为 ($i=0, 1$).

关于式(1)中常值 ($C_{ij}, i, j=0, 1$) 的确定方法,一般可根据具体应用情况而定,比如,在导弹落点精度评定中,它表示使用效能.例如,对面临目标射击,它们是用对典型目标(一般用圆域目标)发射一发弹之下的相对平均毁伤量来确定的(它的计算方法见文[1]).有时,人们为了讨论问题方便,常采用最简单的常值损失函数,即所谓“0—1”损失函数,也就是说,当采取正确的行为时损失为 0,而采取错误的行为时损失为 1.虽然,各种定义方法都有其合理的方面,但是,这些方法一般都只考虑了未知分布参数性能的损失,而没有考虑验前费用和试验费用的损失,这是一个具有一般意义的问题.鉴于以上分析,我们将损失函数定义为:

$$L(i, a_j) = \begin{cases} c_1 C_{ii} + c_2(c_1 + c_2), & i=j \\ s_1 C_{ij} + s_2(c_1 + c_2), & i \neq j \end{cases}; i, j=0, 1 \quad (2)$$

其中, $C_{ii} (i=0, 1)$ 为采取正确行为时的性能损失,一般取为 0; $C_{ij} (i, j=0, 1; i \neq j)$ 为采取错误行为时的性能损失; c_1 表示试验费用, c_2 表示验前费用, c 表示总费用,且 $c_1 + c_2 = c$; $\alpha_i (i=1, 2)$ 表示采取正确行为时的损失权系数,且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; $s_i (i=1, 2)$ 表示采取错误行为时的损失权系数,且 $s_1 + s_2 = 1$. 值得指出的是,式(2)中的“性能损失”和“费用损失”是通过权系数来实现无量纲相加的,权系数 $\alpha_i (i=1, 2)$ 和 $s_i (i=1, 2)$ 应根据工程实际具体情况来定.下面,以导弹落点精度鉴定为背景,来进行具体论述.

3 Bayes 决策及风险表示

对于导弹落点精度鉴定,习惯上采用下列统计假设:

$$H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta = \theta_1 \triangleq \theta_1, \theta_1 > \theta_0$$

设 n 次试射中的落点偏差为 $(X_i, Z_i), (i=1, 2, \dots, n)$, 其中 X_i, Z_i 分别表示第 i 次射击的纵、横向落点偏差的坐标,此处: $X_i \sim N(0, \sigma_x^2), Z_i \sim N(0, \sigma_z^2)$, 并记:

$$r_i = \sqrt{X_i^2 + Z_i^2}, i=1, 2, \dots, n$$

假定纵、横向落点互相独立,则: $r_i \sim$ Rayleigh 分布. 即 r_i 的概率密度函数为:

$$p(r) = \frac{1}{2} r e^{-\frac{r^2}{2}}, r > 0$$

记 $r = (r_1, \dots, r_n)$ 为 n 次射击的落点样本.

另外,不失讨论问题的一般性,令 $C_{ii} = 0, (i=0, 1)$ 则式(2)中定义的决策损失分别为:

$$\begin{cases} K_{ii} = c \\ K_{ij} = s_1 C_{ij} + s_2 c, i, j=0, 1; i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

于是
$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)} = \frac{L(r; \theta_1)}{L(r; \theta_0)} \cdot \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \quad (4)$$

其中: $L(r; \theta_i) = r_1 \dots r_n \binom{2}{i}^{-n} e^{-\frac{r^2}{2}}, S_n^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2, P(H_0),$

$P(H_1)$ 分别为 H_0, H_1 成立的概率,即验前概率. 而由 Bayes 的决策不等式:

$$\frac{P(H_1|r)}{P(H_0|r)} \geq \frac{K_{10} - K_{00}}{K_{01} - K_{11}} = \frac{s_1 C_{10} + (s_2 - \alpha_2) c}{s_1 C_{01} + (s_2 - \alpha_1) c} \quad (5)$$

其中 acc 表示采纳之意,并且记 $\frac{s_1 C_{01} + (s_2 - \alpha_1) c}{s_1 C_{10} + (s_2 - \alpha_2) c}$ 为 J^* ,称之为 Bayes 决策的门限.

将式(4)代入式(5)不难获得 Bayes 决策不等式:

$$S_n^2 \geq \frac{2}{2-1} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \cdot J^* \right) \triangleq J^* \quad (6)$$

其中, $\frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \frac{P(H_0)}{1 - P(H_0)}$.

若设 $t = S_n^2$ 为 χ^2 的充分统计量,则有:

① 决策的临界域为: $Z_0 = \{r: S_n^2 < J^*\}$, 它是采纳 H_0 的域; $Z_1 = \{r: S_n^2 > J^*\}$, 它是采纳 H_1 的域.

② 决策风险为:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{J^*} 2c P(H_0) \frac{1}{2} k_{2n}(t/\sigma_0^2) dt + (s_1 C_{01} + s_2 c) P(H_1) \int_0^{J^*} \frac{1}{2} k_{2n} \\ &\quad (t/\sigma_1^2) dt + (s_1 C_{10} + s_2 c) P(H_0) \int_{J^*}^{\infty} \frac{1}{2} k_{2n}(t/\sigma_0^2) dt \\ &\quad + 2c P(H_1) \int_{J^*}^{\infty} \frac{1}{2} k_{2n}(t/\sigma_1^2) dt \\ &= 2c P(H_0) K_{2n}(J^*/\sigma_0^2) + (s_1 C_{01} + s_2 c) P(H_1) K_{2n} \\ &\quad \cdot (J^*/\sigma_1^2) + (s_1 C_{10} + s_2 c) P(H_0) (1 - K_{2n}(J^*/\sigma_0^2)) \\ &\quad + 2c P(H_1) (1 - K_{2n}(J^*/\sigma_1^2)) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中, $K_{2n}(\cdot)$ 为具有 $2n$ 个自由度的 χ^2 分布函数.

值得指出的是,以上方法与以往方法的不同之处就在于将验前费用和试验费用引入到损失函数中,这样做的好处将在 4 节中说明.

4 分析与评论

4.1 决策门限的合理性

以往由于没有将“验前费用”和“试验费用”引入到损失函数中,所以,决策门限一般可由下式确定:

$$\frac{C_{10}}{C_{01}} \cdot \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \frac{C_{10}}{C_{01}} \cdot \frac{P(H_0)}{1 - P(H_0)} \quad (8)$$

由式(8)可知,如果 $C_{10} > C_{01}$, 即是说,当 H_0 为真采纳 H_1 所造成的损失大于 H_1 为真采纳 H_0 所造成的损失. 此时将使 J^* 增大,从而将引起容易采纳 H_0 的后果(采纳的 H_0 区域扩大了);反之,当 $C_{10} < C_{01}$ 则将使采纳 H_1 的区域扩大. 在导弹落点精度鉴定中,无论是研制方还是使用方(军方)都希望自己所冒的风险小,因此,作为研制方往往希望决策门限 J^* 大;而使用方却希望决策门限 J^* 小. 这是导弹落点精度鉴定中,常常容易引起争议的问题.

将式(8)与式(6)中的 J^* 相比较,可得:

$$J^* = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \frac{P(H_0)}{1 - P(H_0)}$$

$$= \frac{C_{10}}{C_{01}} \left(\frac{s_1 + \frac{(s_2 - \gamma) c}{C_{10}}}{s_1 + \frac{(s_2 - \gamma) c}{C_{01}}} \right) \frac{P(H_0)}{1 - P(H_0)}$$

且令：

$$V = \left(\frac{s_1 + \frac{(s_2 - \gamma) c}{C_{10}}}{s_1 + \frac{(s_2 - \gamma) c}{C_{01}}} \right) = \cdot V \tag{9}$$

即有：

由式(9)可知,当 $C_{10} > C_{01}$,虽使 γ 增大,但却也使 V 减小了,因此,采纳 H_0 的区域就不会过于扩大了;反之,当 $C_{10} < C_{01}$,虽使 γ 减小,但却也使 V 增大了,因此,采纳 H_0 的区域将不会过于减小.所以,将验前费用和试验费用引入到损失函数中,对合理确定决策门限是有帮助的.

4.2 样本容量、验前信息以及决策风险之间的关系

在给定总经费 (C_0) 和决策风险的上限 ($R = R_0$) 的条件下,由式(7)可得：

$$R_0 = 2 C_0 P(H_0) K_{2n}(J^*/\gamma_0) + (s_1 C_{01} + s_2 C_0) P(H_1) K_{2n}(J^*/\gamma_1) + (s_1 C_{10} + s_2 C_0) P(H_0) \left(1 - K_{2n}(J^*/\gamma_0) \right) + 2 c P(H_1) \left(1 - K_{2n}(J^*/\gamma_1) \right) \tag{10}$$

在式(10)中, $K(J^*/\gamma_i)$, ($i=0,1$) 的计算可利用 $\frac{2}{m}$ 的分布展式来进行.据文献(2),当 m 为偶数时的 $\frac{2}{m}$ 分布展式为：

$$K_m(\frac{2}{m}) = 1 - e^{-\frac{2}{m}} \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{m-2}{2 \cdot 4 \dots (m-2)} \right) \tag{11}$$

不妨以 $n=1$ 来说明,此时有：

$$K_2(\frac{2}{m}) = 1 - e^{-\frac{2}{m}} \tag{12}$$

式中, $\frac{2}{m} = \frac{J^*}{i}$, ($i=0,1$). 于是,利用以上结果可作如下讨论：

① 假设现场试验前无任何验前信息,即： $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$. 此时, $\gamma = \gamma_0 = \gamma_1$, 则可依据给定的条件,由式(10)确定一个试验次数 n^* ；

② 如果现场试验前有验前信息,即： $P(H_0) \neq P(H_1)$. 此时： $\gamma = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \frac{P(H_0)}{1 - P(H_0)}$

则也可依据给定的条件,由式(10)确定一个相应试验次数 n ；

③ 记 $n = n^* - n$, 则 n 为在冒同样决策风险之下,利用验前信息 $P(H_0) \neq P(H_1)$ 与 $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$ 相比较时所省下的试验次数. 根据以上讨论,作进一步的思考:由于总费用是由“试验费用”和“验前费用”组成的,而“试验费用”和“验前费用”的多少与“试验次数”的多少和“验前信的可信度”的高低是密切相关. 一般认为它们有如下关系：

④ “试验费用”与“试验次数”的多少成比例关系,即： $c_1 = n \cdot k_n$ (13)

式中, k_n 表示试验一次所需要的费用.

⑤ “验前费用”与“验前信息的可信度”的关系是:无“验前费用”,则“验前信息的可信度”为零;“验前费用”很大,则“验前信息的可信度”接近 1. 即可用对数函数来近似表示(注:这种近似关系是参阅文献[3]提出的),即：

$$s = 1 - e^{-c_2} \tag{14}$$

式中, s 为“验前信息的可信度”.

由式(14)可得： $c_2 = \ln \left(\frac{1}{1-s} \right)$. 于是由 $c_1 + c_2 = C_0$ 的关系,可得： $nk_n + \ln \left(\frac{1}{1-s} \right) = C_0$ (15)

而由前面的讨论可知,当无任何验前信息时,则可依据给定的条件,由式(10)确定一个试验次数 n^* . 这里隐含了 $s=0$ 的情况,所以可由式(15)确定 $k_n = \frac{C_0}{n}$. 再将 $k_n = \frac{C_0}{n}$ 代入式(15),

则有： $s = 1 - e^{-c_0 \left(\frac{n^* - n}{n} \right)} = 1 - e^{-c_0 \frac{n^* - n}{n}}$ (16)

这个结论是有物理意义的,即:在给定总经费 (C_0) 和决策风险的上限 ($R = R_0$) 的条件下,试验次数越少,则对验前信息可信度的要求会越高. 可见在小子样情况下,验前信息的高可信度是 Bayes 决策的有力保证.

5 结语

本文所得到的主要结果是式(10)和式(16)这些结果的物理意义与工程中的实际情况是一致,因此,它们对 Bayes 统计决策在实际工程中的应用有重要的指导意义.

参考文献：

- [1] 张金槐,等. BAYES 方法[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1993. 125 - 134.
- [2] 张金槐. 小子样 BAYES 试验鉴定方案的设计[J]. 飞行器测控学报,2000,19(2):15 - 19.
- [3] Sargent R E. A tutorial on validation and verification of simulation models [A]. Proc. of the 1988 winter simulation conference [C]. San Diego WSC,1988:33 - 39.
- [4] Sargent R E. Some approaches and paradigms for verifying and validating simulation models [A]. Proc. of the 2001 winter simulation conference [C]. Arlington WSC,2001. 106 - 114.

作者简介：



张湘平 男,1963年12月生于湖南长沙,副教授,博士生,控制理论与控制工程专业,研究方向为系统建模、辨识与试验数据分析和处理技术,发表学术论文30余篇,编著出版1部面向二十一世纪教材《计算机应用系统的故障诊断与可靠性技术基础》,研究课题涉及数据融合技术、武器系统精度分析与鉴定、仿真验模与校模技术以及可靠性分析技术等.

张金槐 男,1930年11月出生于江苏武进,教授,从事估值与滤波、试验结果分析与精度鉴定、可靠性分析等研究工作,担任过12项国家军用标准的总技术指导,撰写科技论文100余篇,出版专著和教材10余种,主要有《测轨问题导论》、《最佳线性滤波方法》、《远程火箭精度分析和评估》、《线性模型参数估计及其改进》和《Bayes方法》等,获得国家图书奖一项,获部级科技进步奖一等奖1项,二等奖2项,三等奖多项,92年起享受政府特殊津贴.