低密度纠删码度分布序列的研究

慕建君[1,2], 杨 莉[1], 王新梅[1]
(1. 西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室, 陕西西安 710071; 2. 西安电子科技大学计算机学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文对低密度纠删码的度分布序列进行了研究, 提出了低密度纠删码度分布序列可达信道容量的充分必要条件, 给出了Heavy-Tail/Poisson和右边正则的两种度分布序列的性质, 证明了低密度纠删码达信道容量度分布序列的一个分析性质. 这些分析性质对低密纠删码达信道容量度分布序列的设计有着重要的理论指导意义.

关键词: 低密度纠删码; 删除信道; 达信道容量的度分布序列; 一致收敛
中图分类号: TN919.3 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2003)07-1066-04

Study on Sequences of Degree Distribution for Low-Density Erasure Codes

MU Jian-jun[1,2], YANG Li[1], WANG Xin-mei[1]
(1. National Key Lab. of Integrated Service Networks, Xidian University, , Xi.an, Shaanxi 710071, China;
2. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: Sequences of degree distribution for low-density erasure codes are investigated. We propose a necessary and sufficient condition for sequences of degree distribution for low-density erasure codes to be capacity-achieving sequences. The properties of the Heavy-Tail/Poisson sequences and right-regular sequences are given for low-density erasure codes. The analytical property of capacity-achieving sequences is shown for low-density erasure codes. These analytical properties of the sequences of degree distribution will be helpful in designing capacity-achieving sequences of degree distribution for low-density erasure codes.

Key words: low-density erasure code; erasure channel; capacity-achieving sequence; uniform convergence

1 引言

近年来, 低密度校验码(Low-Density Parity Check, 简称LDPC码)引起了人们的普遍关注[1~6]. 这是因为LDPC码具有低的迭代译码复杂度[3], 而且是目前接近信道容量限的最佳编码技术之一[4]. 基于删除信道的LDPC码称为低密度纠删码(Low-Density Erasure Code), 它的分析相对容易一些, 但却非常重要. 这是因为ARQ(Automatic Repeat reQuest)技术和分层恢复等新技术可有效地提高数据传输的可靠性和避免网络拥塞的出现, 但可能导致大的时延. 利用低密度纠删码的编码方法可较好地克服这一缺点[1,3]. 文[3]设计了一种基于级联稀疏二部图的低密度纠删码, 其主要贡献在于此文首次对这种码进行了严格的理论分析之后, 提出了该码的一删除错误译码算法及其成功译码的条件, 并证明了在基于非正则二部图和正则二部图的低密度校验码中前者的性能更好. 同时文[3]指出二部图的构造, 即二部图度分布序列的构造, 是设计低密度纠删码的最关键问题. 文[3]和[4]分别给出了Heavy-Tail/Poisson和右边正则的两种达信道容量度分布序列, 但目前并不知道达信道容量度分布序列的一般构造方法.

本文给出并证明了Heavy-Tail/Poisson和右边正则的度分布序列的一些性质, 提出了低密度纠删码度分布序列可达信道容量的充分必要条件, 同时证明了可达信道容量度分布序列的一个分析性质. 这些分析性质有助于深入了解这类度分布序列的本质, 也对它们的设计提供了一个理论依据.

2 两类可达信道容量的LDPC码度序列

LDPC码可用一随机二部图G来表示, G的右侧和左侧结点集分别表示LDPC码的信息码字和校验约束. 定义G的一条边的左侧(右侧)度数为G中此边左侧(右侧)邻接结点的度数, 并用λ_i和ρ_i分别表示G的左侧和右侧度数为i的边的比率, 若令$\lambda=\lambda(x)=\sum_{i\ge 1}\lambda_i x^{i-1}$, $\rho=\rho(x)=\sum_{i\ge 1}\rho_i x^{i-1}$, 则称偶对$(\lambda,\rho)$为LDPC码的一度分布. 文[3]给出了删除信道下LDPC码的一简单译码算法, 并首次对这一译码算法进行了严格分析之后, 证明了对于初始删除错误概率δ和具有度分布(λ,ρ)的LDPC码, 若对所有$x\in(0,\delta)$有$\delta\lambda(1-\rho(1-x))<x$成立, 则文[3]的简单译码算法可成功译码. 一般假定

收稿日期: 2001-09-25; 修回日期: 2002-01-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.60272057); 陕西省自然科学基金(No.2002F01); 重庆市/信息产业部移动通信技术重点实验室开放课题基金资助项目

所有的校验方程线性独立, 这时 LDPC 码的码率 $R = 1 - \int_0^1 Q(x)\,dx / \int_0^1 K(x)\,dx$.

定义 1　设度分布为(K_n, Q_n)的 LDPC 码序列 $C_n(n=1,2,\ldots)$的码率为 R, 若对所有正数 $D < 1-R$, 存在正整数 n_0, 使得对所有 $n \ge n_0$ 和所有的 $x \in (0,1)$ 有 $Q_n(1 - DK_n(1-x)) > x$, 则称对码率 R 度分布序列(K_n, Q_n)为达信道容量的度分布序列(capacity-achieving sequence of degree distribution).

设 R 为给定的码率, 文[3]提出 Heavy-Tail/Poisson 度分布序列(K_n, Q_n): 即对于确定的正整数 $n(n \ge 1)$, 取 $K_n(x) = \frac{1}{H(n)}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}$, $Q_n(x) = e^{L_n(x-1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{L_n^{i-1}}{(i-1)!}e^{-L_n}x^{i-1}$, 其中 $H(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, L_n 是满足 $\frac{1-e^{-L_n}}{L_n} = \frac{1-R}{H(n)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ 的唯一解. 文[4]设计了右边正则的度分布序列$(Q_a, K_{A,n})$: 即整数 $a \ge 3$ 和 $n \ge 2$, 取 $Q_a(x) = x^{a-1}$, $K_{A,n}(x) = A\sum_{k=1}^{n-1}\binom{A}{k}(-1)^{k+1}x^k \Big/ \left[A - n\binom{A}{n}(-1)^{n+1}\right]$, 其中 $A = 1/(a-1)$, $\binom{A}{0} = 1$, $\binom{A}{n} = \frac{A(A-1)\cdots(A-n+1)}{n!}$. 同时证明了对码率 R 这两类度分布序列为达信道容量的序列[3,4].

3　达信道容量度分布序列的分析性质

设(K_n, Q_n)是码率为 R 的达信道容量的度分布序列, 由 $Q_n(x)$的系数的非负性知 $Q_n^{-1}(x)$ 在[0,1]上存在. 从文[7]易见: (a) 对所有 $x \in (0, D)$ 有 $DK_n(1 - Q_n(1-x)) < x$; (b) 对所有 $x \in (0,1)$ 有 $Q_n(1 - DK_n(x)) > 1-x$ 成立; (c) 对所有 $x \in (0,1)$ 有 $DK_n(x) < 1 - Q_n^{-1}(1-x)$ 相互等价. 于是有如下引理.

引理 1　设(K_n, Q_n)是码率为 R 的达信道容量的度分布序列, $0 < D < 1$, 则下列两种说法是等价的.

(a) 此度分布序列为达信道容量的;

(b) 若用 D_n 表示满足以上三个等价条件的所有 D 的上确界, 则 $\lim_{n\to\infty} D_n = 1 - R$.

证明　若(a)成立, 则对 $\forall E > 0$ 存在正整数 n_1, 使得对所有 $n \ge n_1$ 和所有 $x \in (0,1)$ 有 $Q_n(1 - (1-R-E)K_n(1-x)) > x$, 结合(b)中 D_n 的定义知对所有的 $n \ge n_1$, 有 $D_n \ge 1-R-E$. 注意到 $D_n \le 1-R$, 即得 $\lim_{n\to\infty} D_n = 1-R$; 反之, 若(b)成立, 设任意给定 $E > 0$, 令 $D = 1-R-E$, 由 $\lim_{n\to\infty} D_n = 1-R$ 知存在正整数 n_2 使得对所有 $n \ge n_2$, 有 $D_n > 1-R-E$, 由(b)中 D_n 的定义知对 $\forall E > 0$、所有 $n \ge n_2$ 和所有的 $x \in (0,1)$ 有 $Q_n(1 - (1-R-E)K_n(1-x)) > x$ 成立, 即度分布序列(K_n, Q_n)为达信道容量的.

为了给出以上两类度分布序列的一些分析特性, 先证明如下引理.

引理 2　设(K_n, Q_n)是码率为 R 的 Heavy-Tail/Poisson 度分布序列, 对于确定的整数 $n(n \ge 1)$ L_n 是满足 $\frac{1-e^{-L_n}}{L_n} = \frac{1-R}{H(n)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ 的唯一解, 则 $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.

证明　由 Heavy-Tail/Poisson 度分布序列的定义可知 $L_n > 0(n \ge 1)$ 和 $\lim_{n\to\infty}(1-e^{-L_n})/L_n = 0$. 首先证 $\lim_{n\to\infty} L_n$ 存在(包括非正常极限). 假如 $\lim_{n\to\infty} L_n$ 不存在, 则必存在序列$\{L_n\}$的两个不同的收敛子列$\{L_{n_i}\}$和$\{L_{n_j}\}$使得 $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = a$ 和 $\lim_{j\to\infty} L_{n_j} = b$ 且 $a \ne b$. 由 $L_n > 0$ 知 a 与 b 中至少有一个为有限值, 不妨设 a 为有限值, 若 $a \ne 0$, 则有 $\lim_{i\to\infty}(1-e^{-L_{n_i}})/L_{n_i} = (1-e^{-a})/a \ne 0$; 若 $a = 0$, 则有 $\lim_{i\to\infty}(1-e^{-L_{n_i}})/L_{n_i} = 1 \ne 0$, 这两结果都与 $\lim_{i\to\infty}(1-e^{-L_{n_i}})/L_{n_i} = 0$ 相矛盾. 又易见 $\lim_{n\to\infty} L_n \ge 0$ 不可能为有限值, 因为假如 $\lim_{n\to\infty} L_n$ 为有限值, 则必有 $\lim_{n\to\infty}(1-e^{-L_n})/L_n \ne 0$, 这也与结论 $\lim_{n\to\infty}(1-e^{-L_n})/L_n = 0$ 相矛盾. 因此有 $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.

引理 3　若 $A = 1/(a-1)$(整数 $a \ge 3$), n 为正整数, 则有

(a) $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{A}{k}(-1)^{k+1} = 1 - \frac{n}{A}\binom{A}{n}(-1)^{n+1}$;

(b) $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{A}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \left[A - \binom{A}{n}(-1)^{n+1}\right]/(A+1)$.

证明　易见 $n=2$ 时, (a)中左边=右边=A, (b)中左边=右边=A/2, 两结论成立. 假设 $n = m$ 时两结论成立. 当 $n = m+1$ 时对(a)和(b)分别有

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{A}{k}(-1)^{k+1} = 1 - \frac{m+1}{A}\binom{A}{m+1}(-1)^{m+2};$$

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{A}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \left[A - \binom{A}{m+1}(-1)^{m+2}\right]\Big/(A+1).$$

因此 $n = m+1$ 时两结论成立, 由数学归纳法知两结论得证.

从引理 3 可得由右边正则的度分布序列构造的纠删码的码率 R 为

$$R = 1 - \int_0^1 Q_a(x)\,dx \Big/ \int_0^1 K_{A,n}(x)\,dx = 1 - \left[A - n\binom{A}{n}(-1)^{n+1}\right] \Big/ \left[A - \binom{A}{n}(-1)^{n+1}\right] \quad (1)$$

引理 4[4]　设正实数 $A \le 1/2$, 整数 $n \ge 2$, 则存在常数 c, 使得对所有的 A 和 n 有

$$\frac{cA}{n^{A+1}} \le \binom{A}{n}(-1)^{n+1} \le \frac{A}{n^{A+1}}.$$

定理 1　设$(K_n, Q_n)(n = 1, 2, \ldots)$是码率为 R 的 Heavy-Tail/Poisson 度分布序列, D_n 如引理 1 中所定义, 则对任意确定的 $F < 1$, $D_nK_n - 1 + Q_n^{-1}(1-x)$在$(0, F]$上一致收敛于 0.

证明　由 Heavy-Tail/Poisson 度分布序列的定义知 $L_n > 0$ 和 $\frac{1}{L_n} = \frac{1-R}{H(n)(1-e^{-L_n})}\left(\frac{n}{n+1}\right)(n \ge 1)$, 则对所有 $x \in (0, F]$ 有

$$D_nK_n(x) - 1 + Q_n^{-1}(1-x) = D_n\frac{1}{H(n)}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i} + \frac{1}{L_n}\ln(1-x) = (1-R)\left[\frac{D_n}{1-R} - \left(\frac{n}{n+1}\right)\Big/(1-e^{-L_n})\right]\frac{1}{H(n)}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}$$

$$-\frac{1-R}{H(n)(1-e^{-\alpha_n})}\left(\frac{n}{n+1}\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{x^i}{i}$$

所以

$$|D_n\lambda_n(x)-1+\rho_n^{-1}(1-x)|$$

$$\le(1-R)\left|\frac{D_n}{1-R}-\left(\frac{n}{n+1}\right)/(1-e^{-\alpha_n})\right|+\frac{1-R}{H(n)(1-e^{-\alpha_n})}\left(\frac{n}{n+1}\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\sigma^i}{i}\qquad(2)$$

由引理 2 知 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$. 从 Heavy-Tail/Poisson 度分布序列为达信道容量的和引理 1 得 $\lim_{n\to\infty}D_n/(1-R)=1$. 再由 $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^i/i$ 收敛知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty}\sigma^i/i=0$. 所以当 $n\to\infty$ 时式(2)的右端趋于 0. 因此 $D_n\lambda_n(x)-1+\rho_n^{-1}(1-x)$ 在 $(0,\sigma]$ 上一致收敛于 0.

定理 2 设 $(\lambda_{\alpha,n},\rho_a)$(整数 $a\ge3$ 和 $n\ge2$)是码率为 R 的右边正则的度分布序列, D_n 如引理 1 中所定义, 则 $D_n\lambda_{\alpha,n}(x)-1+\rho_a^{-1}(1-x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 0.

证明 对右边正则的度分布序列 $(\lambda_{\alpha,n},\rho_a)$, 注意到 $1-(1-x)^{\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^{k+1}x^k$、$\binom{\alpha}{n}(-1)^{n+1}>0\ (n\ge2)$ 和 $\alpha=1/(a-1)$, 结合式(1)对所有 $x\in(0,1)$ 有

$$D_n\lambda_{\alpha,n}(x)-1+\rho_a^{-1}(1-x)$$

$$=D_n\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\binom{\alpha}{k}(-1)^{k+1}x^k\Big/\left[\alpha-n\binom{\alpha}{n}(-1)^{n+1}\right]-1+(1-x)^{\alpha}$$

$$=\frac{D_n}{1-R}\left[1-\frac{1}{\alpha}\binom{\alpha}{n}(-1)^{n+1}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{\alpha}{n}(-1)^{k+1}x^k-\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^{k+1}x^k$$

由引理 3(a)和式(1)有

$$|D_n\lambda_{\alpha,n}(x)-1+\rho_a^{-1}(1-x)|$$

$$\le\left|\frac{D_n}{1-R}\left[1-\frac{1}{\alpha}\binom{\alpha}{n}(-1)^{n+1}\right]^{-1}\right|\cdot\left|(1-R)\left[1-\frac{1}{\alpha}\binom{\alpha}{n}(-1)^{n+1}\right]\right|+\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^{k+1}\qquad(3)$$

对整数 $a\ge3$ 和 $a\ge2$, 由引理 3(a)和引理 4 得 $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^{k+1}$ 收敛, 从而有 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^{k+1}=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^{n+1}=0$. 结合 $\lim_{n\to\infty}D_n/(1-R)=1$ 知当 $n\to\infty$ 时式(3)的右端趋于 0. 因此 $D_n\lambda_{\alpha,n}(x)-1+\rho_a^{-1}(1-x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 0.

用数学分析的知识容易证明此定理.

引理 5 设对每个自然数 n, $f_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单调函数, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$. 则 $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

引理 6 设函数 $f_n(x)$ 为 $[0,1]$ 上具有收敛的幂级数, 而且此幂级数的系数均为非负, 同时满足 $f_n(0)=0$ 和 $f_n(1)=1$ $(n=1,2,\ldots)$. 若 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0$, 则对于任意确定的 $\sigma<1$, $f_n(x)$ 在 $[0,\sigma]$ 上一致收敛于 0.

证明 由幂级数的性质知其和函数 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 易见对每个自然数 n, $f_n(x)$ 为 $[0,1]$ 上的严格单调递增的非负函数. 对任意的 $x\in(0,\sigma)$, 由 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$ 存在正整数 n_1 使得对所有 $n\ge n_1$ 有 $\int_0^1 f_n(x)\,dx<\varepsilon$, 从而对 $x\in[0,\sigma]$ 有 $\int_x^{\sigma} f_n(x)\,dx<\varepsilon$, 由积分中值定理知存在 $\xi\in[x,\sigma]$ 使得 $f_n(\xi)=\frac{1}{\sigma-x}\int_x^{\sigma}f_n(x)\,dx$, 结合非负函数 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的严格单调递增性可得对任意固定为 $x\in[0,\sigma]$ 有 $0\le f_n(x)<f_n(\xi)=\frac{1}{\sigma-x}\int_x^{\sigma}f_n(x)\,dx<\frac{1}{\sigma-x}\varepsilon$, 所以 $f_n(x)$ 在 $[0,\sigma)$ 内收敛于 0. 对于 $x=\sigma$ 必存在 $\sigma_1>\sigma\ (\sigma_1>1)$, 在 $[\sigma,\sigma_1]$ 上用同样的方法可得 $f_n(x)$ 收敛于 0. 根据引理 5 知 $f_n(x)$ 在 $[0,\sigma]$ 上一致收敛于 0.

现证明一般的达信道容量的度分布序列也具有以上分析性质.

定理 3 设 (λ_n,ρ_n) 是码率为 R 的达信道容量的度分布序列, D_n 如引理 1 中所定义, 则 (λ_n,ρ_n) 为达信道容量的度分布序列当且仅当对于任意确定的 $\sigma<1$, 任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $\delta>0$, 存在正整数 n_0 使得对所有 $n\ge n_0$ 和所有的 $x\in(0,\sigma]$ 有

$$-\delta<(1-R-\varepsilon)\lambda_n(x)-1+\rho_n^{-1}(1-x)<0\qquad(4)$$

证明 充分性 设式(4)成立, 由引理 1 知 $\lim_{n\to\infty}D_n=1-R$, 故对 $\forall\varepsilon>0$ 存在正整数 n_1 使得对所有 $n\ge n_1$ 有 $D_n>1-R-\varepsilon$; 又因为 $\rho_n(x)$ 和 $\lambda_n(x)$ 为 $[0,1]$ 上严格单调递增的非负函数, 所以就上述的任意 $\varepsilon>0$ 和 n_1, 对所有 $n\ge n_1$ 和所有 $x\in(0,1)$ 有 $\rho_n(1-(1-R-\varepsilon)\lambda_n(1-x))>x$ 成立, 即 (λ_n,ρ_n) 为达信道容量的度分布序列.

必要性 首先证明 $\lambda_n(x)$ 和 $1-\rho_n^{-1}(1-x)$ 在 $[0,\sigma]$ 上一致收敛于 0. 由文[4]知 $D_n\le(1-R)(1-R^{a_n})$, 其中 $1/a_n=\int_0^1\rho_n(x)\,dx$. 从 (λ_n,ρ_n) 为达信道容量的和引理 1 知 $\lim_{n\to\infty}D_n=1-R$, 由 $\rho_n(x)$ 的非负性知 $a_n\ge0\ (n\ge1)$, 类似于引理 2 的证明得 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在(包括非正常极限), 且必有 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, 从而有 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\rho_n(x)\,dx=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1[1-\rho_n^{-1}(1-x)]\,dx=0$. 结合 $R=1-\int_0^1\rho_n(x)\,dx/\int_0^1\lambda_n(x)\,dx$ 得 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\lambda_n(x)\,dx=0$. 由引理 6 知 $\lambda_n(x)$ 和 $1-\rho_n^{-1}(1-x)$ 在 $[0,\sigma]$ 上一致收敛于 0. 所以对 $\forall\varepsilon>0$ 存在正整数 $n_2>0$ 使得对所有 $n\ge n_2$ 和所有 $x\in[0,\sigma]$ 有

$$-\delta/2<(1-R-\varepsilon)\lambda_n(x)<\delta/2$$

$$-\delta/2<-1+\rho_n^{-1}(1-x)<\delta/2$$

即 $-\delta<(1-R-\varepsilon)\lambda_n(x)-1+\rho_n^{-1}<\delta$. 又因为 (λ_n,ρ_n) 为达信道容量的, 故存在正整数 n_3 使得对所有 $n\ge n_3$ 和所有 $x\in(0,1)$ 有 $(1-R-\varepsilon)\lambda_n(x)-1+\rho_n^{-1}(1-x)<0$, 取 $n_0=\max\{n_2,n_3\}$ 即知对于任意确定的 $\sigma<1$, 任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $\delta>0$, 存在正整数 n_0 使得对所有 $n\ge n_0$ 和所有的 $x\in(0,\sigma]$ 有 $-\delta<(1-R-\varepsilon)\lambda_n(x)-1+\rho_n^{-1}(1-x)<0$.

类似于定理 3 中必要性的证明易证下面定理.

定理 4　设(K_n, Q_n)是码率为 R 的的达信道容量的度分布序列, D_n 如引理 1 中所定义, 则 $D_n K_n(x) - 1 + Q_n^{1}(1 - x)$ 在(0, 1)的任意闭子区间[a, b]上一致收敛于 0.

根据定理4, 在设计低密度纠删码的达信道容量的度分布序列时, 这一结论可作为一个分析性条件来检验和判断所构造的度分布序列是否可达信道容量. 比如, 对于一个右正则的度分布序列(K_n, Q_n), 设所有右侧结点的度数均为整数 a \ 3, 现考察函数

$$f_n(x) = D_n K_n(x) - 1 + (1 - x)^{\frac{1}{a-1}}$$

若$f_n(x)$在(0, 1)的任意闭子区间[a, b]上一致收敛于 0 且在(0, 1)上有 $f_n(x) < 0$, 则此度分布序列可能是纠删码达信道容量的一个候选序列; 反之, 该序列一定不可达信道容量, 应该排除掉. 总之, 利用这一结论可在序列设计中排除掉不可达信道容量的序列, 并可能保留一些较好的候选序列, 从而有助于低密度纠删码度分布序列的设计.

4　结束语

本文证明了码率 R 的低密度纠删码 Heavy2Tail/ Poisson 序列、右边正则序列以及一般达信道容量序列(K_n, Q_n)均应满足的一个分析性质, 即 $D_n K_n(x) - 1 + Q_n^{1}(1 - x)$ 在(0, 1)的任意闭子区间[a, b]上一致收敛于 0. 提出了低密度纠删码中的度分布序列可达信道容量的一个充分必要条件. 这些分析对低密度纠删码度分布序列的设计有着重要的理论指导意义.

参考文献:

[1] J W Byers, et al. A digital fountain approach to reliable distribution of bulk data [BD]. Available at http://www.icsi.berkeley.edu/~lu2by/, 1998.

[2] R G Gallager. Low Density Parity Check Codes [M]. Cambridge, Mas2sachusetts: MIT Press, 1963.

[3] M Luby, et al. Efficient erasure correcting codes [J]. IEEE Trans Inf Theory, 2001, 47(2): 569- 584.

[4] M A Shokrollahi. New sequences of linear2time erasure codes approach2ing the channel capacity [A]. In Proceedings of the 13th conference on Applied Algebra, Error Correcting Codes, and Cryptography [C]. Berlin: Springer Verlag, 1999.

[5] D J C MacKay, R M Neal. Near shannon limit performance of low den2sity parity check codes [J]. Electronics Letters, 1997, 33(6): 457- 458.

[6] M Luby, et al. Analysis of random processes via and2or tree evaluation [A]. In Proceedings of the 9th Annual ACM2SIAM Symposium on Dis2crete Algorithms [C]. Francisco California, 1998: 364- 373.

[7] 慕建君, 贺玉成, 王新梅. 低密度纠删码稳定收敛条件的证明 [J]. 电子学报, 2002, 30(4): 530- 532.

作者简介:

慕建君　男, 1965 年 3 月生于陕西省吴堡县, 1997 年获西安电子科技大学应用数学专业硕士学位并留校任教, 现为该校通信与电子系统专业在职博士研究生, 目前的研究兴趣为编码、信息论与应用数学.

杨　莉　女, 1965 年 3 月生于江苏省南京市, 1991 年获西安电子科技大学通信与电子系统专业硕士学位并留校任教, 现为该校通信工程学院讲师, 目前的研究方向为编码和计算机接口技术.

王新梅　男, 1937 年 11 月生于浙江省浦江县, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, 长期从事信息论、编码和密码学的教学与研究.